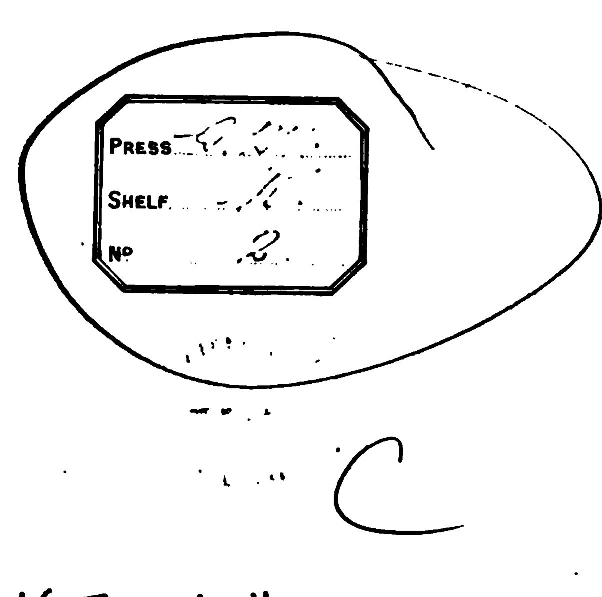



600033926T


PRESS
SHELF
Nº

# LEHRBUCH

ZUR

# BAHNBESTIMMUNG

DER

# KOMETEN UND PLANETEN

VON

THEODOR OPPOLZER,

DOKTOR DER MEDICIN, CORRESP. MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN,
PRIVATDOCENT FÜR ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT ZU WIEN.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.
1870.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

# VORREDE.

Dem vorliegenden ersten Bande meines Werkes habe ich nur Weniges voranzuschicken. Ueber die Anlage des Werkes berichtet die Einleitung in den allgemeinsten Umrissen; entstanden ist dasselbe aus der Zusammenstellung meiner Vorlesungshefte, indem ich in den letzten Jahren über den Gegenstand des vorliegenden Werkes, die Bahnbestimmungen, an der Wiener Universität Vorträge hielt; es waren demnach die meisten Theile des Werkes schon ausgearbeitet, ehe mir das treffliche Watson'sche Werk über denselben Gegenstand zu Handen kam, welches in der That einem Bedürfnisse abhalf. Es war meine Idee über die Anlage eines Werkes, welches dem Schüler gewiss nutzbringend ist, dem Erfahrenen bisweilen als Nachschlagebuch dienen kann, dadurch verwirklicht; ich habe aber doch nicht angestanden meine Arbeit zur Veröffentlichung vorzubereiten, indem die Durchführung der Aufgabe, wie ich dieselbe erfasst habe, in manchen wesentlichen Punkten von Watson's Vorgange abweicht; ich will aber nicht hiermit behaupten, dass ich eine Verbesserung angestrebt und erreicht habe, sondern ich habe das Problem mir so zu Recht gelegt, wie es meiner Individualität am besten zusagt. Das Erscheinen der Watson'schen Arbeit aber gab mir die unmittelbare Veranlassung mich einerseits zu bestreben das Werk mindestens zum vorläufigen Abschlusse zu bringen und anderseits mich zu bemühen, einen Verleger für dasselbe zu finden. Das letztere gelang sofort, indem Herr W. Engelmann in Leipzig mit der grössten Bereitwilligkeit, die mich zu Danke verpflichtet, die Herausgabe des Werkes übernahm; das erstere habe ich nur theilweise erreicht. Während ich

das Material sichtete und zusammentrug, wuchs dasselbe unter meinen Händen und ich sah sofort die Nothwendigkeit ein, das Werk in zwei Bände zu scheiden; den ersten Band übergebe ich hiermit der Oeffentlichkeit, der zweite Band, dessen Bearbeitung noch im Rückstande ist, soll so bald als möglich folgen, wenn der Vorläufer Beifall findet. Ich habe mich desshalb bestrebt, diese Scheidung so streng durchzuführen, dass dieser erste Band als völlig selbständiges Werk betrachtet werden darf und auch ohne dem zweiten Band in sich selbst den Abschluss findet.

Ich kann diese Vorrede nicht schliessen ohne vorher dem Herrn Dr. Rudolf Engelmann in Leipzig dafür meinen verbindlichsten Dank abzustatten, dass sich derselbe der mühevollen und lästigen Arbeit unterzogen hat, die erste Korrektur des vorliegenden Werkes zu lesen, und ich bin demselben ausserdem für so manchen freundschaftlichen Wink innigst verbunden.

Wien im November 1869.

**Theodor Oppolzer.**

# Inhaltsverzeichniss.

# EINLEITUNG.

Die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers kann nicht sofort mit der grössten Genauigkeit durchgeführt werden, man ist gezwungen, wie dies in den meisten Fällen der Naturforschung statt hat, sich nur stufenweise der Wahrheit zu nähern; dem entsprechend ist auch die Anordnung des Werkes getroffen. Der erste Band enthält die vorläufige Lösung des Problems, nämlich die erste Bahnbestimmung; die Natur der Aufgabe bringt es mit sich, dass diese Lösung nur dann möglich ist, wenn die heliocentrische Bewegung des Körpers nicht zu gross ist, innerhalb des Zeitraumes, auf den die zur Rechnung verwendeten Beobachtungen vertheilt sind; ferner wird man hierbei ganz von störenden Einflüssen der übrigen Planeten absehen müssen. Der Inhalt des zweiten Bandes wird der weiteren Verbesserung der so gefundenen Elemente gewidmet sein; man wird in der Lage sein, die Elemente beliebig vielen Beobachtungen den Principien der Wahrscheinlichkeit nach anzuschliessen, und die störenden Einflüsse der Planeten auf die Bewegung des zu berechnenden Himmelskörpers zu ermitteln. Die Störungen selbst kommen unter einem zweifachen Gesichtspunkt in Betracht; man geht entweder von einem bestimmten Punkt der Bahn aus und verfolgt Schritt für Schritt die störenden Einflüsse der Planeten (specielle Störungen) oder man zerlegt die Störungen in eine Anzahl von Perioden von sehr verschiedenen Zeitintervallen (allgemeine Störungen) und ermittelt für einen gegebenen Zeitpunkt die Störungen dadurch, dass man die Summe der für dieses Zeitmoment geltenden periodischen Störungen ermittelt; man ist aber oft gezwungen einigen Zeitperioden eine unendlich lange Dauer zuzuschreiben und man erhält demnach ausser den periodischen Störungen solche, welche mit der Zeit anwachsen und säkulare genannt werden. Die Behandlung der Störungen auf die zuletzt angegebene Weise schliesse ich vorläufig aus und werde im zweiten Bande nur die Methode der speciellen Störungen berücksichtigen.

Beide Bände zerfallen gleichmässig in zwei Unterabtheilungen; die Lösung der hier in Betracht kommenden Aufgaben setzt gewisse Kenntnisse voraus, ohne deren Beihilfe das Verständniss der nothwendigen Ableitungen entweder schwer oder gar nicht

erlangt wird; desshalb habe ich beiden Bänden einen präparatorischen Theil vorangeschickt der die später nothwendigen Disciplinen in der nöthigen Ausdehnung behandelt; die Erläuterungen sind für den Anfänger durchaus nöthig, ich meine aber, dass es auch dem erfahrenen Astronomen oft angenehm ist, alles Zusammengehörige übersichtlich angeordnet vorzufinden.

Häufig ist die Darstellungsweise und manche der zum Vortrag gebrachten Methoden neu; der erfahrene Leser wird diess bei einer oberflächlichen Durchsicht sofort erkennen. Ich habe stets die Methoden auszuwählen mich bestrebt, die die grösste Sicherheit in Erlangung des Zieles gewähren; es war demnach bei der Auswahl derselben nicht immer die Kürze massgebend.

# Ermittlung der Bahnelemente eines Himmelskörpers des Sonnensystems aus drei oder vier Beobachtungen.

## Erster Theil.

(Präparatorischer Theil.)

### I. Abschnitt. Die Coordinaten in ihrem gleichzeitigen Verhalten zu einander.

#### 1. Eintheilung der Himmelskugel.

Der Ausgangspunkt der Untersuchung über die wahre Bahn eines Himmelskörpers ist die scheinbare Bahn, welche letztere man durch die Beobachtungen mindestens näherungsweise kennen lernt. Die Beobachtung gibt für eine bestimmte Zeit den scheinbaren Ort dieses Körpers auf die Himmelskugel projicirt an. Um nun diese Ortsangabe nach bestimmten Normen ausführen zu können, muss irgend eine Annahme über ein Coordinatensystem gemacht werden, welches als Ausgangspunkt der Zählung dient; es ist im Allgemeinen gleichgültig, welches Coordinatensystem in Anwendung kommt, doch sind nur gewisse wenige Systeme aus praktischen Gründen in Gebrauch gekommen; ich kann mich daher im Folgenden auf die Betrachtung dieser beschränken.

Ein Punkt auf der Erdoberfläche beschreibt einen Weg im Raume, der aus drei wesentlich verschiedenen Bewegungen zusammengesetzt ist. Die erste Bewegung ist bedingt durch die Rotation der Erde um ihre Achse; die Periode dieser Bewegung ist ein Tag. Die zweite Bewegung hängt ab von dem Fortschreiten der Erde in ihrer Bahn um die Sonne; die Periode ist hier das Jahr. Ferner bewegt sich die Sonne im Raume, an dieser Bewegung nehmen alle Körper des Sonnensystems Theil, mithin auch die Erde; über die Richtung, das Mass und die Zeit dieser Bewegung ist wenig mit Sicherheit ermittelt. Für den vorliegenden Zweck ist aber diese letztere Bewegung ohne Belang, da es hierbei nur auf die relative Bewegung des Himmelskörpers gegen das Sonnencentrum ankommt; die ersteren Bewegungen jedoch sind von besonderem Interesse, da dieselben die beiden wichtigsten Coordinatensysteme bedingen.

Legt man parallel der täglichen Bewegung des Erdortes eine Ebene, oder allgemeiner eine Ebene, welche senkrecht auf der Rotationsachse der Erde steht, so ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der Himmelskugel der Aequator, der nothwendig ein grösster Kreis ist. Der Aequator theilt die Himmelskugel in zwei Hemisphären;

man bezeichnet diejenige als die nördliche, gegen welche der Nordpol der Erde gerichtet ist, die andere als die südliche; man verbindet mit ersterer als Symbol das positive Zeichen, mit letzterer das negative.

Legt man parallel der jährlichen Bewegung der Erde eine Ebene, so ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der Himmelskugel die Ekliptik. Die Ekliptik theilt als grösster Kreis ebenfalls die Himmelskugel in zwei Hemisphären; in der nördlichen (positiven) Hemisphäre der Ekliptik liegt der Nordpol des Aequators, in der südlichen (negativen) der Südpol des Aequators.

Der Aequator und die Ekliptik schneiden sich als grösste Kreise in zwei Punkten, die 180° von einander entfernt liegen, den Tag- und Nachtgleichenpunkten. Als Anfangspunkt der Zählung im Aequator und in der Ekliptik nimmt man den einen Tag- und Nachtgleichenpunkt und zwar denjenigen, in dem die Ekliptik in der Bewegungsrichtung der Erde beschrieben, aus der südlichen Aequatorhemisphäre in die nördliche ansteigt; dieser Punkt ist der Frühjahrs-Tag- und Nachtgleichenpunkt (♈) oder kürzer der Frühjahrspunkt. Die Neigung der Ekliptik gegen den Aequator nennt man die Schiefe der Ekliptik ($\varepsilon$).

Es sind durch die eben angestellten Betrachtungen zwei Coordinatensysteme erlangt, die völlig vom Standpunkte des Beobachters unabhängig sind; man kann demnach beide dieser Systeme ohne einen weiteren Zusatz zur Bestimmung der Lage eines Punktes benützen und diese Bestimmung kann entweder durch die polaren oder rechtwinkligen Coordinaten vermittelt werden. Die in der Praxis eingeführte Zählart der polaren Aequatorcoordinaten ist die folgende: die eine Coordinate wird in der Ebene des Aequators vom Frühjahrspunkte im Sinne der Erdrotation gezählt (von West über Süd nach Ost), also im umgekehrten Sinne zur scheinbaren täglichen Bewegung der Gestirne. Man nennt diese Coordinate die gerade Aufsteigung oder Rectascension ($\alpha$); dieselbe wird entweder in Bogen oder Zeitmass angesetzt; erstere Zählweise gründet sich darauf dass man die Peripherie in 360 Grade theilt, welche wieder im Verhältnisse 1:60 in Bogenminuten und Bogensekunden zerfällt werden, die letztere Zählweise, welche durch die nothwendige Verbindung der Beobachtung mit der Zeit besonders bequem ist, theilt die Peripherie in 24 Stunden und diese letzteren wieder im Verhältnisse 1:60 in Zeitminuten und Zeitsekunden. Es ist demnach

$$15^{\circ} = 1^{h} \quad , \quad 1^{\circ} = 4^{m}$$
$$15' = 1^{m} \quad , \quad 1' = 4^{s}$$
$$15'' = 1^{s} \quad , \quad 1'' = 0^{s}0666\,..$$

Es geschieht also der Uebergang von Bogenmass auf das Zeitmass durch die Division mit 15 und umgekehrt durch Multiplikation mit derselben Zahl. Diese Transformation kann durch Hilfstafeln, welche sich in fast allen astronomischen Tafelsammlungen vorfinden leicht genug durchgeführt werden; doch bietet die Anwendung dieser Tafeln keinen Vortheil gegen das eben zu beschreibende Verfahren, welches man bei dieser Transformation einschlagen kann, zumal wenn dasselbe durch einige Uebung dem Rechner geläufig geworden ist. Es sei ein gegebener Bogen in Zeitmass zu verwandeln. Man dividirt die Grade durch 15 und erhält, wenn man den Rest vorläufig

ausser Acht lässt die Anzahl Stunden, die man sofort hinschreibt; die Division des Restes durch 15 geschieht einfach, indem man denselben im Kopfe mit 4 multiplicirt und das Resultat als in Zeitminuten ausgedrückt betrachtet; diese Zahl erfährt eine Korrektion (stets kleiner als 4 Einheiten), wenn die zu verwandelnden Bogenminuten der Zahl nach mehr als 15 sind; man dividire, wie das mit den Graden geschehen ist, die angesetzten Bogenminuten mit Ausserachtlassung des Restes durch 15 und fügt die so erhaltene Zahl zu den durch den Rest in den Graden vorhandenen Zeitminuten hinzu. Der Rest in den Bogenminuten wird durch die Multiplikation mit 4 in Zeitsekunden verwandelt und zu diesem der Quotient addirt, der sich aus der Division der angesetzten Bogensekunden ergibt. Bei einiger Uebung wird man diese Transformation so schnell auszuführen im Stande sein, als man überhaupt Zahlen hinzuschreiben vermag. Ich werde ein Beispiel hier ansetzen und die im Kopfe auszuführenden Rechnungen ebenfalls hinschreiben, um das Schema der Operationen auf einen Blick zu übersehen. Es sei zu verwandeln:

$$350^{0}\ 48'\ 33''78$$

Man hat:

$$\frac{350^{0}}{15} = 23^{h} + 5 \times 4 \text{ Zeitminuten}$$

$$\frac{48'}{15} = \quad + 3^{m} + 3 \times 4 \text{ Zeitsekunden}$$

$$\frac{33''78}{15} = \qquad + 2^{s}252$$

$$23^{h}\ 23^{m}\ 14^{s}252$$

Aus dem eben Mitgetheilten wird sich leicht das inverse Verfahren ableiten lassen, um eine in Zeitmass angesetzte Rectascension in Bogenmass zu verwandeln. Man verwandelt die Stunden durch die Multiplikation mit 15 in Grade und sieht nach, wie viel mal die vorgesetzten Zeitminuten durch 4 theilbar sind; das Resultat addirt man mit Ausserachtlassung des Restes zu den bereits gefundenen Graden und setzt die Summe als Grade an; den in den Bogenminuten erhaltenen Rest (der niemals grösser als 4 sein kann) multiplicirt man mit 15 und addirt hiezu die Zahl, welche die Division der angesetzten Zeitsekunden durch 4 ohne Rücksicht auf den Rest ergibt, die Summe sind die anzusetzenden Bogenminuten. Den bei der Division der Zeitsekunden mit 4 erhaltenen Rest verwandelt man durch die Multiplikation mit 15 in Bogensekunden. Es sei zu verwandeln:

$$23^{h}\ 23^{m}\ 14^{s}252$$

Man hat:

$$23^{h} \times 15 = 345^{0}$$

$$\frac{23^{m}}{4} = \quad 5^{0} + 3 \times 15 \text{ Bogenminuten}$$

$$\frac{14^{s}252}{4} = \qquad 3' + (2^{s}252) \times 15 \text{ Bogensekunden}$$

$$350^{0}\ 48'\ 33''78$$

Die zweite polare Aequatorealcoordinate ist die Abweichung oder Deklination ($\delta$) und wird in der Richtung von dem Aequator zu den Polen gezählt und zwar positiv in der nördlichen, negativ in der südlichen Hemisphäre. Es ist also $\delta \leqq \pm 90^0$. Man zählt aber bisweilen diese zweite Coordinate von dem Nordpole über den Aequator zum Südpole hin bis $180^0$ und nennt diese Coordinate die Nordpolardistanz ($\pi_n$); man kann aber ebenso als Ausgangspunkt der Zählung den Südpol wählen und erhält so die Südpolardistanz ($\pi_s$). Die Relationen sind demnach zwischen diesen verschiedenen Zählweisen:

$$\delta = 90^0 - \pi_n = \pi_s - 90^0$$
$$\pi_n = 90^0 - \delta = 180^0 - \pi_s$$
$$\pi_s = 90^0 + \delta = 180^0 - \pi_n$$

Für die analytische Behandlung ist aber oft die Einführung der rechtwinkligen Coordinaten statt der polaren vorzuziehen; bezeichnet man mit $\varrho$ den Radius der Himmelskugel so wird:

$$x = \varrho \cos\delta \cos\alpha$$
$$y = \varrho \cos\delta \sin\alpha$$
$$z = \varrho \sin\delta$$

Man sieht aus diesen Gleichungen sofort, dass die positive X-achse durch den Frühjahrpunkt gelegt ist, die positive Y-achse trifft die Himmelskugel in der Rectascension $90^0 = 6^h$, die positive Z-achse geht durch den Nordpol.

In dem Coordinatensystem der Ekliptik wird die der Rectascension analoge Coordinate Länge ($\lambda$) genannt und wird im Sinne der Bewegungsrichtung der Erde vom Frühjahrs-Tag- und Nachtgleichenpunkte gezählt; die in diesem Coordinatensysteme der Deklination in Zählweise völlig analoge Coordinate ist die Breite ($\beta$). Für die rechtwinkligen Coordinaten ist wieder

$$x = \varrho \cos\beta \cos\lambda$$
$$y = \varrho \cos\beta \sin\lambda$$
$$z = \varrho \sin\beta$$

woraus sofort die Lage der Coordinatenachsen erkannt wird.

Ausser dem bisher betrachteten Systeme kommen noch zwei weitere in Betracht, die vom Standorte des Beobachters abhängig sind. Das eine System, welches bei den geodätischen Bestimmungen von hoher Wichtigkeit ist (Azimuth und Höhe), kann für das vorliegende Werk als unwesentlich von der Betrachtung ausgeschlossen werden; das andere Coordinatensystem (Stundenwinkel und Deklination) ist aber bei der Berechnung der Parallaxe sehr wichtig; das Coordinatensystem des Stundenwinkels ist fast völlig identisch mit dem des Aequators, nur der Ausgangspunkt und die Zählungsrichtung ist in der einen Coordinate verschieden. Die Deklination ($\delta$) ist beiden Systemen gemeinsam, die andere Coordinate zählt man aber vom Meridian des Beobachtungsortes aus und zwar in der der Rectascensionszunahme entgegengesetzten Richtung, also im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung der Himmelskugel und nennt diese Coordinate den Stundenwinkel ($t$). Der Stundenwinkel des Frühjahrspunktes wird Sternzeit ($\theta$) genannt. Es ist also

$$\theta - t = \alpha$$
$$t = \theta - \alpha.$$

Für die rechtwinkligen Coordinaten ist wieder

$$x = \varrho \cos\delta \cos t$$
$$y = \varrho \cos\delta \sin t$$
$$z = \varrho \sin\delta$$

Die positive X-achse trifft die Himmelskugel in dem sichtbaren (über den Horizont befindlichen) Durchschnittspunkte des Meridians und Aequators, die positive Y-achse ist gegen den Westpunkt gerichtet, die positive Z-achse gegen den Nordpol.

## 2. Transformation der Coordinaten.

a. Der Anfangspunkt der Coordinaten bleibt unverändert.

Die bislang betrachteten Coordinatensysteme haben einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt, und es sollen die Relationen eruirt werden, welche zwischen den verschiedenen Coordinatensystemen bestehen; hierbei bietet sich zur Betrachtung hauptsächlich die Transformation der Aequatorcoordinaten in ekliptikale und umgekehrt dar; das wenige was über die Beziehungen des Stundenwinkels zur Rectascension zu sagen nöthig ist, ist schon im ersten Kapitel erledigt worden. Die zuerst bemerkte Transformation kommt jedoch bei Bahnbestimmungen sehr häufig vor, da die Beobachtungen mit seltenen Ausnahmen fast stets auf den Aequator als Fundamentalebene bezogen sind, während bei ersten Bahnbestimmungen die Wahl der Ekliptikalcoordinaten viele Vortheile gewährt. Bei diesen Transformationen kommen jedoch zwei wesentlich verschiedene Aufgaben in Betracht; es ist entweder die Lage eines grössten Kreises (Ebene) die für das eine System bekannt ist, auf das andere zu beziehen oder es sind die Coordinaten eines Punktes zu transformiren. Ich werde die erstere Aufgabe zunächst behandeln.

Die Lage zweier grössten Kreise gegen einander wird gewöhnlich durch zwei Angaben bestimmt, sobald der eine grösste Kreis zu einer Fundamentalebene gehört, nämlich durch den Abstand des einen Durchschnittspunktes (Knoten) vom Anfangspunkte der Zählung und ferner durch die gegenseitige Neigung ($i$). Um aber hierbei Alles unzweideutig bestimmt zu haben, muss man gewisse Regeln festhalten. Vorerst hat man zwei Knoten, indem sich zwei grösste Kreise stets in zwei 180° von einander entfernten Punkten schneiden; da der vorliegende grösste Kreis in den hier in Betracht kommenden Fällen fast stets einer Bahnebene eines Himmelskörpers entsprechen wird, so wird man als bezeichnend annehmen dürfen, dass derjenige Knoten der aufsteigende (☊) sei, in dem der grösste Kreis in der Bewegungsrichtung des Himmelskörpers gezogen die Fundamentalebene schneidet, um aus der südlichen in die nördliche Hemisphäre zu gelangen; der andere Knoten, in dem der Himmelskörper aus der nördlichen Hemisphäre in die südliche tritt, ist der niedersteigende (☋). Als Neigung wird man den Winkel auffassen, den die beiden grössten Kreise beim aufsteigenden Knoten in der Richtung der Zählung und Bewegung gezogen einschliessen. Die Neigung ist desshalb innerhalb der Grenzen 0° und 180° eingeschlossen. Bei Kometen zählt man häufig genug sehr unzweckmässig die Neigung nur bis 90° und bezeichnet ähnlich wie früher denjenigen Knoten als den aufsteigenden, wo der grösste Kreis (Bahnebene) in

der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers gezogen, aus der südlichen in die nördliche Hemisphäre ansteigt; ist diese Richtung mit der Bewegungsrichtung der Erde gleichsinnig (nehmen die heliocentrischen Längen zu), so bezeichnet man dies durch den Beisatz: die Bewegung ist direkt; ist dieselbe aber entgegengesetzt (nehmen die heliocentrischen Längen ab) so bezeichnet man die Bewegung des Kometen als retrograd. Im ersteren Falle wird die Neigung wie früher gezählt, im letzteren Falle aber setzt man als Neigung den Winkel an, den die Bewegungsrichtung des Kometen mit dem grössten Kreise der Fundamentalebene, in der zur Zählung umgekehrten Richtung gezogen, bildet; also das Supplement der Neigung. In der Folge werde ich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, stets unter aufsteigenden Knoten und Neigung die zuerst definirten Begriffe verstehen, die von Gauss zuerst vorgeschlagen wurden und mit Recht als die einzig richtigen allgemein in Anwendung gebracht werden sollten.

An diese Betrachtungen schliesst sich unmittelbar die Erklärung eines weiteren Elementes, welches bei Bahnbestimmungen auftritt und ebenfalls von der Wahl der Fundamentalebene theilweise abhängig ist. Durch den Knoten und die Neigung ist zwar die Bahnebene ihrer Lage nach bestimmt, doch die Bahn des Himmelskörpers kann als solche innerhalb dieser Ebene beliebig gedreht erscheinen; um nun auch hier Alles unzweideutig bestimmen zu können, nimmt man einen ganz bestimmten Punkt in der Bahn heraus, dessen Lage in dem grössten Kreise der Bahnebene durch den Abstand vom aufsteigenden Knoten fixirt wird und man wählt denjenigen Punkt in dem grössten Kreise aus, in welchem sich der Himmelskörper von der Sonne aus gesehen befindet, wenn er derselben am nächsten ist (Perihel). Der Abstand dieses Punktes vom aufsteigenden Knoten in der Bewegungsrichtung des Himmelskörpers gezählt wird der Abstand des Perihels vom Knoten ($\omega$) genannt und die Summe der Bögen

$$\omega + \Omega = \pi$$

die Länge des Perihels (wenn die Ekliptik, wie dies wol meistens der Fall ist, als Fundamentalebene gewählt ist). Bei der älteren Zählweise, bei der zwischen direkter und retrograder Zählung unterschieden wird, bezeichnet man den Bogen zwischen Perihel aufsteigendem Knoten in der Bewegungsrichtung der Erde gezählt, als Abstand des Perihels vom Knoten und wieder die Summe dieses Bogens und der Länge des aufsteigenden Knotens als Länge des Perihels. Es ist also, wenn ich die nach der älteren Zählweise angesetzten Elemente mit dem Index »o« versehe

$$i = 180 - i_0 \quad , \quad \omega = 360^0 - \omega_0 = -\omega_0$$
$$\Omega = \Omega_0 \quad , \quad \pi = 2\,\Omega_0 - \pi_0$$

oder umgekehrt

$$i_0 = 180 - i \quad , \quad \omega_0 = 360^0 - \omega = -\omega$$
$$\Omega_0 - \Omega \quad , \quad \pi_0 = 2\,\Omega - \pi$$

Für den Kometen I. 1866 habe ich gefunden

$$\left.\begin{array}{llll} \pi = 42^0\,24'\,1''69 & , & \pi_0 = 60^0\,28'\,4''81 \\ \Omega = 231^0\,26'\,3''25 & , & \Omega_0 = 231^0\,26'\,3''25 \\ i = 162^0\,41'\,54''77 & , & i_0 = 17^0\,18'\,5''23 \\ \omega = 170^0\,57'\,58''44 & , & \omega_0 = 189^0\,2'\,1''56 \end{array}\right\} \text{Bew. retrograd.}$$

Für den Kometen III. 1862 wird sein

$$\left.\begin{array}{llll} \pi = 290^\circ\ 12'\ 47''84 & , & \pi_0 = 344^\circ\ 41'\ 32''20 \\ \Omega = 137^\circ\ 27'\ 10''02 & , & \Omega_0 = 137^\circ\ 27'\ 10''02 \\ i = 111^\circ\ 34'\ 12''24 & , & i_0 = \phantom{0}66^\circ\ 25'\ 47''76 \\ \omega = 152^\circ\ 45'\ 37''82 & , & \omega_0 = 207^\circ\ 14'\ 22''18 \end{array}\right\} \text{Bew. retrograd.}$$

Es sei $i$, $\Omega$ und $\omega$ in Bezug auf die Ekliptik bekannt, es seien die analogen Grössen in Beziehung auf den Aequator, $i'$, $\Omega'$ und $\omega'$, zu suchen. Betrachtet man das sphärische Dreieck zwischen Aequator, Ekliptik und der Bahn und erinnert sich, dass mit $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik bezeichnet wurde, und bezeichnet mit $\sigma$ die dem Winkel $\varepsilon$ gegenüberliegende Seite, so ergeben sofort die Gauss'schen Analogien zur geforderten Transformation:

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}\, i' \sin\tfrac{1}{2}\,(\Omega' + \sigma) &= \cos\tfrac{1}{2}\,(i - \varepsilon) \sin\tfrac{1}{2}\,\Omega \\ \cos\tfrac{1}{2}\, i' \cos\tfrac{1}{2}\,(\Omega' + \sigma) &= \cos\tfrac{1}{2}\,(i + \varepsilon) \cos\tfrac{1}{2}\,\Omega \\ \sin\tfrac{1}{2}\, i' \sin\tfrac{1}{2}\,(\Omega' - \sigma) &= \sin\tfrac{1}{2}\,(i - \varepsilon) \sin\tfrac{1}{2}\,\Omega \\ \sin\tfrac{1}{2}\, i' \cos\tfrac{1}{2}\,(\Omega' - \sigma) &= \sin\tfrac{1}{2}\,(i + \varepsilon) \cos\tfrac{1}{2}\,\Omega \end{aligned}$$

Der Abstand des Perihels vom Knoten wird aber transformirt nach:

$$\omega' = \omega + \sigma$$

und es ist weiter:

$$\pi' = \omega' + \Omega'$$

Man kann aber auch andere Formeln aufstellen, die man als Controlle benutzen kann, wenn eine solche wünschenswerth erscheinen sollte. Aus demselben sphärischen Dreiecke findet sich leicht:

$$\begin{aligned} \sin i' \cos\Omega' &= \sin\varepsilon \cos i + \cos\varepsilon \sin i \cos\Omega \\ \sin i' \sin\Omega' &= \sin i \sin\Omega \\ \cos i' &= \cos\varepsilon \cos i - \sin\varepsilon \sin i \cos\Omega \\ \sin i' \cos\sigma &= \cos\varepsilon \sin i + \sin\varepsilon \cos i \cos\Omega \\ \sin i' \sin\sigma &= \sin\varepsilon \sin\Omega \end{aligned}$$

Setzt man also, um die eben aufgestellten Formeln etwas zusammen zu ziehen

$$\begin{aligned} \sin i \cos\Omega &= \sin a \sin A \\ \cos i &= \sin a \cos A \\ \sin i &= \sin b \sin B \\ \cos i \cos\Omega &= \sin b \cos B \end{aligned}$$

in welchen Formeln es gestattet sein wird, sowol $\sin a$ als auch $\sin b$ positiv anzunehmen, so wird:

$$\begin{aligned} \sin i' \cos\Omega' &= \sin a \sin(A + \varepsilon) \\ \sin i' \sin\Omega' &= \sin i \sin\Omega \\ \sin i' \cos\sigma &= \sin b \sin(B + \varepsilon) \\ \sin i' \sin\sigma &= \sin\varepsilon \sin\Omega \\ \cos i' &= \sin a \cos(A + \varepsilon) \\ \omega' &= \omega + \sigma \\ \pi' &= \omega' + \Omega' \end{aligned}$$

Ein Zweifel, in welchen Quadranten die Winkel anzunehmen seien, kann weder im ersteren noch in letzterem Rechnungsschema entstehen, da $i'$ stets kleiner als $180^\circ$ ist; es ist demnach $\sin\frac{1}{2}\, i'$, $\cos\frac{1}{2}\, i'$ und $\sin i'$ stets positiv.

Um vorstehende Vorschriften durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich die oben angesetzten Elemente des Kometen III 1862, die sich auf die Ekliptik beziehen, in äquatoreale umwandeln. Die anzuwendende Schiefe der Ekliptik ist:

23° 27′ 25″53; ich werde zuerst zu dieser Transformation die Gauss'schen Analogien benutzen; die Rechnung stellt sich dann wie folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}i$ | 56° 47′ 6″12 | $\cos\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$ | 9.818 4063 |
| $\frac{1}{2}\varepsilon$ | 11 43 42.765 | $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ | 9.991 3253 |
| $\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$ | 45 3 23.355 | $\cos\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$ | 9.123 5076 |
| $\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$ | 68 30 48.885 | $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$ | 0.694 8987 |
| $\frac{1}{2}\Omega$ | 68 43 35.01 | $\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)$ | 78° 35′ 10″78 |
| $\cos\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$ | 9.849 0564 | $\sin\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$ | 9.819 2626 |
| $\sin\frac{1}{2}(\Omega)$ | 9.969 3499 | $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ | 9.949 4706 |
| $\sin\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$ | 9 849 9127 | $\sin\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$ | 9.528 4121 |
| $\cos\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$ | 9.563 8140 | $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$ | 0.290 8505 |
| $\cos\frac{1}{2}(\Omega)$ | 9.559 6936 | $\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)$ | 62° 53′ 38″40 |
| $\sin\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$ | 9.968 7185 | $\sin\frac{1}{2}i'$ | 9.869 7920 |
| | | $\cos\frac{1}{2}i'$ | 9.827 0810 |
| $\Omega'$ | 141° 28′ 49″18 | $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i'$ | 0.042 7110 |
| $i'$ | 95 37 32.62 | $\frac{1}{2}i'$ | 47° 48′ 46″31 |
| $\omega'$ | 168 27 10.20 | $\sigma$ | 15 41 32.38 |
| $\pi'$ | 309 55 59.38 | $\omega$ | 152 45 37.82 |

Bei dieser Berechnung kann zur theilweisen Prüfung der Richtigkeit derselben nachgesehen werden ob die für $\sin\frac{1}{2}i'$ und $\cos\frac{1}{2}i'$ gefundenen Werthe zu demselben Winkel gehören.

Will man nun die zweite der oben angeführten Formen zu dieser Verwandlung benutzen, so wird man finden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\varepsilon$ | 9.599 9509 | $\cos(A+\varepsilon)$ | $9_n096$ 6153 |
| $\sin\Omega$ | 9.830 0736 | $\sin a$ | 9.894 7439 |
| $\sin i$ | 9.962 1665 | $\sin(A+\varepsilon)$ | $9_n996$ 5850 |
| $\cos\Omega$ | $9_n867$ 3026 | $\sin i'\cos\Omega$ | $9_n891$ 3289 |
| $\cos i$ | $9_n601$ 9191 | $\left.\begin{matrix}\cos\Omega'\\ \sin\Omega'\end{matrix}\right\}$ | $9_n893$ 4257 |
| $\left.\begin{matrix}\cos A\\ \sin A\end{matrix}\right\}$ | $9_n934$ 7252 | $\sin i'\sin\Omega'$ | 9.792 2401 |
| $\sin a\sin A$ | $9_n829$ 4691 | $\mathrm{tg}\,\Omega'$ | $9_n900$ 9112 |
| $\mathrm{tg}A$ | 0.227 5500 | $\sin i'$ | 9.997 9032 |
| $A$ | 239° 22′ 1″38 | $\sin(B+\varepsilon)$ | 9.997 8930 |
| $A+\varepsilon$ | 262° 49′ 26″91 | $\sin b$ | 9.983 5138 |
| $\sin b\cos B$ | 9.469 2217 | $\sin i'\cos\sigma$ | 9.981 4068 |
| $\left.\begin{matrix}\cos B\\ \sin B\end{matrix}\right\}$ | 9.978 6527 | $\left.\begin{matrix}\cos\sigma\\ \sin\sigma\end{matrix}\right\}$ | 9.983 5036 |
| $\mathrm{tg}B$ | 0.492 9448 | $\sin i'\sin\sigma$ | 9.430 0245 |
| $B$ | 72° 10′ 56″05 | $\mathrm{tg}\,\sigma$ | 9.448 6177 |
| $B+\varepsilon$ | 95° 38′ 21″58 | $\sigma$ | 15° 41′ 32″35 |
| $\Omega$ | 141° 28′ 49.19 | $\omega$ | 152 45 37.82 |
| $i'$ | 95 37 32.67 | $\sin i'$ | 9.997 9032 |
| $\omega'$ | 168 27 10.17 | $\cos i'$ | $8_n991$ 3592 |
| $\pi'$ | 309 55 59.36 | $\mathrm{tg}\,i'$ | $1_n006$ 5440 |

Für die Lösung der umgekehrten Aufgabe, nämlich die Ermittlung der Ekliptikalelemente aus den äquatorealen, werden sich ganz ähnliche Hilfsmittel finden lassen. Das sphärische Dreieck zwischen der Ekliptik, dem Aequator und der Bahn wird geben:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} (\Omega + \sigma) &= \sin\tfrac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin\tfrac{1}{2} \Omega' \\
\sin\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} (\Omega + \sigma) &= \sin\tfrac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos\tfrac{1}{2} \Omega' \\
\cos\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} (\Omega - \sigma) &= \cos\tfrac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin\tfrac{1}{2} \Omega' \\
\cos\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} (\Omega - \sigma) &= \cos\tfrac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos\tfrac{1}{2} \Omega'
\end{aligned}$$

und es ist, ganz ähnlich wie früher:

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega' - \sigma \\
\pi &= \omega + \Omega.
\end{aligned}$$

Will man die Einführung der halben Winkel umgehen, so wird man haben

$$\begin{aligned}
\sin i' \cos\Omega' &= \sin a' \sin A' \\
\cos i' &= \sin a' \cos A' \\
\sin i' &= \sin b' \sin B' \\
\cos i' \cos\Omega' &= \sin b' \cos B' \\
\sin i \cos\Omega &= \sin a' \sin (A' - \varepsilon) \\
\sin i \sin\Omega &= \sin i' \sin\Omega' \\
\sin i \cos\sigma &= \sin b' \sin (B' - \varepsilon) \\
\sin i \sin\sigma &= \sin\varepsilon \sin\Omega' \\
\cos i &= \sin a' \cos (A' - \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\omega = \omega' - \sigma; \quad \pi = \omega + \Omega.$$

Zur Erläuterung der eben angesetzten Formeln nehme ich das oben gewählte Beispiel vom Kometen III. 1862 wieder vor. Die äquatorealen Elemente sind:

$$\Omega' = 141^\circ\, 28'\, 49''18 \quad , \quad \pi' = 309^\circ\, 55'\, 59''36$$
$$i' = 95^\circ\, 37'\, 32''65 \quad , \quad \omega' = 168^\circ\, 27'\, 10''18$$

mit dem bereits oben angeführten Werthe für die Schiefe der Ekliptik wird sich finden

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2} i$ | 47° 48′ 46″325 | $\sin\frac{1}{2} i \sin\frac{1}{2} (\Omega + \sigma)$ | 9.910 4921 |
| $\frac{1}{2} \varepsilon$ | 11 43 42.765 | sin / cos | 9.987 9632 |
| $\frac{1}{2} (i' + \varepsilon)$ | 59 32 29.09 | $\sin\frac{1}{2} i \cos\frac{1}{2} (\Omega + \sigma)$ | 9.288 4171 |
| $\frac{1}{2} (i' - \varepsilon)$ | 36 5 3.56 | $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} (\Omega + \sigma)$ | 0.622 0750 |
| $\frac{1}{2} \Omega'$ | 70 44 24.59 | $\frac{1}{2} (\Omega + \sigma)$ | 76° 34′ 21″19 |
| $\sin\frac{1}{2} (i' + \varepsilon)$ | 9.935 5052 | $\cos\frac{1}{2} i \sin\frac{1}{2} (\Omega - \sigma)$ | 9.679 9225 |
| $\sin\frac{1}{2} \Omega'$ | 9.974 9869 | sin / cos | 9.941 3149 |
| $\cos\frac{1}{2} (i' + \varepsilon)$ | 9.704 9356 | $\cos\frac{1}{2} i \cos\frac{1}{2} (\Omega - \sigma)$ | 9.425 8127 |
| $\sin\frac{1}{2} (i' - \varepsilon)$ | 9.770 0970 | $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} (\Omega - \sigma)$ | 0.254 1098 |
| $\cos\frac{1}{2} \Omega'$ | 9.518 3201 | $\frac{1}{2} (\Omega - \sigma)$ | 60° 52′ 48″83 |
| $\cos\frac{1}{2} (i' - \varepsilon)$ | 9.907 4926 | $\sin\frac{1}{2} i$ | 9.922 5289 |
| | | $\cos\frac{1}{2} i$ | 9.738 6076 |
| $\Omega$ | 137° 27′ 10″02 | $\mathrm{tg}\frac{1}{2} i$ | 0.183 9213 |
| $i$ | 113 34 12.24 | $\frac{1}{2} i$ | 56° 47′ 6″12 |
| $\omega$ | 152 45 37.82 | $\sigma$ | 15 41 32.36 |
| $\pi$ | 290 12 47.84 | $\omega'$ | 168 27 10.18 |

Die Berechnung nach dem zweiten Formelschema stellt sich so:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\varepsilon$ | 9.599 9509 | $\cos(A'-\varepsilon)$ | $9_n$707 1751 |
| $\sin$ ☊$'$ | 9.794 3370 | $\sin a'$ | 9.894 7438 |
| $\sin i'$ | 9.997 9031 | $\sin(A'-\varepsilon)$ | $9_n$934 7252 |
| $\cos$ ☊$'$ | $9_n$893 4257 | $\sin i\cos$ ☊ | $9_n$829 4690 |
| $\cos i'$ | $8_n$991 3587 | $\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$ | $9_n$867 3026 |
| $\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$ | $9_n$996 5850 | $\sin i\sin$ ☊ | 9.792 2401 |
| $\sin a'\sin A'$ | $9_n$891 3288 | tg ☊ | $9_n$962 7711 |
| tg $A'$ | 0.899 9701 | $\sin i$ | 9.962 1664 |
| $A'$ | 262° 49′ 26″93 | $\sin(B'-\varepsilon)$ | 9.946 4810 |
| $A'-\varepsilon$ | 239° 22′ 1″40 | $\sin b$ | 9.999 1891 |
| $\sin b'\cos B'$ | 8.884 7844 | $\sin i\cos\sigma$ | 9.945 6701 |
| $\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$ | 9.998 7140 | $\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$ | 9.983 5036 |
| tg $B'$ | 1.113 1187 | $\sin i\sin\sigma$ | 9.394 2879 |
| $B'$ | 85° 35′ 34″68 | tg $\sigma$ | 9.448 6178 |
| $B'-\varepsilon$ | 62° 8′ 9″15 | $\sigma$ | 15° 41′ 32″36 |
| ☊ | 137° 27′ 9″98 | $\omega'$ | 168° 27′ 10″18 |
| $i$ | 113 34 12.23 | $\sin i$ | 9.962 1665 |
| $\omega$ | 152 45 37.82 | $\cos i$ | $9_n$601 9189 |
| $\pi$ | 290 12 47.80 | tg $i$ | $0_n$360 2475 |

Hat man die Coordinaten eines Punktes zu transformiren, und bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten bezogen auf die Ekliptik mit $x$, $y$, $z$ und die Aequatorcoordinaten mit $x'$, $y'$, $z'$, so wird sein:

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon$$
$$z' = y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon$$

Die Richtigkeit dieser Relationen leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass das Coordinatensystem der Ekliptik aus dem des Aequators dadurch entsteht, dass man um die X-achse als Drehungsachse angenommen, das Coordinatensystem des Aequators um den Winkel $\varepsilon$ (Schiefe der Ekliptik) dreht. Für den umgekehrten Fall wird man leicht aus dem Obigen finden

$$x = x'$$
$$y = y'\cos\varepsilon + z'\sin\varepsilon$$
$$z = -y'\sin\varepsilon + z'\cos\varepsilon.$$

Die eben aufgestellten Formeln werden ebenfalls zur Transformation der polaren Coordinaten dienen können. Setzt man statt der rechtwinkligen Coordinaten nach den im vorausgehenden Kapitel erhaltenen Relationen die polaren ein, so wird sich finden, nachdem man durchaus mit $\varrho$ dividirt hat, nach den ersteren Formeln

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta$$
$$\sin\alpha\cos\delta = \sin\lambda\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon$$
$$\sin\delta = \sin\lambda\cos\beta\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon$$

Die letzteren Formeln geben für den inversen Fall

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta$$
$$\sin\lambda\cos\beta = \sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon$$
$$\sin\beta = -\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon$$

Wendet man Additions- und Subtraktionslogarithmen an, so kann man, ohne Hilfswinkel einzuführen, in der unveränderten Form die Transformation durchführen; ein Zweifel in welchen Quadranten die Winkel zu nehmen sind, kann nicht entstehen, da $\cos\delta$, beziehungsweise $\cos\beta$, immer positiv sein müssen.

Will man jedoch die Rechnung durch Benutzung von Hilfswinkeln zusammenziehen, so hat man für den ersteren Fall:

$$\sin\lambda\cos\beta = m\cos M$$
$$\sin\beta = m\sin M$$

Dann wird zunächst:

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta$$
$$\sin\alpha\cos\delta = m\cos(M + \varepsilon)$$
$$\sin\delta = m\sin(M + \varepsilon)$$

bedenkt man aber, dass

$$m = \frac{\sin\lambda\cos\beta}{\cos M}$$

ist, so wird man zur geforderten Transformation die drei Formeln haben:

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(M + \varepsilon)}{\cos M}\operatorname{tg}\lambda$$
$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(M + \varepsilon)\sin\alpha$$

Für $M$ ist es gleichgiltig in welchem Quadranten dasselbe angenommen wird, wenn nur der ersten Relation dem Zeichen und der Grösse nach völlig genügt wird. Bei $\operatorname{tg}\alpha$ kann der Quadrant in dem $\alpha$ zu nehmen ist, zweifelhaft sein; doch die oben aufgestellte Relation

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta$$

zeigt, da $\cos\beta$ und $\cos\delta$ nothwendig positiv sein müssen, dass $\cos\lambda$ und $\cos\alpha$ stets gleich bezeichnet sind; diese Bedingung in Verbindung mit dem für $\operatorname{tg}\alpha$ gefundenen Werth wird stets mit Sicherheit den Quadranten, in dem $\alpha$ anzunehmen ist, finden lassen. Bei $\operatorname{tg}\delta$ kann ein derartiger Zweifel nicht entstehen, da $\delta$ innerhalb der Grenzen $-90^\circ$ und $+90^\circ$ eingeschlossen ist. Sollte $\alpha$ sehr nahe an $0^\circ$ oder $180^\circ$ zu liegen kommen, so wird man zweckmässig in der dritten Gleichung statt $\sin\alpha$ den Werth $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$ setzen; wird aber gleichzeitig $\operatorname{tg}\delta$ gross (steht das Gestirn sehr nahe dem Nord- oder Südpole), so dass nahehin für die dritte Gleichung die Form: $0.\infty$ erhalten wird, so wird man mit Vortheil statt dieser anwenden den Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin(M+\varepsilon)}{\cos M}\operatorname{tg}\lambda\cos\alpha$$

Als Controlle der Rechnung kann dienen:

$$\frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos\delta\sin\alpha}{\cos\beta\sin\lambda}$$

welche Gleichung man leicht aus den vorstehenden Formeln ableiten kann; doch wird dieselbe wenig verlässlich sein und in den seltensten Fällen die völlig genaue Bestimmung der polaren Coordinaten verbürgen.

Für die viel häufiger nothwendige Verwandlung der Rectascension und Deklination in Länge und Breite wird man ganz ähnliche Formeln haben. Es wird sein

$$\operatorname{tg}N = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(N-\varepsilon)\sin\lambda.$$

Um den Quadranten in dem $\lambda$ zu nehmen ist zu bestimmen, wird man wieder die Relation zu Hilfe nehmen, dass $\cos\lambda$ und $\cos\alpha$ stets gleich bezeichnet sein müssen. Als Controlle (wenig verlässlich) kann man anwenden

$$\frac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N} = \frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha}$$

Wird $\sin\lambda$ sehr klein, so wird man statt der dritten Gleichung setzen

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(N-\varepsilon)\operatorname{tg}\lambda\cos\lambda$$

oder wenn $\operatorname{tg}\beta$ sehr gross wird, während $\lambda$ nahe an $0^\circ$ oder $180^\circ$ ist,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(N-\varepsilon)}{\cos N}\operatorname{tg}\alpha\cos\lambda.$$

Es sei $\alpha = 81^\circ\,48'\,42''4$, $\delta = 68^\circ\,27'\,59''5$ und $\varepsilon = 23^\circ\,27'\,25''53$, so findet sich daraus die Länge und Breite nach folgendem Schema:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg}\delta$ | 0.403 8589 | $\sin\lambda$ | 9.998 8044 | |
| $\sin\alpha$ | 9.995 5499 | $\operatorname{tg}\beta$ | 0.001 9749 | |
| $\operatorname{tg}N$ | 0.408 3090 | $\cos\beta$ | 9.848 4953 | Probe. |
| $N$ | $68^\circ\,39'\,58''42$ | $\cos\beta\sin\lambda$ | 9.847 2997 | |
| $N-\varepsilon$ | $45\;\;12\;\;32''89$ | $\cos\delta$ | 9.564 7190 | |
| $\cos(N-\varepsilon)$ | 9.847 8940 | $\cos\delta\sin\alpha$ | 9.560 2689 | |
| $\sec N$ | 0.439 1369 | $\frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha}$ | 0.287 0308 | |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0.841 9622 | $\cos(N-\varepsilon)\sec N$ | 0.287 0309 | |
| $\operatorname{tg}\lambda$ | 1.128 9931 | | | |
| $\lambda$ | $85^\circ\,45'\;\;2''00$ | | | |
| $\beta$ | $+\;45^\circ\;\;7'\,48''98$ | | | |

Bei der Berechnung der Ephemeriden der Planeten und Kometen ist die Kenntniss der rechtwinkligen äquatorealen Sonnencoordinaten von Wichtigkeit; man kann dieselben leicht aus der Länge, Breite und der Entfernung der Sonne mit Hilfe der früher angesetzten Transformationsformeln ableiten. Ist $L$, $B$ und $R$ die geocentrische Länge, Breite und Entfernung der Sonne, so ist vorerst

$$X' = R \cos L \cos B$$
$$Y' = R \sin L \cos B \cos\varepsilon - R \sin B \sin\varepsilon$$
$$Z' = R \sin L \cos B \sin\varepsilon + R \sin B \cos\varepsilon$$

Da aber die Breite der Sonne selten genug den Werth einer Bogensekunde überschreitet, so kann mit hinreichender Genauigkeit gesetzt werden:

$$X' = R \cos L$$
$$Y' = R \sin L \cos\varepsilon - R \sin\varepsilon .\ B \sin 1''$$
$$Z' = R \sin L \sin\varepsilon + R \cos\varepsilon .\ B \sin 1''$$

Die zweiten Glieder in den Ausdrücken für $Y'$ und $Z'$ können als Korrektionsglieder betrachtet werden; man wird bei der Kleinheit derselben stets für $R$ die Einheit einsetzen dürfen und da $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ selbst sehr geringen Aenderungen unterworfen sind, so können $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ in diesen Gliedern als konstant angesehen werden. Nimmt man $\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 20''$ und will man die Korrektionen in Einheiten der siebenten Decimale finden, so wird man schliesslich mit ausreichender Schärfe setzen dürfen:

$$X' = R \cos L$$
$$Y' = R \sin L \cos\varepsilon - 19.3\, B$$
$$Z' = R \sin L \sin\varepsilon + 44.5\, B$$

wobei $B$ in Bogensekunden anzunehmen ist. Diese äquatorealen Sonnencoordinaten finden sich in den meisten astronomischen Ephemeridensammlungen.

Weiter ist bei der Berechnung der Ephemeriden die Kenntniss der heliocentrischen Aequatorealcoordinaten des Himmelskörpers nöthig, da aber die Elemente meist auf die Ekliptik bezogen werden, so ist es gewöhnlich leichter die Ekliptikalcoordinaten zu erlangen; dieselben müssen dann erst für den Aequator transformirt werden; hat man aber viele derartige Transformationen auszuführen, wie diess bei der Ausführung einer Ephemeride nöthig wäre, so wird die Berechnung einiger Hilfsgrössen die Arbeit wesentlich abkürzen und erleichtern.

Aus den Elementen wird man $r$, die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne und $v$, den heliocentrischen Bogen zwischen dem Perihel und den Ort des Himmelskörpers in der Richtung der Bewegung gezählt, erhalten. Bezeichnet man, wie oben, mit $\omega$ den Abstand des Perihels vom Knoten, so ist der Abstand des Himmelskörpers vom aufsteigenden Knoten $u$ (Argument der Breite), in derselben Richtung gezählt, bestimmt durch:

$$u = v + \omega$$

Legt man nun ein Coordinatensystem so, dass die XY-Ebene mit der Ekliptik zusammenfällt, und dass die positive X-Achse die Himmelskugel in der Länge des Knotens trifft, so wird sein für die rechtwinkligen Coordinaten:

$$x_0 = r \cos u$$
$$y_0 = r \sin u \cos i$$
$$z_0 = r \sin u \sin i$$

Dreht man nun dieses Coordinatensystem um die Z-Achse so, dass jetzt die positive X-Achse mit dem Frühjahrspunkte zusammenfällt, so werden jetzt die rechtwinkligen Coordinaten sein

$$x = x_0 \cos \Omega - y_0 \sin \Omega$$
$$y = x_0 \sin \Omega + y_0 \cos \Omega$$
$$z = z_0$$

oder durch Substitution der früher gefundenen Werthe

$$x = r \{ \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \}$$
$$y = r \{ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \}$$
$$z = r \sin u \sin i$$

Verwandelt man nun diese Ekliptikalcoordinaten, mit Hilfe der auf pag. 12 angesetzten Transformationsformeln, in äquatoreale, so wird man leicht finden:

$$x' = r \{ \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \}$$
$$y' = r \{ \cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin u \sin i \sin \varepsilon \}$$
$$z' = r \{ \cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin u \sin i \cos \varepsilon \}$$

Setzt man nun:

$$\cos \Omega = \sin a \sin A$$
$$-\sin \Omega \cos i = \sin a \cos A$$
$$\sin \Omega \cos \varepsilon = \sin b \sin B$$
$$\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon = \sin b \cos B$$
$$\sin \Omega \sin \varepsilon = \sin c \sin C$$
$$\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon = \sin c \cos C$$

so ziehen sich die obigen Ausdrücke in die folgenden zusammen:

$$x' = r \sin a \sin (A + u)$$
$$y' = r \sin b \sin (B + u)$$
$$z' = r \sin c \sin (C + u)$$

Die Berechnung der Konstanten $b$, $B$, $c$ und $C$ kann durch weitere Hilfsgrössen etwas vereinfacht werden; setzt man nämlich:

$$\cos \Omega \cos i = n \cos N$$
$$\sin i = n \sin N$$

so wird:

$$n \cos (N + \varepsilon) = \sin b \cos B$$
$$n \sin (N + \varepsilon) = \sin c \cos C.$$

Man wird $\sin a$, $\sin b$ und $\sin c$ stets positiv annehmen können und darnach die Quadranten, in denen $A$, $B$ und $C$ zu nehmen sind, bestimmen. Zur Controlle der richtigen Berechnung der Konstanten wird man auf die folgende Weise einen geeigneten Ausdruck erhalten. Durch entsprechende gegenseitige Multiplikation der Ausdrücke für die Hilfswinkel ergibt sich:

$$\sin b \sin c \sin C \cos B = \sin \Omega \sin \varepsilon \{ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \}$$
$$\sin b \sin c \cos C \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon \{ \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \}$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen lässt finden:

$$\sin b \sin c \sin (C - B) = - \sin \Omega \sin i$$

nun ist aber auch gesetzt worden

$$\sin \Omega \cos i = - \sin a \cos A.$$

demnach gilt auch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}$$

welche als Prüfungsgleichung benutzt werden kann.

In den zuletzt aufgestellten Ausdrücken für die rechtwinkligen Coordinaten wird es zweckmässig sein, das Argument der Breite ($u$) aufzulösen in $v + \omega$ und $\omega$ mit den Konstanten $A$, $B$ und C zu vereinigen. Es wird dann sein

$$\begin{aligned} A + \omega &= A' & x' &= r \sin a \sin (A' + v) \\ B + \omega &= B' & y' &= r \sin b \sin (B' + v) \\ C + \omega &= C' & z' &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned}$$

Sind die Elemente auf den Aequator als Fundamentalebene bezogen, so gestaltet sich die Berechnung der Konstanten viel einfacher. Man wird in den obigen Ausdrücken $\varepsilon$ gleich Null setzen. Es findet sich dann nach einigen sehr leicht zu erhaltenden Transformationen:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} A_a &= -\operatorname{tg} \Omega' \cos i' & \sin a &= \frac{\cos \Omega'}{\sin A_a} \\ \operatorname{cotg} B_a &= \frac{\cos i'}{\operatorname{tg} \Omega'} & \sin b &= \frac{\sin \Omega'}{\sin B_a} \\ C_a &= 0 & \sin c &= \sin i' \end{aligned}$$

Man wird den Quadranten von $A_a$ und $B_a$ so bestimmen, dass $\sin a$ und $\sin b$ positiv werden, dann ist

$$\begin{aligned} A' &= A_a + \omega' & x' &= r \sin a \sin (A' + v) \\ B' &= B_b + \omega' & y' &= r \sin b \sin (B' + v) \\ C' &= \omega' & z' &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned}$$

Ich stelle nun die Formeln, die zur Berechnung der Aequatorkonstanten aus den Ekliptikalelementen dienen, übersichtlich zusammen:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \sin a \sin A & \sin i &= n \sin N \\ -\cos i \sin \Omega &= \sin a \cos A & \cos \Omega \cos i &= n \cos N \\ \cos \varepsilon \sin \Omega &= \sin b \sin B & \sin \varepsilon \sin \Omega &= \sin c \sin C \\ n \cos (N + \varepsilon) &= \sin b \cos B & n \sin (N + \varepsilon) &= \sin c \cos C \\ A + \omega &= A' & x' &= r \sin a \sin (A' + v) \\ B + \omega &= B' & y' &= r \sin b \sin (B' + v) \\ C + \omega &= C' & z' &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned}$$

als Probe kann berechnet werden:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

In der Regel wird es etwas bequemer sein, die obigen Ausdrücke in der folgenden Form zu berechnen, wobei nur darauf zu achten ist, dass die Quadranten, in denen $A$, $B$ und $C$ genommen werden, so gewählt werden, dass $\sin a$, $\sin b$ und $\sin c$ positiv werden; man wird dann rechnen dürfen nach

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\cos \Omega} = \operatorname{tg} N$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg} \Omega \cos i &= \operatorname{cotg} A & \sin a &= \frac{\cos \Omega}{\sin A} \\ \frac{\cos i \cos (N + \varepsilon)}{\operatorname{tg} \Omega \cos N \cos \varepsilon} &= \operatorname{cotg} B & \sin b &= \frac{\sin \Omega \cos \varepsilon}{\sin B} \\ \frac{\cos i \sin (N + \varepsilon)}{\operatorname{tg} \Omega \cos N \sin \varepsilon} &= \operatorname{cotg} C & \sin c &= \frac{\sin \Omega \sin \varepsilon}{\sin C} \end{aligned}$$

Es können aber auch diese Konstanten dadurch erhalten werden, dass man vorerst die ekliptikalen Elemente in äquatoreale verwandelt und dann nach den oben angedeuteten sehr einfachen Formeln die Aequatorkonstanten ermittelt. Man kann dieses Verfahren zur Controlle benutzen.

In dem Beispiele, welches ich unten bei der Bahnbestimmung aus drei Orten ausführe, finde ich die folgenden die Bahnlage des Planeten »Elpis« bestimmenden Elemente:

$$\pi = 18^\circ\, 35'\, 11''41 \quad , \quad \omega = 208^\circ\, 17'\, 20''73$$
$$\Omega = 170^\circ\, 17'\, 50''68 \quad , \quad i = 8^\circ\, 37'\, 46''24$$

Die Schiefe der Ekliptik ist: $\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 22''99$; darnach berechnete ich die Aequatorkonstanten wie folgt: (für $\log \frac{\cos i}{\operatorname{tg}\Omega \cos N}$ setze ich zur Abkürzung $f$)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\cos i$ | 9.995 0554 | $\cos(E+\varepsilon) : \cos\varepsilon =$ | 0.022 9982 | |
| $\operatorname{tg}\Omega$ | $9_n232$ 9444 | $\operatorname{cotg} B =$ | $0_n790$ 1967 | |
| $\operatorname{cotg} A$ | 9.227 9998 | $B =$ | $170^\circ\, 47'\, 31''28$ | |
| $A$ | $260^\circ\, 24'\, 18''71$ | $\sin B =$ | 9.204 1707 | |
| $\sin A$ | $9_n993$ 8818 | $\sin\Omega \cos\varepsilon =$ | 9.189 2287 | |
| $\cos\Omega$ | $9_n993$ 7429 | $\sin b =$ | 9.985 0580 | |
| $\sin a$ | 9.999 8611 | $\sin(E+\varepsilon) : \sin\varepsilon =$ | 9.804 5842 | |
| $\operatorname{tg} i$ | 9.181 1649 | $\operatorname{cotg} C =$ | $0_n571$ 7827 | |
| $\operatorname{tg} N$ | $9_n187$ 4220 | $C =$ | $164^\circ\, 59'\, 40''43$ | |
| $N$ | $-8^\circ\, 45'\, 10''13$ | $\sin C =$ | 9.413 1500 | |
| $N+\varepsilon$ | 14 42 12.86 | $\sin\Omega \sin\varepsilon =$ | 8.826 6259 | |
| $\cos(E+\varepsilon)$ | 9.985 5396 | $\sin c =$ | 9.413 4759 | |
| $\cos\varepsilon$ | 9.962 5414 | $C - B =$ | $-5^\circ\, 47'\, 50''85$ | Probe. |
| $\sin(E+\varepsilon)$ | 9.404 5228 | $\sin(C-B) =$ | $9_n004$ 3736 | Probe. |
| $\sin\varepsilon$ | 9.599 9386 | $\sin b \sin c =$ | 9.398 5339 | Probe. |
| $\cos i : \operatorname{tg}\Omega$ | $0_n762$ 1110 | $\cos A =$ | $9_n221$ 8817 | Probe. |
| $\cos\varepsilon$ | 9.994 9125 | $\sin a \cos A =$ | $9_n221$ 7428 | Probe. |
| $f$ | $0_n767$ 1985 | $\sin(C-B) \sin b \sin c =$ | $8_n402$ 9075 | Probe. |
| $\sin\Omega$ | 9.226 6873 | $\operatorname{tg} i =$ | 9.181 1647 | Probe. |

Es wird also

$$x' = r.\ \overline{9.999\ 8611}\ \sin(108^\circ\, 41'\, 39''44 + v)$$
$$y' = r.\ \overline{9.985\ 0580}\ \sin(\ 19\quad 4\quad 52.01 + v)$$
$$z' = r.\ \overline{9.413\ 4759}\ \sin(\ 13\quad 17\quad 1.16 + v)$$

Die Zahlen für $\sin a$, $\sin b$ und $\sin c$ habe ich überstrichen, um damit anzudeuten, dass statt der Zahlenwerthe die Logarithmen angesetzt sind.

Die eben angegebenen Formen können jedoch nach der Natur der Bahn auch zweckmässig abgeändert werden; findet nämlich die Bewegung in einer Parabel statt, so ist, wenn man mit $q$ den Perihelabstand bezeichnet, bekanntlich

$$r = q \sec^2 \tfrac{1}{2} v$$

man wird demnach in obigen Formeln einsetzen:

$$q \sin a = m$$
$$q \sin b = n$$
$$q \sin c = p$$

und dann erhalten:

$$x' = m \sin (A' + v) \sec^2 \tfrac{1}{2} v$$
$$y' = n \sin (B' + v) \sec^2 \tfrac{1}{2} v$$
$$z' = p \sin (C' + v) \sec^2 \tfrac{1}{2} v.$$

Ist die Bahn wenig vom Kreise verschieden (Planetenbahn) so wird man ebenfalls mit obigen Ausdrücken noch zweckmässige Transformationen durchführen. Es wird im zweiten Abschnitte gezeigt werden, dass zur Berechnung von $v$ ein Hilfswinkel $E$ nöthig ist, der die excentrische Anomalie genannt wird, und mit $v$ und $r$ durch die zwei folgenden Relationen verbunden ist:

$$r \sin v = a \sin E \cos \varphi$$
$$r \cos v = a \cos E - a \sin \varphi$$

$a$ und $\varphi$ sind Konstanten, deren Bedeutung ebenfalls im zweiten Abschnitte erörtert wird. Schreibt man zunächst für die Werthe der Coordinaten die aufgelöste Form hin, so wird erhalten:

$$x' = r \sin a \sin A' \cos v + r \sin a \cos A' \sin v$$
$$y' = r \sin b \sin B' \cos v + r \sin b \cos B' \sin v$$
$$z' = r \sin c \sin C' \cos v + r \sin c \cos C' \sin v$$

Ersetzt man die Werthe $r \sin v$ und $r \cos v$ durch die oben angedeuteten Relationen, so wird man erhalten, wenn man weiter einführt

$$a \sin a \sin A' = l \sin L \qquad a \sin b \sin B' = m \sin M$$
$$a \sin a \cos \varphi \cos A' = l \cos L \qquad a \sin b \cos \varphi \cos B' = m \cos M$$
$$- \sin \varphi \, l \sin L = \lambda \qquad - \sin \varphi \, m \sin M = \mu$$
$$a \sin c \sin C' = n \sin N$$
$$a \sin c \cos \varphi \cos C' = n \cos N$$
$$- \sin \varphi \, n \sin N = \nu$$

als neue Form für die rechtwinkligen Aequatorcoordinaten

$$x' = l \sin (E + L) + \lambda$$
$$y' = m \sin (E + M) + \mu$$
$$z' = n \sin (E + N) + \nu$$

welche Form bei der Berechnung einer Planetenephemeride sehr wesentliche Vortheile darbietet.

### b. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems wird geändert.

#### *α. Heliocentrischer und geocentrischer Ort.*

Die Himmelskörper projiciren sich von der Erde aus gesehen (geocentrischer Ort) auf einen anderen Punkt der Himmelskugel als dies von der Sonne aus geschieht; die Beobachtungen geben, wenn man vorläufig von kleinen Reduktionen (Parallaxe) absieht, geocentrische Orte, während die Theorie der Bewegung der Himmelskörper fast immer eine Rückkehr auf das Attraktionscentrum (heliocentrischer Ort) erfordert.

Bezeichnet man mit $X$, $Y$ und $Z$ die geocentrischen Coordinaten der Sonne, mit $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ die geocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers und endlich mit $x$, $y$ und $z$ die heliocentrischen Coordinaten desselben, so ist

$$\xi = x + X$$
$$\eta = y + Y$$
$$\zeta = z + Z.$$

Die Berechnungsart der Grössen $x, y, z, X, Y$ und $Z$ ist im vorausgehenden Kapitel angedeutet worden, es ist daher mit Hilfe der eben aufgestellten Relationen die Eruirung von $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ ermöglicht; will man sofort die geocentrischen polaren Coordinaten kennen, so wird sein, wenn mit $\varrho$ die geocentrische Entfernung bezeichnet wird, und unter der Voraussetzung äquatorealer Coordinaten:

$$\varrho \cos\alpha \cos\delta = x + X$$
$$\varrho \sin\alpha \cos\delta = y + Y$$
$$\varrho \sin\delta = z + Z.$$

Diese Form des Ueberganges auf geocentrische Coordinaten wird besonders bei der Ausführung von Ephemeriden Anwendung finden; bei ersten Bahnbestimmungen jedoch, wo fast ausschliesslich die Ekliptik als Fundamentalebene gewählt wird, werden etwas abgeänderte Formen mit Vortheil benutzt. Da die Breite der Sonne stets sehr klein ist, so kann dieselbe meist vernachlässigt werden; soll aber dieselbe mit in Rechnung gezogen werden, so werden weiter unten Methoden mitgetheilt werden, die eine strenge Eliminirung der Sonnenbreiten gestatten, so dass in aller Strenge dann $B = o$ gesetzt werden darf. Ich werde daher die $Z$-Coordinate der Sonne der Null gleich setzen. Bezeichnet man mit $l$, $b$ und $r$ die heliocentrische Länge, Breite und Entfernung (Radius vector) des Himmelskörpers, mit $L$ und $R$ die geocentrische Länge und Entfernung der Sonne (die Breite wird dem eben Angeführten gemäss der Null gleich angenommen), mit $\lambda$, $\beta$ und $\varrho$ die geocentrische Länge, Breite und Entfernung des Himmelskörpers, so wird, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten sofort die polaren hinschreibt:

$$\varrho \cos\lambda \cos\beta = r \cos l \cos b + R \cos L$$
$$\varrho \sin\lambda \cos\beta = r \sin l \cos b + R \sin L$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin b.$$

Diese Formeln können von Fall zu Fall wesentlich vereinfacht werden; zählt man die Längen von einem Punkte aus dessen Länge gleich $L$ angenommen wird, so erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\varrho \cos(\lambda - L) \cos\beta = r \cos(l - L) \cos b + R$$
$$\varrho \sin(\lambda - L) \cos\beta = r \sin(l - L) \cos b$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin b.$$

Wählt man als Ausgangspunkt die Länge $l$ so wird:

$$\varrho \cos(\lambda - l) \cos\beta = r \cos b + R \cos(L - l)$$
$$\varrho \sin(\lambda - l) \cos\beta = R \sin(L - l)$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin b.$$

Zählt man, wie diess beim Uebergang auf den heliocentrischen Ort vortheilhaft ist, alle Längen von $\lambda$ aus und setzt der geforderten Transformation entsprechend die Formeln um, so wird man haben:

$$r \cos(l-\lambda) \cos b = \varrho \cos\beta - R \cos(\lambda - L)$$
$$r \sin(l-\lambda) \cos b = R \sin(\lambda - L)$$
$$r \sin b = \varrho \sin\beta$$

Will man aus den Elementen direkt die geocentrische Länge, Breite und Entfernung des Himmelskörpers berechnen, so empfiehlt es sich alle Längen vom aufsteigenden Knoten ($\Omega$) der Bahn zu zählen; es findet sich dann zunächst

$$\varrho \cos(\lambda - \Omega) \cos\beta = r \cos(l - \Omega) \cos b + R \cos(L - \Omega)$$
$$\varrho \sin(\lambda - \Omega) \cos\beta = r \sin(l - \Omega) \cos b + R \sin(L - \Omega)$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin b$$

Ersetzt man nun die heliocentrischen Längen und Breiten durch das Argument der Breite und die Neigung der Bahn, so folgt vorerst aus dem in Betracht kommenden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke:

$$\cos u = \cos(l - \Omega) \cos b$$
$$\sin u \cos i = \sin(l - \Omega) \cos b$$
$$\sin u \sin i = \sin b.$$

und man erhält zur Anwendung die höchst bequeme Form

$$\varrho \cos(\lambda - \Omega) \cos\beta = r \cos u \quad + R \cos(L - \Omega)$$
$$\varrho \sin(\lambda - \Omega) \cos\beta = r \sin u \cos i + R \sin(L - \Omega)$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin u \sin i.$$

### $\beta$. *Parallaxe.*

Ein mit der eben vorgetragenen Transformation der Coordinaten sehr verwandtes ja identisches Problem ist das der Parallaxe, nur die Art der Ermittlung der durch den geänderten Standort bewirkten Verrückung des scheinbaren Ortes als Korrektionsgrösse verlangt eine etwas verschiedene Lösung der Aufgabe.

Die Beobachtungen werden an der Erdoberfläche erhalten, es ist aber für die meisten Berechnungen von Vortheil und in vielen Fällen geboten, die Reduktion auf den Erdmittelpunkt oder auf einen durch die Verhältnisse bestimmten Punkt (locus fictus) auszuführen; durch diese Verrückung des Anfangspunktes des Coordinatensystems entstehen Aenderungen in den beobachteten Coordinaten; den Unterschied der Richtungen, die eine vom Beobachter aus zum beobachteten Objekte gezogene Gerade mit einer solchen bildet, die dieses Objekt mit dem Erdmittelpunkte verbindet, bezeichnet man mit dem Namen der Parallaxe. Man kann auch die Parallaxe eines Himmelskörpers so definiren, dass man dieselbe als den scheinbaren Abstand des Beobachters und des Erdmittelpunktes vom Himmelskörper aus gesehen bezeichnet. In dem vorliegenden Kapitel ist aber diese Bezeichnung etwas weiter gefasst, indem die mit der Parallaxe verwandten Reductionen mit in dasselbe einbezogen werden.

Die zu berechnenden Reduktionen sind Funktionen der Erddimensionen und es ist nothwendig vorerst dieselben näher zu betrachten. Die Erde ähnelt, wie bekannt, nahezu einem Rotationsellipsoid, dessen kleine Achse durch die Pole der Erde hindurch gelegt ist. Ist $a$ die halbe grosse Achse, $b$ die halbe kleine Achse, so ist die Abplattung ($e$) der Erde bestimmt durch die Relation:

$$e = \frac{a - b}{a}$$

Die Grössen $a$ und $b$ müssen aus entsprechend angestellten Beobachtungen (Gradmessungen) abgeleitet werden. Bessel hat durch genaue Diskussion der vorhandenen Gradmessungen abgeleitet:

$a = 3272\,077.14$ Toisen $= 6377\,397.15$ Mètres
$b = 3261\,139.33$ » $= 6356\,078.96$ »

woraus sofort folgt

$$e = \frac{1}{299.153}$$

Bei Messungen auf der Erde mag allenfalls $a$ oder die oben angesetzten Längenmaasse (Toise, Mètres) oder andere verwandte Einheiten (Meilen, Klafter etc.) als Einheit genügen, bei astronomischen Berechnungen aber wird die Anwendung dieser Einheiten unbequem sein, und man hat sich dahin geeinigt, dass man, besonders sobald es sich um Entfernungen innerhalb des Sonnensystems handelt, die halbe grosse Achse der Erdbahn als Einheit einführt (über den eigentlich in Betracht kommenden Werth für diese Einheit vgl. den Abschnitt II, Kapitel I.). Es muss desshalb, soll der Uebergang von der einen Einheit auf die andere ausgeführt werden, das Verhältniss dieser bekannt sein, welches wieder nur durch Beobachtungen erlangt werden kann. Die Kleinheit der Erde im Verhältnisse zu ihrer Entfernung von der Sonne macht aber die Bestimmung sehr schwierig und es bedarf eigener Methoden, um genügende Resultate zu erlangen; die Auseinandersetzung derselben gehört aber nicht hierher und ich werde nur hier eine Zusammenstellung der durch die verschiedenen Methoden erlangten Resultate geben im Anschluss an eine Arbeit über diesen Gegenstand von S. Newcomb; bezeichnet man den Winkel unter dem der Aequatorhalbmesser der Erde von der Sonne in der Entfernung 1 gesehen erscheint, als Sonnenparallaxe ($\pi$) so wurde für diese Grösse erhalten:

1. Aus den Meridianbeobachtungen des Mars im Jahre 1862 nach dem Plane Winnecke's ausgeführt fand sich $\pi = 8''855 \pm 0''020$
2. Die Marsbeobachtungen desselben Jahres mit Hilfe von mikrometrischen Apparaten, die an Refractoren angebracht waren, ergaben $\pi = 8''842 \pm 0''040$
3. Durch die neue Diskussion des Venusdurchganges durch Powalky wird $\pi = 8''86 \pm 0''04$
4. Die parallaktische Ungleichheit des Monds gibt mit Rücksicht auf Einzelnwerthe, die Hansen, Stone und Newcomb gefunden haben, $\pi = 8''838 \pm 0''025$.

5. Aus der Mondgleichung der Erde, die nach vierzehnjährigen Greenwicher Beobachtungen, fünfjährigen Washingtoner Beobachtungen und Le-Verrier's Bestimmung abgeleitet ist, wird $\pi = 8''809 \pm 0''054$
6. Foucault's Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ergibt $\pi = 8''86 \pm ?$
Newcomb zieht aus diesen sechs Bestimmungen als wahrscheinlichsten Werth für die Sonnenparallaxe

$$\pi = 8''848 \pm 0''013$$

welcher Werth für $\pi$ in diesem Werke durchaus adoptirt ist. Die von Newcomb angesetzte Unsicherheit ist vielleicht in Wahrheit noch wesentlich grösser, doch ist jedenfalls der eben angesetzte Werth von $\pi$ gewiss nicht mehr wesentlich fehlerhaft, und jedenfalls der älteren Bestimmung (Encke's Bearbeitung der Venusdurchgänge) vorzuziehen.

Bezeichnet man mit $\varrho$ die Entfernung des Beobachtungspunktes vom Erdmittelpunkte, ferner mit $\theta$ und $\varphi'$ die geocentrische Rectascension und Deklination desselben, so sind die rechtwinkligen Aequatorcoordinaten dieses in Bezug auf den Erdmittelpunkt:

$$\xi = \varrho \cos\varphi' \cos\theta$$
$$\eta = \varrho \cos\varphi' \sin\theta$$
$$\zeta = \varrho \sin\varphi'$$

Es stellt sich vorerst die Aufgabe die Grössen $\varrho$, $\varphi'$ und $\theta$ aus den Daten der Beobachtung (Beobachtungsort und Zeitangabe) zu ermitteln. Ich nehme zuerst die Bestimmung der letzteren Grösse vor. $\theta$ ist offenbar mit der Zeit veränderlich, da sich im Verlaufe eines Tages die Erde um ihre Achse dreht, und zwar wird diese Umdrehung vollendet in Rücksicht auf ein festes Coordinatensystem in einem Sterntage. Die Rectascension des Beobachtungsortes wird für den Erdmittelpunkt $0^h$ sein, wenn mit dem Erdorte der Frühjahrspunkt kulminirt, es ist für diesen Augenblick für den Erdort ebenfalls $0^h$ Sternzeit. Kulminirt nun ein anderer Punkt, dessen Rectascension $\theta$ sein mag gleichzeitig mit dem Erdorte, so ist $\theta$ die Rectascension des Erdortes, aber auch gleichzeitig der Stundenwinkel des Frühjahrspunktes für diesen Ort, oder die Sternzeit. Es ist demnach $\theta$ identisch mit der Sternzeit des Ortes. Eine jede Beobachtung muss stets die Angabe enthalten, wann dieselbe angestellt ist; diese Zeitangabe ist gewöhnlich in mittlerer Zeit des Beobachtungsortes oder eines bestimmten anderen Meridians angegeben. Es stellt sich demnach vorerst die Aufgabe aus der mittleren Zeit die zugehörige Sternzeit zu berechnen. Mit Hilfe der Angaben der Ephemeriden wird diess leicht ausgeführt werden können; dieselben geben für jeden mittleren Mittag des Normalmeridians, für den das Jahrbuch berechnet ist, den Unterschied: Sternzeit — Mittlere Zeit, d. h. die Sternzeit im mittleren Mittag; kennt man die mittlere Zeit, die seit diesem mittleren Mittag des festen Meridians verflossen ist, und verwandelt diese in Sternzeit, so wird die Summe dieser Zeit und der Sternzeit im mittleren Mittag die gesuchte Sternzeit sein.

Ein in Sternzeit ausgedrücktes Zeitintervall kann leicht in mittlere Zeit umgewandelt werden, wenn man bedenkt, dass im Verlaufe eines tropischen Jahres genau ein Sterntag mehr sein muss, als in demselben mittlere Tage enthalten sind, nun ist

das tropische Jahr gleich 365.2422 mittlere Sonnentage, es sind also in demselben 366.2422 Sterntage enthalten; daraus ergeben sich zur gegenseitigen Transformation eines Intervalls Sternzeit ($J_*$) in ein Intervall mittlere Zeit ($J_\odot$) die Relationen:

$$J_* = \frac{366.2422}{365.2422} J_\odot = f J_\odot$$

und umgekehrt

$$J_\odot = \frac{365.2422}{366.2422} J_* = \frac{1}{f} J_*$$

wobei: $\log f = 0.001\,1874$

angenommen ist.

Zu dieser Umwandlung gewähren jedoch die vorhandenen Ephemeriden und Sammlungen astronomischer Tafeln sehr geeignete Hilfsmittel. Die bequemste Tafel findet sich in der Warnstorff'schen Sammlung, die mit dem Argumente mittlere Zeit sofort die Reduction auf Sternzeit angibt; man nennt diese Reduktion die Acceleration der Fixsterne; das Intervall des Argumentes ist in dieser Tafel so gewählt, dass die Reduktion in der Tafel von $0^s1$ zu $0^s1$ vorschreitet; ich habe einen Auszug dieser Tafel als Tafel III in das vorliegende Werk aufgenommen, mich aber begnügt, die Reduktion von Sekunde zu Sekunde vorschreiten zu lassen, da bei Parallaxenrechnungen die Abkürzung der Zeit auf volle Sekunden völlig gestattet ist. Die Anwendung dieser Tafel ist einfach genug. Will man zu einem gegebenen Zeitintervall mittlere Zeit das zugehörige Sternzeitintervall finden auf volle Sekunden genau, so geht man mit dem Argumente mittlere Zeit in die Tafel III ein und nimmt zu dem der gegebenen mittleren Zeit zunächst liegenden Argumente die Reduktion, die man zu dem gegebenen Zeitintervall addirt. Es sei zu verwandeln $16^h\,57^m\,4^s$ mittlere Zeit in das entsprechende Sternzeitintervall; die Tafel III gibt mit dem Argumente: $16^h\,56^m\,36^s$ (das zunächst liegende Argument) die Reduktion $+\,2^m\,47^s$. Die Rechnung stellt sich also so:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $16^h$ | $57^m$ | $4^s$ | mittlere Zeit |
| Acc. | + | 2 | 47 | |
| | 16 | 59 | 51 | Sternzeit. |

Wollte man alles genau haben so müsste man durch lineare Interpolation den genauen Werth der Acceleration ermitteln; in diesem Falle ist aber die in diesem Werke aufgenommene Tafel nicht bequem, es würde für das gewählte Beispiel sein durch Interpolation

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $16^h$ | $57^m$ | $4^s00$ | mittlere Zeit |
| Acc. | + | 2 | 47.08 | |
| | 16 | 59 | 51.08 | Sternzeit. |

Hat man sich auf die angegebene Weise die seit dem mittleren Mittag verflossene Sternzeit aus der entsprechenden Angabe der mittleren Zeit verschafft, so hat man einfach diesen gefundenen Werth zur Sternzeit, die im mittleren Mittag statt hat zu addiren und erhält so die gesuchte Sternzeit. Der geforderte Werth Sternzeit - Mittlere Zeit im mittleren Mittag jedoch findet sich in den Ephemeriden nur für gewisse Meridiane so z. B. im englischen Nautical almanac für Greenwich, im Berliner Jahrbuch für Berlin etc; für andere Meridiane muss aus den Angaben der Ephemeriden erst der

verlangte Werth berechnet werden. Von einem mittleren Mittag bis zum nächsten, also in einem mittleren Tag eilt die Sternzeit der mittleren Zeit um $3^m\ 56^s\ 555$ Sternzeit voran; nun tritt für einen beliebigen Meridian der mittlere Mittag um den Längenunterschied $l$ (früher bei östlicher, später bei westlicher Länge), der östlich negativ, westlich positiv gezählt wird, verändert ein, drückt man diesen Längenunterschied in Einheiten der Stunde aus, so ist die Korrektion (in Zeitsekunden), die man an die Angabe des Jahrbuches für die Sternzeit des mittleren Mittages anzubringen hat, bestimmt durch:

$$\text{Corr:} = \frac{236^s555}{24}\, l = 9^s8565\, l.$$

So liegt z. B. die Sternwarte Wien-Josefstadt, $11^m\ 50^s0$ östlich von Berlin und $1^h\ 5^m\ 25^s5$ östlich von Greenwich; es ist demnach die Korrektion die man an die Angaben der Jahrbücher anzubringen hat

für das Berl. Jahrbuch — $1^s94$
» den Nautical alm. — $10^s75$.

Ich werde nun ein Beispiel durchführen. Es sei die Sternzeit zu suchen für:

| | | |
|---|---|---|
| | 1867 Oct. 1. | $11^h\ 26^m\ 29^s80$ mittlere Zeit Josefstadt. |
| | Tafel III + | 1 52.77 |
| Berl. Jahrbuch — $1^s94$ | | 12 38 49.15 |
| | | $0^h\ 7^m\ 11.72$ Sternzeit Josefstadt. |

Auf diese Weise ist es nicht schwierig das verlangte $\theta$ zu berechnen, wenn die Zeitangabe der Beobachtung gemacht ist; doch kann man auch auf eine etwas andere Weise, die in vielen Fällen noch bequemer ist, diese Transformation vornehmen. Häufig ist es nöthig, dass die Ortszeit ohnediess auf einen bestimmten Meridian, der in einem Jahrbuche als massgebend angenommen ist, übertragen wird. Man addirt zur Ortszeit die Angabe des Jahrbuches für den Mittag des Normalmeridians, berechnet aber die Acceleration der Fixsterne nicht für die Ortszeit, sondern für die auf den Normalmeridian übertragene Ortszeit. Die Richtigkeit dieser Regel ergibt sich leicht aus dem Vorstehenden oder wenn man berücksichtigt, dass die Differenz der mittleren und Sternzeiten für zwei verschiedene Orte gleich dem Längenunterschiede ist, wie diess ebenfalls auch für die Differenz der wahren Zeiten gilt. Es ist im obigen Beispiel

$11^h\ 26^m\ 29^s80$ mittl. Zeit Josefst. $= 11^h\ 14^m\ 39^s8$ mittl. Zeit Berlin.
+ 1 50.83 (Acc. für Berliner Zeit)
12 38 51.09 (Berliner Jahrbuch für $0^h$ Berliner Zeit)
0 7 11.72 Sternzeit Josefstadt.

Dieses letztere Verfahren wird besonders dann mit Vortheil gebraucht, wenn man Beobachtungen mit einer für den Normalmeridian gerechneten Ephemeride vergleichen will.

Nach dem bisher Vorgetragenen wird man auch die Regeln ableiten können für das umgekehrte Verfahren nämlich zu einer gegebenen Sternzeit die mittlere zu finden. Die Lösung dieser Aufgabe wird auch bei Bahnbestimmungen bisweilen in Betracht kommen. Manche Beobachter theilen die Meridianbeobachtungen ohne Angabe der

Beobachtungszeit mit. Da die Beobachtungen, wie dies vorausgesetzt, Meridianbeobachtungen sind, so ist die angesetzte Rectascension unmittelbar die Sternzeit der Beobachtung. Will man dieselbe in mittlere Ortszeit verwandeln, so wird man zunächst durch Addition des Längenunterschieds die Sternzeit des Normalmeridians ermitteln; subtrahirt man hiervon die für den mittleren Mittag geltende Sternzeit so erhält man die seit dem Mittag verflossene Zeit in Sternzeit ausgedrückt; die Tafel IV gibt mit diesem Argumente die Reduktion dieses Zeitintervalles auf mittlere Zeit in derselben Anordnung wie Tafel III. Subtrahirt man diese Reduktion nebst der für $0^h$ mittlere Zeit des Normalmeridians geltenden Sternzeit des Beobachtungsdatums von der beobachteten Rectascension, so hat man unmittelbar die Beobachtungszeit in mittlerer Ortszeit. Es sei die Rectascension des Planeten Eunomia am Meridianinstrumente zu Bonn beobachtet: 1866. Jan. 1. $5^h\,53^m\,0^s32 = 6^h\,18^m\,11^s32$ Berl. Sternzeit. Man hat als Argument da nach dem Berliner Jahrbuche für 1866 Jan. 1. die Sternzeit im mittleren Mittag ist: $18^h\,43^m\,29^s45$, den Werth. $11^h\,34^m\,42^s$; es ist demnach:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 5^h\ 53^m\ \ 0^s32 \\ \text{Tafel IV} = & -\ \ \ 1\ \ 53\ 81 \\ \text{Stern-Zeit 1. Jan.} = & -\ 18\ \ 43\ \ 29\ 45 \\ \hline & 11^h\ \ 7^m\ 37^s06 \text{ m. Zeit. Bonn.} \end{array}$$

Hat man den Werth $9^s8565\ l$ berechnet, der für Bonn, da $l = + 25^m\ 11^s0$ ist, $+ 4^s14$ gefunden wird, so wird man wenn mehrere derartige Verwandlungen auszuführen sind, bequemer so verfahren, dass man sich mit Hilfe dieser Quantität die Sternzeit für den mittleren Mittag für Bonn berechnet. Das Verfahren erläutert sich durch die Durchführung des eben gewählten Beispieles nach dieser zweiten Methode:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 5^h\ 53^m\ \ 0^s32 \\ \text{Berl. Jahrb. } \frac{1}{1}1866 + 4^s14 = & 18\ \ 43\ \ 33^s59 \\ \text{Sternzeit seit } 0^h = & 11^h\ \ 9^m\ 26^s73 \\ \text{Tafel IV} = & -\ \ \ 1\ \ 49.67 \\ \hline \text{mitt. Zeit Bonn} = & 11^h\ \ 7^m\ 37^s06 \end{array}$$

Die zur Berechnung der Coordinaten des Beobachtungsortes nothwendige Grösse $\theta$ kann demnach als bekannt vorausgesetzt werden; es kann nun an die Ermittlung der Grössen $\varrho$ und $\varphi'$ geschritten werden, die Functionen des Beobachtungsortes sind, und da die Erde als regelmässiges Rotationsellipsoid betrachtet werden kann, so sind die Grössen nur Funktionen der Polhöhe oder der geographischen Breite.

Wäre die Erde eine Kugel, so würde $\varrho$ stets gleich dem Aequatorealhalbmesser sein, der für die folgenden Untersuchungen als Einheit angenommen wird, und $\varphi'$ (die geocentrische Polhöhe) würde mit der Polhöhe $\varphi$ zusammenfallen, indem die Polhöhe eines Beobachtungsortes identisch ist mit dem Winkel den das Loth mit der Aequatorebene bildet. Die allerdings geringe Abplattung aber veranlasst, dass $\varrho$ immer kleiner wird je grösser die Polhöhe wird und dass das Loth nicht gegen das Erdcentrum gerichtet ist. Es stellt sich demnach die Aufgabe $\varrho$ und $\varphi'$ als Funktionen von $\varphi$ darzustellen. Denkt man sich eine Ebene gelegt durch die Erdachse so wird der Durchschnitt

dieser Ebene mit der Erdoberfläche einen Meridian bilden; legt man nun in diese Ebene ein Coordinatensystem so dass der Anfangspunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt, die X-Achse nach dem Aequator, die positive Y-Achse nach dem Nordpol gerichtet ist, so wird auf dieser Ebene der Durchschnitt mit der Erdoberfläche als Ellipse erscheinen, $\varphi'$ wird der Winkel sein, den die Verbindungslinie: Erdmittelpunkt-Beobachtungsort ($\varrho$) mit der X-Achse einschliesst, $\varphi$ ist der Winkel den die Normale der Abscissenachse bildet. Bezeichnet man die Coordinaten des Beobachtungsortes durch $x$ und $y$ so wird sein

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dx}{dy}$$

Aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen die für die Ellipse gelten wird man $\varphi'$ als Funktionen von $\varphi$ darstellen können. Die Gleichung der Ellipse gibt wenn man mit $a$ und $b$ die grosse und kleine Halbachse bezeichnet:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Durch Differentiation nach $x$ und $y$ wird zunächst

$$b^2 x dx + a^2 y dy = 0$$

oder

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{dx}{dy}$$

Mit Rücksicht auf die oben angesetzten Relationen für $\varphi$ und $\varphi'$ wird sofort

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}\varphi$$

wodurch $\varphi'$ als Funktion von $\varphi$ dargestellt ist. Um nun $\varphi$ ebenfalls als Funktion von $\varphi$ darzustellen wird man zuerst setzen

$$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

oder durch Einführung der Relation:

$$y = x \operatorname{tg}\varphi'$$

wird

$$\frac{x^2}{\cos\varphi'^2} = \varrho^2$$

führt man dieselbe Relation zwischen $y$ und $x$ in der Gleichung für die Ellipse ein, so wird:

$$x^2 \left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}\varphi'^2 \right\} = a^2$$

Für diese Gleichung kann man aber setzen

$$x^2 \{ 1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi' \} = a^2$$

Eliminirt man nun aus dieser Gleichung in Verbindung mit dem für $\varrho^2$ gefundenen Werth $x^2$ so wird

$$\varrho = a \sqrt{\frac{\sec^2\varphi'}{(1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi')}} = a \sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi' \cos(\varphi' - \varphi)}}$$

Wiewol die Bestimmung von $\varphi'$ und $\varrho$ sehr einfach geschieht, so ist es doch oft von Vortheil, da der Unterschied $(\varphi' - \varphi)$ niemals gross werden kann und ebenso $\varrho$ nur um ein Geringes von der Einheit verschieden sein kann, zur Bestimmung von $\varphi'$ und $\varrho$ nach $\varphi$ Reihen zu entwickeln, die die eben angeführten Unterschiede unmittelbar angeben. Setzt man zu diesem Ende

$$\frac{b^2}{a^2} = n$$

so ist

$$\operatorname{tg}\varphi' = n \operatorname{tg}\varphi = (n-1)\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(\varphi'-\varphi)}{\cos\varphi\cos\varphi'} = (n-1)\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Man hat also

$$\sin(\varphi'-\varphi) = (n-1)\sin\varphi\cos\varphi'$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke für

$$\cos\varphi' = \cos\{(\varphi'-\varphi)+\varphi\}$$

bestimmt daraus $\operatorname{tg}(\varphi'-\varphi)$ so wird

$$\operatorname{tg}(\varphi'-\varphi) = \frac{(n-1)\sin 2\varphi}{2[1+(n-1)\sin\varphi^2]} = \frac{(n-1)\sin 2\varphi}{(1+n)-(n-1)\cos 2\varphi}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{n-1}{n+1} = m$$

und entwickelt nun mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $m$ so ergibt sich leicht

$$\operatorname{tg}(\varphi'-\varphi) = m\sin 2\varphi\{1 + m\cos 2\varphi + m^2\cos 2\varphi^2 + m^3\cos 2\varphi^3 \ldots\}$$

Es ist aber

$$\varphi'-\varphi = \operatorname{tg}(\varphi'-\varphi) - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3(\varphi'-\varphi) + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5(\varphi'-\varphi) - \ldots$$

substituirt man in diese letztere Reihe die eben gefundene Reihe für $\operatorname{tg}(\varphi'-\varphi)$ und bedenkt dass

$$\sin 2\varphi\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi$$

$$\sin 2\varphi\cos 2\varphi^2 - \tfrac{1}{3}\sin 2\varphi^3 = \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi$$

u. s. w. ist, so findet sich

$$\varphi'-\varphi = m\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}m^2\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}m^3\sin 6\varphi + \tfrac{1}{4}m^4\sin 8\varphi + \ldots$$

Ermittelt man mit Hilfe der oben angesetzten **Bessel**'schen Konstanten für die Erddimensionen die numerischen Werthe dieser Coefficienten so erhält man

$$\varphi'-\varphi = -11'\,30''65\sin 2\varphi + 1''16\sin 4\varphi - \ldots$$

Die übrigen Glieder werden unmerklich, indem der Coefficient von $\sin 6\varphi$ nur $-0''003$ beträgt.

Um ebenfalls für $\varrho$ geeignete Formeln zu gewinnen bedenke man, dass sobald $a = 1$ gesetzt wird die für $\varrho$ zuerst angesetzte Form sich schreiben lässt

$$\varrho = \sqrt{\frac{\sec\varphi'}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi'}} = \sqrt{\frac{1}{\cos\varphi'^2 + \sin\varphi'^2\frac{a^2}{b^2}}}$$

Setzt man

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + f^2$$

so wird sofort

$$\varrho = (1 + f^2\sin\varphi'^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}f^2\sin\varphi'^2 + \tfrac{3}{8}f^4\sin\varphi'^4 - \tfrac{5}{16}f^6\sin\varphi'^6 + \ldots$$

Da aber gewohnlich die Kenntniss des briggischen Logarithmus von $\varrho$ wünschenswerther ist, so wird man, wenn mit $M$ der Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnet wird, zu dieser Transformation die bekannte Reihe

$$\log\varrho = M\{(\varrho-1) - \tfrac{1}{2}(\varrho-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\varrho-1)^3 - \ldots\}$$

benutzen und die folgende höchst elegante Reihe erhalten

$$\log \varrho = M\,[-\tfrac{1}{2}f^2 \sin^2 \varphi' + \tfrac{1}{4}f^4 \sin^4 \varphi' - \tfrac{1}{6}f^6 \sin^6 \varphi' + \ldots]$$

Die numerische Substitution lässt nach den Bessel'schen Erddimensionen finden

$$\log \varrho = -\,0.001\;4590.6 \sin \varphi'^2 + 0.000\;0049.0 \sin \varphi'^4 - 0.000\;0000.2 \sin \varphi'^6$$

Diese Reihe lässt sich leicht in eine solche verwandeln die nach den Cosinus der geraden Vielfachen von $\varphi'$ geordnet erscheint. Für die vorliegenden Zwecke ist es aber geeigneter, Reihen zu haben die Funktionen von $\varphi$ sind, obwol durch diese Substitution die Convergenz vermindert wird. Es ist

$$\sin \varphi'^2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi'^2}{1 + \operatorname{tg} \varphi'^2} = \frac{n^2 \sin \varphi^2}{\cos \varphi^2 + n^2 \sin \varphi^2}$$

oder wenn man substituirt

$$n^2 = \frac{b^4}{a^4} = 1 - g^2$$

und entwickelt:

$$\sin \varphi'^2 = n^2 \sin \varphi^2 + n^2 g^2 \sin \varphi^4 + n^2 g^4 \sin \varphi^6 + n^2 g^6 \sin \varphi^8 + \ldots$$

so kann man die früher gegebene Reihe in eine nach geraden Potenzen von $\sin \varphi$ geordnete Reihe umsetzen. Der direkte Weg ist aber kürzer und eleganter.

Es war gefunden worden

$$\varrho^2 = \frac{\sec^2 \varphi'}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{1 + \frac{b^4}{a^4} \operatorname{tg} \varphi^2}{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi^2} = \frac{\cos \varphi^2 + \frac{b^4}{a^4} \sin \varphi^2}{\cos \varphi^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi^2}$$

Setzt man also

$$\frac{b^4}{a^4} = 1 - g^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - h^2$$

so wird

$$\varrho^2 = \frac{1 - g^2 \sin \varphi^2}{1 - h^2 \sin \varphi^2}$$

oder

$$2 \log \varrho = \log (1 - g^2 \sin \varphi^2) - \log (1 - h^2 \sin \varphi^2)$$

oder durch Einführung der logarithmischen Reihe

$$\log \varrho = M\,[\tfrac{1}{2} \sin \varphi^2 (h^2 - g^2) + \tfrac{1}{4} \sin \varphi^4 (h^4 - g^4) + \tfrac{1}{6} \sin \varphi^6 (h^6 - g^6) + \ldots]$$

Die numerische Substitution in diese elegante Reihe lässt finden

$$\log \varrho = -\,0.001\;4396.5 \sin \varphi^2 - 0.000\;0143.8 \sin \varphi^4 - 0.000\;0001.5 \sin \varphi^6 - \ldots$$

Durch die Vergleichung dieser Reihe mit der früher gefundenen wird man leicht bemerken, dass die Convergenz wesentlich abgenommen hat. Will man nun statt $\sin \varphi^2$, $\sin \varphi^4$ u. s. w. $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w. einführen, so erinnere man sich, dass ist

$$\sin \varphi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\sin \varphi^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi + \tfrac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\sin \varphi^6 = \tfrac{5}{16} - \tfrac{15}{32} \cos 2\varphi + \tfrac{3}{16} \cos 4\varphi - \tfrac{1}{32} \cos 6\varphi$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Setzt man zunächst statt der obigen Reihe für $\log \varrho$ zur Abkürzung

$$\log \varrho = \alpha \sin \varphi^2 + \beta \sin \varphi^4 + \gamma \sin \varphi^6 + \ldots$$

so wird die [illegible]

$$[illegible]$$

oder mit Einführung der numerischen Werthe und Weglassung der [illegible] Decimale

$$[illegible]$$

Die letzteren Zahlen gilt der dem Jahre [illegible] in dem Verzeichnisse der Sternwarten für jede derselben die geocentrische Breite $\varphi'$ und $\log \varrho$.

Die vorausgehenden Entwicklungen haben die Möglichkeit gegeben mit Hilfe der Angaben der Beobachtung die Coordinaten des Beobachtungsortes zu finden, und es kann nun an die Lösung der eigentlichen Aufgabe geschritten werden, die jedoch in zwei wesentlich verschiedenen Formen durchgeführt werden muss, je nachdem die Entfernung des Gestirnes von der Erde bekannt, mindestens näherungsweise, oder völlig unbekannt ist. Ist die Entfernung des Gestirnes bekannt, so ist es am zweckmässigsten die Beobachtung selbst vom Einflusse der Parallaxe zu befreien, d. h. dieselbe auf das Erdcentrum zu reduciren. Da die Beobachtungen fast stets sich auf den Aequator als Fundamentalebene beziehen, so dürfte es für den vorliegenden Zweck hinreichend sein, nur den Einfluss der Parallaxe in Rectascension und Declination abzuleiten und auch hier nur die ersten Potenzen der Aenderungen mitzunehmen, da die Parallaxe nur bei solchen Himmelskörpern in Betracht kommt, die innerhalb der Attractionssphäre der Erde sich befinden, also nur kleine Werthe erreichen kann. Sind $\alpha$, $\delta$ und $\Delta$ die geocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers, $\alpha'$, $\delta'$ und $\Delta'$ dieselben Coordinaten aber in Bezug auf den Beobachtungsort, so erhält man durch die Transformation der Coordinaten unmittelbar

$$\Delta' \cos \delta' \cos \alpha' = \Delta \cos \delta \cos \alpha - \varrho \cos \varphi' \cos \theta$$
$$\Delta' \cos \delta' \sin \alpha' = \Delta \cos \delta \sin \alpha - \varrho \cos \varphi' \sin \theta$$
$$\Delta' \sin \delta' = \Delta \sin \delta - \varrho \sin \varphi'$$

Bei diesen Formeln ist zu beachten, dass $\varrho$, $\Delta$ und $\Delta'$ in derselben Einheit auszudrücken sind. Betrachtet man der oben angeführten Voraussetzung gemäss $\varrho$ als eine kleine Grösse erster Ordnung im Verhältnisse zu $\Delta$ und $\Delta'$, und demnach ebenfalls die Unterschiede $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ und $\Delta' - \Delta$ als solche, so wird man setzen können

$$-\varrho \cos \varphi' \cos \theta = dx$$
$$-\varrho \cos \varphi' \sin \theta = dy$$
$$-\varrho \sin \varphi' = dz$$

durch Differentiation der Ausdrücke:

$$x = \Delta \cos \delta \cos \alpha$$
$$y = \Delta \cos \delta \sin \alpha$$
$$z = \Delta \sin \delta$$

wird erhalten:

$$dx = -\Delta \cos \delta \sin \alpha \, d\alpha - \Delta \cos \alpha \sin \delta \, d\delta + \cos \delta \cos \alpha \, d\Delta$$
$$dy = \Delta \cos \delta \cos \alpha \, d\alpha - \Delta \sin \alpha \sin \delta \, d\delta + \cos \delta \sin \alpha \, d\Delta$$
$$dz = \Delta \cos \delta \, d\delta + \sin \delta \, d\Delta$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit: $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ so wird sofort nach Addition derselben

$$d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\delta}\frac{dx}{\Delta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}\frac{dy}{\Delta}.$$

Multiplicirt man die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ und addirt, so wird:

$$\cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy = \cos\delta\, d\Delta - \Delta\sin\delta\, d\delta \quad .$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $-\sin\delta$ und addirt hierzu den für $dz$ gegebenen Werth, nachdem derselbe mit $\cos\delta$ multiplicirt wurde, so wird man bekommen:

$$d\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\Delta}dx - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\Delta}dy + \frac{\cos\delta}{\Delta}dz.$$

Für manche Zwecke ist die Kenntniss von $d\Delta$ wünschenswerth, den Ausdruck hierfür wird man leicht aus den zwei Gleichungen erhalten, die zur Bestimmung von $d\delta$ gedient haben, wenn man die eine statt mit $-\sin\delta$ mit $\cos\delta$, die mit $\cos\delta$ multiplicirte aber mit $\sin\delta$ multiplicirt und addirt. Es findet sich dann

$$d\Delta = \cos\alpha\cos\delta\, dx + \sin\alpha\cos\delta\, dy + \sin\delta\, dz.$$

Setzt man nun für $dx$, $dy$ und $dz$ in diesen Ausdrücken die zuerst erhaltenen Werthe ein und setzt, um $\varrho$ in Einheiten der Erdbahnhalbachse auszudrücken, für dasselbe $\varrho\pi$ ($\pi$ die Sonnenparallaxe), und schreibt ausserdem:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha,\; d\delta = \delta' - \delta,\; dx = \Delta' - \Delta$$

so werden die Korrektionen, die an die Beobachtung anzubringen sind, um dieselben auf den Erdmittelpunkt zu beziehen

$$\alpha - \alpha' = \frac{\pi\varrho\cos\varphi'}{\Delta}\,\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\delta}$$

$$\delta - \delta' = \frac{\pi\varrho}{\Delta}\left[-\sin\delta\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha) + \cos\delta\sin\varphi'\right]$$

$$\Delta - \Delta' = \pi\varrho\left[\cos\delta\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha) + \sin\delta\sin\varphi'\right]$$

Die Kenntniss von $\Delta - \Delta'$ wird in den seltensten Fällen in Betracht kommen, und die Berechnung desselben wird wol stets weggelassen werden können, da aber dieser Werth später unten bei der Berechnung des locus fictus nach Schönfeld's Methode nöthig ist, so habe ich die Entwicklung desselben mit aufgenommen. Die eben mitgetheilten Formeln eignen sich in dieser Form sehr, um die Berechnung der Parallaxe durch Tafeln, die für jede Sternwarte gesondert berechnet werden müssen zu erleichtern, ohne dass man den Tafeln einen übermässig grossen Umfang geben müsste. Berechnet man für eine gegebene Sternwarte den Ausdruck $\pi\varrho\sin\varphi = D_2$ und bringt mit dem Argumente: Stundenwinkel die Werthe

$$A = \pi\varrho\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha)$$

$$D_1 = -\pi\varrho\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha)$$

in eine Tafel, so berechnet sich die Korrection für Parallaxe nach der Form

$$\alpha - \alpha' = \frac{A}{\Delta\cos\delta}$$

$$\delta - \delta' = \frac{D_1}{\Delta}\sin\delta + \frac{D_2}{\Delta}\cos\delta$$

wollte man auch die Korrektion der Distanz kennen, so würde für diesen Fall sein:

$$\Delta - \Delta' = -D_1\cos\delta + D_2\sin\delta.$$

Man wird leicht bemerken, dass man für $A$ und $D_1$ dieselbe Tafel benutzen kann, da sich dieselben nur dadurch unterscheiden, dass das Argument von $D_1$ um $-90^\circ$ von dem für $A$ verschieden ist.

Stehen aber keine derartigen Hilfstafeln zu Gebote, so wird man zweckmässig die oben angesetzten Formeln durch Einführung eines Hilfswinkels zur Rechnung bequemer zu Recht legen. Setzt man

$$\sin\varphi' = g\sin\gamma$$
$$\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha) = g\cos\gamma$$

so wird, da

$$g = \frac{\sin\varphi'}{\sin\gamma}$$

ist, die Berechnung der Korrection für Parallaxe durch die folgenden Formeln bewerkstelligt werden können:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos(\theta-\alpha)}$$
$$\alpha - \alpha' = \frac{\pi\varrho\cos\varphi'}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\delta}$$
$$\delta - \delta' = \frac{\pi\varrho\sin\varphi'}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma}$$
$$\Delta - \Delta' = \pi\varrho\sin\varphi'\cdot\frac{(\cos\gamma-\delta)}{\sin\gamma}\sin 1''$$

Ich werde nun ein Beispiel vollständig durchführen. Der Komet III 1862 wurde in Clinton am 31. Juli 1862 wie folgt beobachtet:

1862 Juli 31. $11^h\,26^m\,24^s4$ mittl. Zt. Clinton $\alpha = 5^h\,55^m\,11^s12$, $\delta = +73^\circ\,10'\,6''7$.

Es war für diese Zeit: $\log\Delta = 0.0237$. — Die Konstanten des Beobachtungsortes sind:

| | |
|---|---|
| $l = 5^h\,55^m\,12^s1$ westl. von Berlin | $\log\operatorname{tg}\varphi' = 9.9676$ |
| $\varphi' = 42^\circ\,51'8$ | $\log\frac{\pi\varrho\cos\varphi'}{15} = 9.6351 = \log A$ |
| $\log\varrho = 9.9993$ | $\log\pi\varrho\sin\varphi' = 0.7788 = \log D$ |

Zunächst ermittle ich die Sternzeit und den Stundenwinkel nach

| | | | |
|---|---|---|---|
| mittl. Zt.: | $11^h\,26^m\,24^s$ | $\theta$ | $= 20^h\,4^m\,31^s$ |
| Acc. für $17^h\,21^m\,6$ | $+\;2\;\;51$ | $\theta-\alpha$ | $= 14\;\;9\;\;20$ |
| Sternzt. Juli 31.0: | $8\;\;35\;\;16$ | $\theta-\alpha$ | $= 212^\circ\,20'0$ |

Die weitere Rechnung stellt sich nun so:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta-\alpha)$ | $9_n9268$ | $\sin(\theta-\alpha)$ | $9_n7282$ | $\sin(\gamma-\delta)$ | 9.9337 |
| $\operatorname{tg}\gamma$ | $0_n0408$ | $A\sin(\theta-\alpha)$ | $9_n3633$ | $D\sin(\gamma-\delta)$ | 0.7125 |
| $\gamma$ | $132^\circ\,18'8$ | $\cos\delta$ | 9.4618 | $\sin\gamma$ | 9.8689 |
| $\gamma-\delta$ | 59 8.7 | $\log(P_\alpha\times\Delta)$ | $9_n9015$ | $\log(P_\delta\times\Delta)$ | 0.8436 |
| | | $d\alpha$ | $-0^s755$ | $d\delta$ | $+6''61$ |

Die Beobachtung, reducirt auf den Erdmittelpunkt ist demnach

$$\alpha = 5^h\,55^m\,10^s37 \qquad \delta = +73^\circ\,10'\,13''3$$

Die Berechnung von $d\Delta$ habe ich als nicht nöthig übergangen. —

Bei Meridianbeobachtungen, wo der Stundenwinkel $(\theta-\alpha)$ gleich $0^\circ$ oder $180^\circ$ wird, je nachdem die obere oder untere Kulmination stattfindet, wird die Berechnung

der Parallaxe höchst einfach. Die oben für die Parallaxe aufgestellten Formeln werden für die

obere Culmination

$$\alpha - \alpha' = 0$$

$$\delta - \delta' = \frac{\pi\varrho}{\varDelta} \sin(\varphi' - \delta)$$

$$\varDelta - \varDelta' = \pi\varrho \cos(\varphi' - \delta) \sin 1''$$

untere Culmination

$$\alpha - \alpha' = 0$$

$$\delta - \delta' = \frac{\pi\varrho}{\varDelta} \sin(\varphi' + \delta)$$

$$\varDelta - \varDelta' = -\pi\varrho \cos(\varphi' + \delta) \sin 1''$$

Wesentlich anders muss das Problem behandelt werden, wenn die Distanz des Himmelskörpers von der Erde nicht bekannt ist, wie dies bei ersten Bahnbestimmungen der Fall ist; man kann nun nicht mehr die Beobachtung für Parallaxe korrigiren, sondern man muss den Erdort, der aus den Ephemeriden entlehnt wird und der für den Mittelpunkt gilt, entsprechend dem Beobachtungsorte ändern, da aber in der Regel die Sonnenorte der Rechnung zu Grunde gelegt werden, so werde ich die Formeln unmittelbar so stellen, dass man den Sonnenort entsprechend dem Standpunkte des Beobachters verbessert. Wird der Aequator als Fundamentalebene gewählt, was allerdings bei ersten Bahnbestimmungen selten mit Vortheil geschieht, so wird man am besten das folgende Verfahren einschlagen. Man entlehnt die auf ein bestimmtes Aequinoktium bezogenen Längen, Breiten und Entfernungen der Sonne aus der Ephemeride und berechnet auf die früher (pag. 15) gezeigte Weise die rechtwinkligen Coordinaten, sind dieselben $X$, $Y$, $Z$, so sind die Coordinaten des Sonnenmittelpunktes in Bezug auf den Beobachtungsort

$$X - \xi$$
$$Y - \eta$$
$$Z - \zeta.$$

Bezeichnet man die für Parallaxe korrigirte Rectascension, Deklination und Entfernung der Sonne mit $A_0$, $D_0$ und $R_0$ so wird sein

$$R_0 \cos A_0 \cos D_0 = R \cos L - \pi\varrho \cos\varphi' \cos\theta \sin 1''$$
$$R_0 \sin A_0 \cos D_0 = R \sin L \cos\varepsilon - 19.3\, B'' - \pi\varrho \cos\varphi' \sin\theta \sin 1''$$
$$R_0 \sin D_0 = R \sin L \sin\varepsilon + 44.5\, B'' - \pi\varrho \sin\varphi' \sin 1''.$$

Bei ersten Bahnbestimmungen wählt man jedoch meistens mit Vortheil die Ekliptik als Fundamentalebene, hauptsächlich aus dem Grunde, da die Erde nur unbedeutende Abweichungen aus dieser Ebene macht, und daher die auf die Fundamentalebene senkrechte Coordinate wegen ihrer Kleinheit entweder ganz fortgelassen werden kann oder durch Anbringung von kleinen Korrektionen leicht in voller Strenge berücksichtigt wird. Die Genauigkeit der jetzigen Beobachtungen, besonders der der Planeten, werden es gerechtfertigt erscheinen lassen, die aus der Berücksichtigung der Sonnenbreiten entstehenden Correctionen mitzunehmen, um so mehr, da durch das folgende von Gauss in Vorschlag gebrachte Verfahren mit Leichtigkeit die Sonnen-

breiten mit der Parallaxe vereinigt aus der Rechnung fortgeschafft werden können, wenn nicht zufällig die Breite des beobachteten Objektes der Null gleich ist. Gauss führt nämlich statt des Beobachtungsortes einen anderen Ort, den locus fictus, ein, den er dadurch bestimmt, dass die Sehlinie (die Verbindungslinie zwischen Beobachter und Himmelskörper) an dieser Stelle in die Ekliptik einschneidet. Wie man sieht ist die Breite dieses locus fictus der Bestimmung gemäss gleich null, und der Himmelskörper projicirt sich vom locus fictus und dem Beobachtungsorte aus auf dieselbe Stelle der Himmelskugel. Da das Licht eine bestimmte Zeit braucht, um vom Beobachtungsorte zum locus fictus zu gelangen, so wird dem entsprechend eine Korrektion an die Zeit der Beobachtung angebracht werden müssen, wenn man die Beobachtung auf den neuen Ort überträgt, worüber das Nöthige weiter unten beigebracht werden soll.

Die Fundamentalebene ist nun die Ekliptik und es müssen die geocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes auf dasselbe Coordinatensystem bezogen werden. Da man $\theta$ als geocentrische Rectascension und $\varphi'$ als Deklination des Beobachtungsortes mit vollem Rechte auffassen kann, so wird man einfach diese Coordinaten in Länge und Breite nach den bekannten Vorschriften umsetzen. Da diese Berechnung mit kleinen vier- bis fünfstelligen Tafeln durchgeführt werden kann, so wird man am zweckmässigsten hierzu benutzen

$$m \sin M = \sin \varphi'$$
$$m \cos M = \cos \varphi' \sin \theta$$
$$\cos b \cos l = \cos \varphi' \cos \theta$$
$$\cos b \sin l = m \cos (M - \varepsilon)$$
$$\sin b = m \sin (M - \varepsilon)$$

in welchen Formeln $l$ und $b$ nun die geocentrische Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes (Nonagesimus) ist; $\varrho$ bleibt natürlich ungeändert. Nennt man $L_0$, $B$ und $R_0$ die geocentrischen Coordinaten der Sonne, $L$ und $R$ die Coordinaten der Sonne vom locus fictus aus gezählt, und sind $\lambda$ und $\beta$ die beobachteten Längen und Breiten, $\Delta_0$ die Entfernung des Beobachters vom Himmelskörper, $\Delta$ dieselbe Entfernung aber vom locus fictus aus, so sind die heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten des locus fictus:

$$-R \cos L$$
$$-R \sin L.$$

Die heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten des Erdcentrums

$$-R_0 \cos L_0 \cos B$$
$$-R_0 \sin L_0 \cos B$$
$$-R_0 \sin B.$$

Die geocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes

$$\varrho \cos l \cos b$$
$$\varrho \sin l \cos b$$
$$\varrho \sin b$$

wozu aber bemerkt werden muss, dass $\varrho$, sobald dasselbe in Einheiten des Aequatorhalbmessers der Erde ausgedrückt wird, mit $\sin \pi$ multiplicirt werden muss, um die

Coordinaten homogen zu machen. Endlich sind die Coordinaten des Beobachtungsortes vom locus fictus aus

$$(\varDelta - \varDelta_0) \cos\lambda \cos\beta$$
$$(\varDelta - \varDelta_0) \sin\lambda \cos\beta$$
$$(\varDelta - \varDelta_0) \sin\beta.$$

Zwischen diesen Coordinaten bestehen aber die Relationen

$$-R\cos L = -(\varDelta - \varDelta_0)\cos\lambda\cos\beta - R_0\cos L_0\cos B + \varrho\sin\pi\cos l\cos b$$
$$-R\sin L = -(\varDelta - \varDelta_0)\sin\lambda\cos\beta - R_0\sin L_0\cos B + \varrho\sin\pi\sin l\cos b$$
$$0 = -(\varDelta - \varDelta_0)\sin\beta - R_0\sin B + \varrho\sin\pi\sin b$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin L_0$, die zweite mit $-\cos L_0$, ferner die erste mit $-\cos L_0$ und die zweite mit $-\sin L_0$ und addirt, so erhält man nachdem für $(\varDelta - \varDelta_0)$ der Werth aus der dritten Gleichung substituirt wird, sofort:

$$R\sin(L - L_0) = \frac{R_0\sin B}{\operatorname{tg}\beta}\sin(L_0 - \lambda) + \varrho\sin\pi\left[\cos b\sin(L_0 - l) - \frac{\sin b}{\operatorname{tg}\beta}\sin(L_0 - \lambda)\right]$$
$$R\cos(L - L_0) = R_0\cos B - \frac{R_0\sin B}{\operatorname{tg}\beta}\cos(L_0 - \lambda) - \varrho\sin\pi\left[\cos b\cos(L_0 - l) - \frac{\sin b}{\operatorname{tg}\beta}\cos(L_0 - \lambda)\right]$$

Aus welchen Gleichungen $R$ und $(L - L_0)$ bestimmt werden kann. Bei der Kleinheit der Bögen die hier in Betracht kommen, wird es genügen, überall nur die ersten Potenzen der kleinen Grössen mitzunehmen, und es wird so

$$L = L_0 + \frac{\sin(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left[B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b\right] + \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos b\sin(L_0 - l)$$
$$R = R_0 - R_0\frac{\cos(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left[B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b\right] - \varrho\pi\cos b\cos(L_0 - l)$$

Da es aber in der Regel bequemer ist vorerst $R$ nicht in Einheiten des Bogenmasses sondern in Einheiten des Radius auszudrücken und ferner die Kenntniss von $d\log R_0$ wünschenswerther ist, da $\log R_0$ aus den Ephemeriden unmittelbar entnommen wird, so erhält man mit Hilfe der auf pag. 28 angegebenen logarithmischen Reihe wenn man setzt

$$\frac{R}{R_0} = 1 - m$$

zunächst

$$\log\frac{R}{R_0} = M\left[-m - \tfrac{1}{2}m^2 - \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots\right]$$

oder wenn man bei den ersten Potenzen stehen bleibt und den oben für $m$ gefundenen Werth substituirt

$$\log R = \log R_0 - M\left\{\frac{\cos(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left[B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b\right] + \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos b\cos(L_0 - l)\right\}$$

wobei zu setzen ist

$$\log M = 1.32336$$

wenn man die Korrektion des briggischen Logarithmus von $R_0$ in Einheiten der siebenten Decimale finden will.

Es erübrigt nur noch die Zeit zu bestimmen welche das Licht braucht, um vom Beobachtungsorte zum locus fictus zu gelangen. Aus der dritten Gleichung findet man mit Berücksichtigung der ersten Potenzen

$$\varDelta - \varDelta_0 = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b - B\right]\sin 1''$$

Da das Licht 497.83 Zeitsekunden braucht um die Entfernung 1 zu durcheilen, so wird die Korrektion der Beobachtungszeit

$$dt = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b - B\right] 497^s 83 \sin 1''$$

will man diese Korrektion in Einheiten der fünften Decimale des mittleren Sonnentages haben so wird anzunehmen sein

$$dt = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b - B\right] C$$

$$\log C = 7.44614 - 10.$$

Die zur Berechnung des locus fictus nöthigen Formeln sind übersichtlich zusammengestellt:

$$L = L_0 + \frac{\sin(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left[B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b\right] + \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos b \sin(L_0 - l)$$

$$\log R = \log R_0 - M\left\{\frac{\cos(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\left[B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b\right] + \frac{\varrho\pi}{R_0}\cos b \cos(L_0 - l)\right\}$$

$$dt = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b - B\right] C.$$

$$\log M = 1.32336$$

$$\log C = 7.44614 - 10.$$

Als Beispiel wähle ich die Berechnung des locus fictus für die erste Elpis-Beobachtung, welche bei der weiter unten folgenden Bahnbestimmung aus 3 Orten benutzt wird. Die Grundlage der Rechnung bildeten die folgenden Werthe:

| mittl. Zeit Josefstadt | | mittl. Zeit Berlin |
|---|---|---|
| 1868. Mai 18. $10^h 33^m 9^s$ | = | Mai 18.431470 |
| $\lambda = 258^\circ 58'5$ | $\beta = +12^\circ 48'3$ | |
| $L_0 = 58^\circ 9' 2''10$ | $B = -0''36$ | $\log R_0 = 0.005\,2850$ |
| $\theta = 215^\circ 7'5$ | $\varphi' = 48^\circ 1'5$ | $\log\varrho\pi = 0.9460$ |

Die Bestimmung der Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes gab:

$$l = 185^\circ 57' \qquad b = 56^\circ 38'$$

Es fand sich weiter:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log\frac{\varrho\pi}{R_0}$ | 0.9407 | $\sin(L_0 - \lambda)$ | 9.5508 | $L_0 - l$ | $232^\circ 12'0$ |
| $\sin b$ | 9.9217 | $\operatorname{cotg}\beta$ | 0.6434 | $\sin(L_0 - l)$ | $9_n8977$ |
| $\cos b$ | 9.7404 | $\cos(L_0 - \lambda)$ | $9_n9706$ | $\cos(L_0 - l)$ | $9_n7874$ |
| $\frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b$ | $+7''285$ | $\log dL_I$ | $1_n0776$ | $\log dL_{II}$ | $0_n5788$ |
| $B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b$ | $-7''645$ | $dL_I$ | $-11''957$ | $dL_{II}$ | $-3''792$ |
| $\log B - \frac{\varrho\pi}{R_0}\sin b$ | $0_n8834$ | $\log d\log R_I$ | $2_n8208$ | $\log d\log R_{II}$ | 1.7919 |
| $\log\frac{\varrho\pi}{R_0}\cos b$ | 0.6811 | $d\log R_I$ | $-661.9$ | $d\log R_{II}$ | $+61.9$ |
| $(L_0 - \lambda)$ | $159^\circ 10'5$ | $\Delta L_0$ | $-15''75$ | $\Delta\log R_0$ | $-600$ |

Für die Correction der Zeit war:

| | |
|---|---|
| $\operatorname{cosec}\beta$ | 0.654 |
| $\log\frac{dt}{C}$ | 1.543 |
| $dt$ | $+0.1$ |

also praktisch ohne Bedeutung.

Man hat dem zu Folge anzuwenden:

$$T = 18.43\ 1471$$
$$L = 58^\circ\ 8'\ 46''35$$
$$\log R = 0.005\ 2250$$

Schliesslich bemerke ich, dass Schönfeld in No. 1357 der Astr. Nachrichten Tafeln gegeben hat, womit man die leicht zu berechnende Parallaxe der Sonne in Rectascension und Deklination mit geringer Mühe in solche für Länge und Breite umsetzen kann, und mit Benutzung dieser Tafel soll die Berechnung des locus fictus durchgeführt werden. Dieses Verfahren ist aber weder kürzer noch bequemer, als das eben Vorgetragene, wovon sich jedermann bei einer vergleichenden Anwendung überzeugen kann. Die Rechnung gestaltet sich beiläufig so. Zuerst wird man den Stundenwinkel der Sonne zu berechnen haben, da aber dieser gleich ist der wahren Sonnenzeit, so wird man denselben erhalten, wenn man von der gegebenen Ortszeit die Zeitgleichung (Mittlere Zeit — wahre Zeit) subtrahirt. Nennt man $T$ die so erhaltene wahre Sonnenzeit und entlehnt aus den Ephemeriden ausser der eben benutzten Zeitgleichung den genäherten Werth der Sonnendeklination ($D$), so stellt sich die Berechnung zunächst so:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos T}$$
$$dA = -\frac{\pi\varrho\cos\varphi'}{R}\,\frac{\sin T}{\cos D}$$
$$dD = -\frac{\pi\varrho\sin\varphi'}{R}\,\frac{\sin(\gamma - D)}{\sin\gamma}$$
$$dR = -\pi\varrho\sin\varphi'\,\frac{\cos(\gamma - D)}{\sin\gamma}\,\sin 1''$$

oder anstatt der letzten Gleichung

$$d\log R = -N\left\{\frac{\pi\varrho\sin\varphi'}{R}\,\frac{\sin(\gamma - D)}{\sin\gamma}\right\}$$
$$lg\,N = 1.32336$$

indem dann die Korrektion von $\log R$ in Einheiten der siebenten Decimale erhalten wird. Die Schönfeld'sche Tafel gibt nun die folgenden in Klammern eingeschlossenen Werthe der Differentialquotienten mit dem Argumente: Länge der Sonne, die zur Uebertragung von $dA$ und $dD$ in $dL$ und $dB$ nöthig sind und leicht durch Differentiation der auf pag. 13 gegebenen Ausdrücke erlangt werden, wenn man nach der Differentiation $B = 0$ setzt. Es ist

$$dL = \{\cos\varepsilon\}\,dA + \left\{\frac{\sin\varepsilon\cos\odot}{\cos D}\right\}dD$$
$$dB = \{-\sin\varepsilon\cos\odot\}\,dA + \left\{\frac{\cos\varepsilon}{\cos D}\right\}dD.$$

Die für Parallaxe korrigirten Werthe von $L$, $B$ und $R$ bedürfen aber noch einer weiteren Korrection, wenn man $B$ aus der Rechnuug fortschaffen will. Die hierfür nöthigen Formeln wird man leicht erhalten, wenn man in den Gauss'schen Formeln für den locus fictus $\varrho = 0$ setzt. Es ist dann

$$dL_2 = \frac{\sin(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\,B$$
$$d\log R_2 = -M\frac{\cos(L_0 - \lambda)}{\operatorname{tg}\beta}\,B$$

wo für $B$ die für Parallaxe korrigirte Breite einzusetzen ist.

## Anhang.

Ein mit der Parallaxen-Korrektion sehr verwandtes Problem ist dasjenige, welches sich bei Bahnbestimmungen häufig darbietet, nämlich die Wegschaffung der Sonnenbreiten aus der Rechnung, wenn die Distanzen ($\Delta$) genähert bekannt sind; wie diess auf eine strenge Weise geschieht ohne Kenntniss des Abstands ist eben gezeigt worden. Nenne ich, wie früher, die Sonnenbreite $B$, so ist der vertikale Abstand des Erdmittelpunktes von der Ekliptik: $-R\sin B$; betrachtet man diesen Abstand als eine kleine Grösse erster Ordnung, so wird sofort die Aenderung der beobachteten Breite:

$$d\beta = -\frac{RB}{\Delta}\cos\beta,$$

die Länge bleibt natürlich ungeändert. Da $R$ stets hinlänglich wenig von der Einheit verschieden ist, so kann mit genügender Genauigkeit die Reduktion der beobachteten Breite berechnet werden nach:

$$d\beta = -\frac{\cos\beta}{\Delta} B.$$

Man wird ohne Schwierigkeit bemerken, dass die Aenderung der Distanz immer so unbedeutend wird, dass daraus ein merkbarer Einfluss auf die Beobachtungszeit nicht entstehen kann.

## II. Abschnitt. Die Coordinaten in ihrem Verhältniss zur Zeit.

### 1. Kepler's Gesetze.

Die bisherigen Erfahrungen lehren, dass jeder Körper im Raume eine Fernwirkung auf einen anderen ausübt und dass sich die Fernwirkung als eine Anziehung äussert. Nach Newton's Hypothese über das Mass dieser Kraft, die den Erscheinungen völlig genügt, wirkt dieselbe proportional der Masse des Körpers, und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Es soll nicht untersucht werden, in wie weit diese Annahme über das Bild der Kraft berechtigt ist, ich führe nur hier an, dass diese Voraussetzungen selbst bei den genauesten Untersuchungen sich als völlig stichhaltig erproben; es ist demnach das Resultat der Wirkung mindestens der Hauptsache nach richtig erfasst.

Das Problem der Bahnbestimmung muss demnach vorerst davon ausgehen, die Gesetze abzuleiten, die sich für die Bewegung der Himmelskörper aus dem Newton'schen Attraktionsgesetze ergeben und es soll die Untersuchung vorläufig auf den einfachsten Fall, auf das Problem zweier Körper beschränkt werden, welche Einschränkung in der Praxis bei ersten Bahnbestimmungen gestattet ist in Rücksicht auf die Massenvertheilung in unserem Sonnensysteme; ferner können die Körper als materielle Punkte betrachtet werden wegen der nahen sphärischen Gestalt.

Da die zu lösende Aufgabe dem Sonnensysteme entnommen ist, so kann man, um ein Mass für die in Betracht kommenden Kräfte einzuführen, als Einheit die Wirkung der Sonne einführen, die als wesentlich positive Grösse durch $k^2$ bezeichnet werden soll, und da das Mass der Kraft bestimmt ist durch die Wirkung derselben in einer gewissen Zeit und erstere auch eine Funktion der Entfernung ist, so muss bestimmt werden, zu welcher Entfernung die Wirkung in der Zeiteinheit gehört. Man hat sich geeinigt unter $k^2$ die Wirkung der Sonne zu verstehen, die sie im Verlaufe der Zeiteinheit (mittlerer Sonnentag) in der Entfernung 1 (die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne) ausübt. Ueber die Bestimmung dieser Grösse aus den Beobachtungen und über die hierbei zu berücksichtigenden Voraussetzungen wird das Nöthige weiter unten folgen.

Es seien zwei Körper im Raume, der eine sei die Sonne, deren Masse der Einheit gleich gesetzt wird, der zweite Körper habe die Masse $m$ in derselben Einheit ausgedrückt; bei den Verhältnissen, wie dieselben im Sonnensysteme vorgefunden werden,

wird $m$ stets eine sehr kleine Grösse sein. Legt man nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem in den Sonnenmittelpunkt und bezeichnet die Entfernung der zwei Körper mit $r$, so ist, wenn $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des zweiten Körpers sind

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und die Einwirkung der Sonne auf den Himmelskörper nach Newton's Gesetze:

$$\frac{k^2}{r^2}$$

Der Himmelskörper wirkt vermöge seiner Masse $m$ ebenfalls auf die Sonne ein; da die Wirkung der Masse proportional ist, so ist das Mass dieser Kraft:

$$\frac{k^2}{r^2} m$$

also die Gesammtkraft mit der sich beide Körper zu nähern bestreben:

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{k^2}{r^2} (1 + m)$$

in welchem Ausdruck der Kürze wegen für $k^2 (1 + m)$ der Werth $\mu$ gesetzt ist. Zerlegt man nun diese Gesammtkraft in die Componenten parallel zu den Coordinatenachsen und bezeichnet diese Componenten mit $X$, $Y$ und $Z$, ferner die Winkel zwischen der Verbindungslinie $(r)$ und den Achsen beziehungsweise mit $(xr)$, $(yr)$ und $(zr)$, so findet sich sofort, da die Coordinaten durch die Kraft vermindert werden

$$X = -\frac{\mu}{r^2} \cos (xr)$$

$$Y = -\frac{\mu}{r^2} \cos (yr)$$

$$Z = -\frac{\mu}{r^2} \cos (zr)$$

Es ist aber offenbar

$$\cos (xr) = \frac{x}{r}$$

$$\cos (yr) = \frac{y}{r}$$

$$\cos (zr) = \frac{z}{r}$$

woraus sich ergibt für die Kräfte

$$X = -\mu \frac{x}{r^3}$$

$$Y = -\mu \frac{y}{r^3}$$

$$Z = -\mu \frac{z}{r^3}$$

und welche Kräfte nun dem zweiten Differential nach der Zeit gleich gesetzt werden können. Man hat demnach die folgenden drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3}\mu = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3}\mu = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3}\mu = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es sind drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorhanden, also sechs willkührliche Konstanten, die von dem Orte und der Geschwindigkeit des Himmelskörpers abhängig sind und durch die Beobachtung bestimmt werden müssen für die speciellen Fälle. Zwei Integrationskonstanten werden sich sehr leicht finden lassen. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $y$, die zweite mit $x$ und zieht die erste von der zweiten ab, so wird, wenn man ähnlich mit den übrigen Gleichungen verfährt, erhalten:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Es ist hierbei wesentlich zu bemerken, dass nun die dritte Gleichung keine neue Bedingung einführt und unmittelbar aus den beiden ersten Gleichungen erhalten werden kann, wenn man die erste mit $\frac{z}{x}$, die zweite mit $\frac{y}{x}$ multiplicirt und addirt. Für die eben angesetzten Gleichungen kann aber geschrieben werden:

$$d\left\{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right\} = 0$$

$$d\left\{z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right\} = 0$$

$$d\left\{y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right\} = 0$$

und die Integration lässt finden

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c_1 \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= c_2 \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= c_3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $z$, die zweite mit $y$, die dritte mit $x$ und addirt, so wird:

$$c_1 z + c_2 y + c_3 x = 0 \qquad (3)$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Da in diesen Gleichungen $\frac{\mu}{r^2}$ eliminirt erscheint, so ist die Eigenschaft allen Centralbewegungen eigen, und man leitet daraus das Gesetz ab: die von einem Himmelskörper des Sonnensystems beschriebene Bahn liegt in einer Ebene, die durch den Sonnenmittelpunkt hindurchgeht.

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Gleichung (3) eigentlich nur zwei unabhängige Konstanten enthält, welche die Bahnlage bestimmen; diese drei Konstanten sind Funktionen der beiden Grössen: Knoten ($\Omega$) und Neigung ($i$).

Da die Bewegung in einer Ebene statt hat, die durch den Sonnenmittelpunkt geht, so wird es für die weiteren Untersuchungen zweckmässig sein, das Coordinatensystem so zu legen, dass die Bahnebene mit der $xy$-Ebene identisch wird. Es wird dem zu Folge:

$$z = 0 = \frac{dz}{dt}$$

und die drei Gleichungen in (2) reduciren sich auf die einzige

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

oder

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck lässt ebenfalls eine wichtige Folgerung zu, da bekanntlich der eben angesetzte Ausdruck das doppelte Differential des Sector's ist. — Es wird also:

$$2\,d\,(\text{Sect}) = c\,dt$$

oder integrirt

$$2\,\text{Sect} = ct. \qquad (5)$$

Die Integrationskonstante ist in diesem Falle offenbar der Null gleich. Man leitet aus (5) den höchst wichtigen Satz ab: Für denselben Himmelskörper sind die durch die Radienvectoren überstrichenen Sektoren proportional den Zeiten, in denen dieselben beschrieben wurden. Dieses Gesetz ist, da wie schon früher hervorgehoben wurde der Ausdruck $\frac{\mu}{r^3}$ eliminirt ist, ebenfalls allen Centralbewegungen eigen.

Für die Bestimmung der vier weiteren Integrationskonstanten muss ein anderer Weg eingeschlagen werden. Kehrt man zu den Gleichungen (1) zurück, wählt aber als $xy$-Ebene die Bahnebene so sind diese:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3}\mu = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3}\mu = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Für die weiteren Untersuchungen wird es nöthig sein die Polarcoordinaten einzuführen und es soll mit dieser Transformation auch eine Integration ausgeführt werden. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (6) mit $2\,dx$, die zweite mit $2\,dy$ und addirt, so wird:

$$2\left\{dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \frac{2\mu}{r^3}\{x\,dx + y\,dy\} = 0$$

Es ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r\,dr = x\,dx + y\,dy$$

demnach kann auch geschrieben werden

$$\frac{d\{dx^2 + dy^2\}}{dt^2} + \frac{2\mu}{r^2}\,dr = 0$$

oder integrirt und wenn man mit $h$ die Integrationskonstante bezeichnet

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + h = 0. \qquad (7)$$

Erhebt man die Gleichung (4) auf's Quadrat, so wird zunächst:

$$\frac{x^2\,dy^2 + y^2\,dx^2}{dt^2} - \frac{2\,xy\,dx\,dy}{dt^2} = c^2$$

oder umgesetzt

$$(x^2 + y^2)\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{dt^2} = c^2$$

$$r^2\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2.$$

Eliminirt man nun aus der so eben abgeleiteten Form und aus (7) den Werth: $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ so findet sich

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - h - \frac{c}{r^2}$$

oder

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2\mu r - hr^2 - c^2}} \qquad (8)$$

Es ist nun $dr$ von $dt$ abhängig gemacht, um aber die Kurve der Bewegung zu ermitteln, muss das Abhängigkeitsverhältniss von $dr$ und $dv$ bekannt sein; es ist aber

$$d\,(\text{Sect}) = \tfrac{1}{2} r^2\,dv$$

oder mit Rücksicht auf

$$2\,d\,(\text{Sect}) = c\,dt$$

wird erhalten

$$dt = \frac{r^2}{c}\,dv \qquad (9)$$

Aus dieser Gleichung fliesst die Bemerkung, dass die heliocentrische Winkelbewegung ein und desselben Himmelskörpers umgekehrt proportional dem Quadrate des Radiusvectors ist. Aus (8) und (9) folgt:

$$dv = \frac{c\,dr}{r\sqrt{2\mu r - hr^2 - c^2}} \qquad (10)$$

Führt man nun statt der bislang gebrauchten Konstanten neue ein, indem man substituirt

$$\frac{\mu}{h} = a \qquad\qquad \frac{c^2}{h} = a^2\,(1 - e^2)$$

so wird

$$h = \frac{\mu}{a} \qquad\qquad c = \sqrt{\mu}\,\sqrt{a\,(1 - e^2)} \qquad (11)$$

demnach verwandelt sich (10) in

$$dv = \frac{\sqrt{a\,(1 - e^2)}\,dr}{r\sqrt{2r - \frac{r^2}{a} - a\,(1 - e^2)}}$$

Man wird bemerken, dass $\mu$ nun eliminirt erscheint, demnach hat die absolute Kraft der Wirkung auf die Gattung der Kurve keinen Einfluss. Der letztere Ausdruck kann leicht auf die Form

$$-\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

gebracht werden; die Integration nach dieser Transformation unterliegt keiner weiteren Schwierigkeit, wenn man sich erinnert, dass ist:

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc}\cos x + \omega$$

Man wird zur Erreichung dieser Form zunächst bilden

$$dv = \frac{\frac{a\,(1 - e^2)}{e}\,dr}{r\sqrt{2r\,\frac{a\,(1 - e^2)}{e^2} - \frac{r^2\,(1 - e^2)}{e^2} - \frac{a^2\,(1 - e^2)^2}{e^2}}}$$

woraus gefunden wird

$$dv = \frac{\frac{a(1-e^2)}{er^2}\,dr}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{a(1-e^2)}{r}-1}{e}\right)^2}}$$

Setzt man also:

$$\frac{\frac{a(1-e^2)}{r}-1}{e} = x$$

so ist:

$$dx = -\frac{a(1-e^2)}{er^2}\,dr$$

und demnach

$$v = \text{arc cos}\left(\frac{\frac{a(1-e^2)}{r}-1}{e}\right) + \omega$$

oder umgesetzt

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)} \qquad (12)$$

Zählt man die wahren Anomalien ($v$) von dem Punkte aus, in welchem der Himmelskörper der Sonne am nächsten steht (Perihel), so wird $\omega = 0$. Die Gleichung (12) repräsentirt dann die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Brennpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt; $a$ ist die halbe grosse Achse, $e$ die Excentricität, die Bewegung findet daher in einer Kegelschnittslinie statt, deren Brennpunkt mit dem Sonnenmittelpunkte identisch ist.

Die oben mit (7) bezeichnete Gleichung ergibt eine interessante Relation zwischen der Geschwindigkeit und der Entfernung von der Sonne einerseits und der Form des Kegelschnittes andererseits. Bezeichnet man mit $g$ die Geschwindigkeit so erhält man aus der Gleichung (7), da

$$g^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$$

die Relation

$$g = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - h}$$

Es ist aber nach dem Obigen

$$h = \frac{\mu}{a}$$

demnach, da $a$ positiv für die Ellipse, unendlich für die Parabel und negativ für die Hyperbel ist, die Bahn eine

Ellipse wenn $g < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$

Parabel » $g = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$

Hyperbel » $g > \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$

Die Relation für die Parabel wird bei der Berechnung der Bahn einer Sternschnuppe nöthig werden.

Die bislang ermittelten Ausdrücke haben noch nicht die Verbindung zwischen der Bewegung und der Zeit hinreichend scharf hervortreten lassen, indem $dt$ eliminirt wurde. Die Gleichung (9) wird aber diese Verbindung finden lassen mit Rücksicht auf den Ausdruck (11). Bedenkt man, dass, wenn mit $p$ der Parameter bezeichnet wird,

$$p = a\,(1 - e^2)$$

ist, so wird nach (11)

$$c = \sqrt{\mu p}$$

und demnach verwandelt sich die Gleichung (9), wenn man für $\mu$ seinen Werth $k^2\,(1 + m)$ wieder einführt, in:

$$r^2 dv = k\,\sqrt{p\,(1 + m)}\,dt \qquad (13)$$

und die Integration ergibt, wenn man bedenkt dass die Integrationskonstante mit der Zeit verschwindet

$$\int r^2 dv = kt\,\sqrt{p\,(1 + m)} \qquad (14)$$

Diese Gleichung gibt ein Hilfsmittel an die Hand, die Bewegung mit der Zeit zu verbinden, doch muss die angezeigte Integration für die verschiedenen Kegelschnitte verschieden durchgeführt werden; sie ermöglicht aber auch die Bestimmung der Konstante $k$. Es ist nämlich:

$$r^2 dv = 2\,d\,(\text{Sect})$$

daher auch

$$k = \frac{2\,(\text{Sect})}{t\,\sqrt{p\,(1 + m)}}$$

Nimmt man für $t$ die Zeit eines Umlaufes in einer elliptischen Bahn, so ist anstatt des Sectors die Fläche der Ellipse zu setzen. Es wird also sein:

$$k = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{t\,\sqrt{1 + m}}$$

Die Werthe rechts vom Gleichheitszeichen lassen sich für eine gegebene Planetenbahn mit grosser Schärfe bestimmen; da die Bewegung der Erde am genauesten untersucht ist, so liegt es nahe die Daten derselben zu entlehnen. Gauss hat angenommen

$$t = 365.256\,3835 \text{ mittl. Sonnentage}$$

$$m = \frac{1}{354710}$$

$$a = 1$$

und findet zehnstellig

$$\log 2\pi = 0.798\,179\,8684$$

$$\text{compl. } \log t = 7.437\,402\,1852$$

$$\text{compl. } \log \sqrt{1 + m} = 9.999\,999\,3878$$

$$\log k = 8.235\,581\,4414$$

$$k = 0.017\,202\,0989\,5$$

oder wenn man $k$ im Bogenmasse ausdrückt so wird

$$\log k = 3.550\,006\,5746.$$

Die von Gauss angenommenen Werthe sind aber nach neueren Untersuchungen keineswegs ganz richtig, und es würde, wenn man die Annahme

$$a = 1$$

beibehält, der Werth für $k$ eine Abänderung erfahren müssen; dass würde aber manche

Unbequemlichkeit nach sich ziehen und man hat es desshalb vorgezogen die Gauss'sche Konstante unverändert beizubehalten, aber den Erdbahnhalbmesser dem entsprechend abzuändern. So wird nach Le-Verrier zu setzen sein für die Erdbahn

$$a = 1.000\,00129$$

um sich den neueren Bestimmungen für $m$ und $t$ anzuschliessen. (Vergleiche die auf pag. 22 gemachte Bemerkung.)

Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so lassen sich dieselben dem Wesen nach in die vier folgenden Punkte zusammenfassen:

1. Die Bewegung des Himmelskörpers findet in einer Ebene statt, die durch den Sonnenmittelpunkt geht.
2. Die von dem Körper beschriebene Kurve ist ein Kegelschnitt, der seinen Brennpunkt im Mittelpunkte der Sonne hat.
3. Die Bewegung in diesem Kegelschnitte ist so beschaffen, dass die in verschiedenen Zeitabschnitten von den Radienvektoren beschriebenen Flächenräume diesen Zeitabschnitten proportional sind. Das Verhältniss dieser Flächenräume zur Zeit ist demnach ein konstantes.
4. Für die verschiedenen um die Sonne sich bewegenden Körper steht das Quadrat des in 3. erwähnten Quotienten $\left[\left(r^2 \frac{dv}{dt}\right)^2\right]$ im zusammengesetzten Verhältnisse der den Bahnen zugehörigen Parameter und der Summe der Sonnenmasse und der Masse des Himmelskörpers.

Diese Gesetze sind in ihren Hauptzügen zuerst von Kepler erkannt worden.

## 2. Die Relationen zwischen dem Orte in der Bahn und der Zeit.

Um den Ort des Planeten mit der Zeit zu verbinden, ist die Integration der auf pag. 45 gegebenen Gleichung (14) durchzuführen. Es ist aber diese Integration wesentlich von der Form des Kegelschnittes abhängig und muss für die Ellipse, Parabel und Hyperbel gesondert durchgeführt werden. Letzteren Kegelschnitt werde ich aber nicht speciell betrachten, indem die für denselben geltenden allgemeinen Methoden wol niemals im Sonnensysteme Anwendung finden werden und demnach nur der Fall in Betracht kommt, in dem die Bahn wenig von der Parabel verschieden ist; die letzteren Bahnformen bedürfen aber eigenthümliche Methoden und es wird desshalb nöthig sein in einer dritten Abtheilung dieselben besonders zu behandeln.

### a. Ellipse.

Bestimmt man den Hilfswinkel $E$ nach

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \qquad (1)$$

so ist

$$1 + e\cos v = \sin^2\tfrac{1}{2}v + \cos^2\tfrac{1}{2}v + e\cos^2\tfrac{1}{2}v - e\sin^2\tfrac{1}{2}v$$

$$= (1+e)\cos^2\tfrac{1}{2}v \left\{1 + \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}v\right\}$$

Mit Berücksichtigung dieser Umsetzung kann die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

geschrieben werden

$$r = \frac{p \cos^2 \frac{1}{2} E}{(1+e) \cos^2 \frac{1}{2} v} = p \left\{ \frac{\cos^2 \frac{1}{2} E}{1+e} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} E}{1-e} \right\}$$

Hebt man $(1 - e^2)$ als gemeinschaftlichen Nenner heraus, so findet sich

$$r = \frac{p}{1-e^2} (1 - e \cos E) \qquad (2)$$

oder auch

$$r = a (1 - e \cos E) \qquad (3)$$

In dem Ausdrucke $r^2 dv$ ist nun $dv$ ebenfalls als Funktion von $dE$ auszudrücken. Es wird durch die Differentiation von (1)

$$dv = \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} E} \right\}^2 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \, dE$$

Die erste Transformation des Ausdruckes für $r$ aber gestattet zu setzen

$$\left( \frac{\cos \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} E} \right)^2 = \frac{p}{(1+e) r}$$

es ist demnach

$$r \, dv = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} dE \qquad (4)$$

und man erhält durch Multiplication von (2) und (4)

$$r^2 dv = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - e \cos E) \, dE$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (14) des vorausgehenden Kapitels

$$kt \sqrt{p(1+m)} = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int (1 - e \cos E) \, dE.$$

Zählt man die Anomalien vom Perihel aus, so wird die Integrationskonstante der Null gleich und man hat nach Durchführung der Integration

$$\frac{kt \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e \sin E = M \qquad (5)$$

Den Winkel $v$ nennt man, wie diess schon erwähnt wurde, die wahre, $E$ die excentrische und $M$ die mittlere Anomalie.

Die Gleichung (5) gibt sofort das dritte Kepler'sche Gesetz. Bezeichnet man mit $T$ die Umlaufszeit eines Planeten, mit $T_1$ die eines anderen, so wird sein, da für einen Umlauf

$$M = 2\pi$$

ist, für die zwei Himmelskörper

$$\frac{k T \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} = 2\pi = \frac{k T_1 \sqrt{1+m_1}}{a_1^{\frac{3}{2}}}$$

woraus sofort abgeleitet werden kann:

$$T : T_1 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}} : \frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m_1}}$$

Vernachlässigt man die kleinen Grössen $m$ und $m_1$, so erhält man das dritte Kepler'sche Gesetz in der Näherungsform, wie dasselbe von Kepler zuerst erkannt wurde.

Es lassen sich zwischen $r$, $v$ und $E$ noch mehrere Relationen aufstellen, die für die Folge nöthig sind. Für $e$ wird häufig der Winkel $\varphi$ eingeführt, der sich bestimmt nach

$$\sin \varphi = e$$

es wird also zunächst sein

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}} = \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

demnach ist

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \qquad (6)$$

Es ist nach der bekannten Polargleichung und nach (3)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = a(1 - e\cos E)$$

woraus abgeleitet wird

$$r\cos v = a(\cos E - e) \qquad (7)$$

Oben fand sich

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e} \; \frac{\cos^2\frac{1}{2}E}{\cos^2\frac{1}{2}v}$$

Multiplicirt man rechts und links mit $\sin v$, so findet sich

$$r\sin v = \frac{a(1-e^2)}{1+e}\sin E\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E \qquad (8)$$

Von den Gleichungen (7) und (8) wurde auf pag. 19 bereits Gebrauch gemacht. Dieselben Gleichungen werden oft mit Vortheil zur Bestimmung von $r$ und $v$ aus $E$ verwendet werden können. Man kann statt derselben aber noch andere Gleichungen benutzen, die in der Anwendung zwar etwas weniger genau, aber bequemer sind. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\,\cos\tfrac{1}{2}E \\ \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\,\sin\tfrac{1}{2}E \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Die erstere dieser Gleichung findet sich direkt aus dem schon mehrfach benutzten Ausdrucke

$$r = a(1-e)\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}E}{\cos^2\frac{1}{2}v}$$

die zweite Gleichung entsteht aus der ersteren, wenn man beiderseits mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$ multiplicirt, aber für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$ rechts vom Gleichheitszeichen den Werth $\operatorname{tg}\frac{1}{2}E\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ einsetzt.

Die Gleichung (5)

$$M = E - e\sin E = \frac{kt\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

gestattet, den Ort des Himmelskörpers in der Bahn zu berechnen. Ist $M_0$ die mittlere Anomalie zu einer bestimmten Epoche $T_0$ und $M_1$ die mittlere Anomalie zur Zeit $T_1$ so berechnet sich $M_1$ aus

$$M_1 = M_0 + \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}(T_1 - T_0)$$

Drückt man die Zwischenzeit in Einheiten des mittleren Sonnentages aus und bezeichnet dieselbe mit $t$, und setzt die Konstante

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} = \mu$$

so ist auch

$$M_1 = M_0 + \mu t.$$

$\mu$ wird die tägliche mittlere siderische Bewegung genannt, und wird gewöhnlich in Bogensekunden angesetzt.

Die Gleichung zwischen der mittleren und excentrischen Anomalie:

$$M = E - e \sin E$$

welche die Bestimmung von $v$ für eine bestimmte Zeit vermittelt, ist eine transcendente; in derselben muss, wenn $E$ und $M$ in Bogenmass angesetzt werden sollen, um alles homogen zu haben, angenommen werden

$$e = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''}$$

Die Gleichung ist, wenn $E$ nach $M$ bestimmt werden soll (Kepler's Problem) direkt nicht lösbar; zweckmässig geleitete Versuche werden aber rasch den wahren Werth finden lassen. Ist sonst keine Näherung bekannt, so wird man, wenn die Excentricität klein ist (Planetenbahn) im ersten Versuche setzen:

$$M = E$$

und unter dieser Annahme für $E$ den Werth von $M$ suchen; die hervortretende Differenz ($dM$) zwischen dem wahren Werthe von $M$ und dem so gefundenen wird man zur genaueren Bestimmung von $E$ verwerthen. Man erhält leicht durch die Differentiation von (5)

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}$$

aus dieser Relation wird man mit Hilfe des genäherten Werthes von $E$ aus $dM$ den Werth $dE$ ableiten; man wird dieses Verfahren so lange fortzusetzen haben, bis der wahre Werth von $E$ ermittelt ist. Das folgende Beispiel wird das Verfahren anschaulich machen. Es sei

$$\varphi = 7^\circ\ 14'\ 33''\ 33 \qquad \log \sin \varphi = 9.100\ 6142$$
$$M = 212^\circ\ 59'\ 38''\ 06 \qquad \log e'' = 4.415\ 0393$$

so ist für den ersten Versuch

$$E = 213^\circ\ 0' \qquad dM = -3^\circ\ 56'$$
$$\log \sin E = 9_n\ 7361 \qquad \log \cos E = 9_n\ 9236$$
$$\log e'' \sin E = 4_n\ 1511 \qquad \log e \cos E = 9_n\ 0242$$
$$e'' \sin E = -3^\circ\ 56' \qquad \log (1 - e \cos E) = 0.0437$$
$$M' = 216^\circ\ 56' \qquad dE = -3^\circ\ 33'$$

Für den zweiten Versuch gestaltet sich die Rechnung

$$E = 209^\circ\ 27'\ 0''\ 00 \qquad dM = -27''14$$
$$\log \sin E = 9_n\ 691\ 6683 \qquad \log \cos E = 9_n\ 9399$$
$$\log e'' \sin E = 4_n\ 106\ 7076 \qquad \log e \cos E = 9_n\ 0405$$
$$e'' \sin E = -3^\circ\ 33'\ 5''\ 20 \qquad \log (1 - e \cos E) = 0.0452$$
$$M' = 313^\circ 0'\ 5''\ 20 \qquad dE = -24''\ 46$$

Der dritte und letzte Versuch lässt finden

$$E = 209^\circ\ 26'\ 35''\ 54 \qquad dM = 0''\ 00$$
$$\log \sin E = 9_n\ 691\ 5771$$
$$\log e'' \sin E = 4_n\ 106\ 6164$$
$$e'' \sin E = -3^\circ\ 33'\ 2''\ 52$$
$$M' = 312^\circ\ 59'\ 38''\ 06$$

Hat man eine Reihe von Werthen der excentrischen Anomalie zu finden, so werden in der Regel die vorausgehenden Werthe einen solchen sicheren Schluss auf die folgenden gestatten, dass man fast aller Versuche überhoben ist.

Wird die Bahn so excentrisch, dass sich dieselbe wenig von der Parabel ($e$ nahe $= 1$ oder $\varphi$ nahe $= 90^\circ$) unterscheidet, so werden die eben entwickelten Methoden nicht anwendbar, da die Bestimmung von $E$ nach $M$ mit Hilfe der gewöhnlichen Tafeln allzu unsicher wird; in der dritten Abtheilung ($c$) werde ich die in diesem Falle einzuschlagenden Verfahrungsweisen darlegen.

### b. Parabel.

Um den Ausdruck $r^2\,dv$ für die Parabel in geschlossener Form zu integriren, bedarf man keines Hilfswinkels, denn da $e = 1$ wird, so ist

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2}$$

und

$$r^2\,dv = \frac{p^2}{4\cos\frac{1}{2}v^4}\,dv = \frac{1}{2}p^2\left\{1 + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right\}d\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$$

Es wird demnach durch die Integration erhalten

$$kt\sqrt{p(1+m)} = \frac{1}{2}p^2\left\{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v\right\}$$

in welchem Falle wieder die Integrationskonstante der Null gleich ist, da die Zeit vom Perihel aus gezählt wird. Man hat demnach zur Bestimmung von $v$ die kubische Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v = \frac{2kt\sqrt{1+m}}{p^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

Da die Masse der Kometen so nahe der Null gleich ist, dass bislang an eine Bestimmung derselben nicht gedacht werden konnte, so wird man stets $m = o$ setzen müssen. Bei Kometen führt man meistens statt des Parameters ($p$) die Periheldistanz ($q$) ein, es ist aber für die Parabel

$$p = 2q.$$

Man kann demnach anstatt der Gleichung (1) etwas einfacher schreiben:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v = \frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Diese kubische Gleichung kann für jeden speciellen Fall entweder direkt ohne oder mit Hilfe von entsprechend konstruirten Tafeln oder durch Versuche gelöst werden. Hat man keine Hilfstafeln zur Hand, so wird man sich mit Vortheil zur direkten Bestimmung von $v$ des folgenden Verfahrens bedienen. Setzt man

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = 2\operatorname{cotg}2\gamma = \operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma$$

so ist

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^3 = -\,3\operatorname{tg}\frac{1}{2}v + \operatorname{cotg}\gamma^3 - \operatorname{tg}\gamma^3$$

man kann demnach statt der Gleichung (2) schreiben:

$$\operatorname{cotg}\gamma^3 - \operatorname{tg}\gamma^3 = \frac{3\,kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$$

Setzt man überdiess:

$$\operatorname{cotg}\gamma = \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta}$$

so wird auch gesetzt werden dürfen

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{3\,kt}{(2\,q)^{\frac{3}{2}}}$$

Bezeichnet man mit $c$ den Werth: $\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3\,k}$ so ist die Berechnung der wahren Anomalie in der Parabel reducirt auf das folgende Rechnungsschema:

$$\operatorname{tg}\beta = c\,\frac{q^{\frac{3}{2}}}{t}$$

$$\log c = 1.738\,8423$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = 2\operatorname{cotg} 2\gamma$$

Bei weitem bequemer ist es aber, bei dieser Berechnung von den für diesen Fall konstruirten Tafeln Gebrauch zu machen. Die bekannteste ist die Barker'sche Tafel, welche mit dem Argumente $v$ den Werth

$$M = 75\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + 25\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3$$

angibt; ist demnach $M$ gegeben, so wird man mit Hilfe dieser Tafel leicht das zugehörige $v$ finden; und ebenso die umgekehrte Aufgabe lösen, wiewol diese letztere auch ohne Anwendung der Tafeln ziemlich kurz ist. Der Werth von $M$ kann leicht gefunden werden; setzt man

$$\frac{75\,k}{\sqrt{2}} = C$$

$$\log C = 9.960\,1277$$

und bezeichnet mit $t$ die Zeit, welche seit dem Periheldurchgange verflossen ist, so wird

$$M = C\,\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}\,.$$

$v$ wird positiv nach dem Periheldurchgange vor demselben aber negativ gezählt. Die hiezu erforderlichen Tafeln finden sich in grosser Ausführlichkeit in Olbers' Werke über die Bestimmung einer Kometenbahn in der zweiten durch Encke besorgten Ausgabe und in Watson's theoretical astronomy. Es scheint mir jedoch zweckmässiger statt der Konstanten $C$ die Einheit einzuführen und demnach zu setzen

$$M = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\,\frac{\sqrt{2}}{k} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3\,\frac{\sqrt{2}}{k} = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$$

und dem entsprechend habe ich die Barker'sche Tafel umgeformt. Die Tafel V gibt von $0^0 - 30^0$ den Werth von $M = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ mit dem Argumente $v$ von $1'$ zu $1'$, von $30^0$ ab bis $175^0$ ist für dasselbe Intervall des Argumentes $\log M$ angesetzt. Die Tafel weiter auszudehnen schien nicht angemessen, da die Berechnung der wahren Anomalie bei so grossen Werthen zweckmässiger und bequemer nach anderen später zu erläuternden Methoden durchgeführt werden kann. Ausserdem findet sich in dieser Tafel eine Nebenkolumne die mit dem Argumente $v$ den Logarithmus der Aenderung von $M$, beziehungsweise $\log M$, für eine Bogensekunde in Einheiten der letzten Decimale angibt, und demnach bei der Interpolation gute Dienste leisten wird. Der Tafel ist eine solche Ausdehnung gegeben, dass man in der Regel mit der Berücksichtigung der

ersten Differenzen ausreichen wird; will man jedoch die zweiten Differenzen mitnehmen, was in allen Fällen ausreicht, so wird die Anordnung der Nebenkolumne sehr leicht dieses Ziel erreichen lassen. Ist $v$ gegeben, so nehme man zur Interpolation den Werth von log *Diff* 1″ der sich in der Mitte zwischen $v$ und dem nächstliegenden Tafelwerth befindet, ist aber $M$ oder log $M$ gegeben, so genügt ein roher Ueberschlag, um auf den ersten Blick den beiläufigen Werth der gesuchten Grössen ($v$) erkennen zu lassen, nimmt man nun für log *Diff* 1″ den Werth aus der Nebenkolumne, der in der Mitte zwischen dem nächsten Tafelwerthe und der gegebenen Grösse liegt, und berechnet damit den Interpolationswerth, so hat man das vorgesteckte Ziel erreicht. Ist die Anomalie kleiner als $\pm$ 140°, so ist die Berücksichtigung der zweiten Differenzen nicht nöthig, sie können aber fast ohne Mühe ganz beiläufig mitgenommen werden. Mehrere Beispiele werden das Verfahren erläutern; für den Kometen III 1867 wird im zweiten Theil des vorliegenden Bandes gefunden

für die Perihelzeit: $T = 1867$ *Nov.* 6.99927 mittl. Berliner Zeit.

für den log. der Periheldistanz: $\log q = 9.5190730$.

Es ist zunächst $\log q^{\frac{3}{2}} = 9.278\ 6095$. Es sei zu suchen die wahre Anomalie für Octob. 1.44530, November 4.0, und ferner die Anomalie, welche 10000 Tage nach dem Periheldurchgang statt hat. Es ist für die drei Fälle

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| $t$ | — 36.55397 | — 2.99927 | + 10000.000 |
| $\log t$ | $1_n 562\ 9345$ | $0_n 477\ 0156$ | 4.000 0000 |
| $\log M$ | $2_n 284\ 3250$ | $1_n 198\ 4061$ | 4.721 3905 |
| $M$ | ...... | — 15.790873 | ...... |

Für I und II ist es ausreichend die ersten Differenzen bei der Interpolation mitzunehmen. Es wird sein für I:

Differenz von log $M$ für 109°56′ — 170
log *Diff* $2_n$ 2304
log *Diff* 1″ 1.6028
$\Delta v$ — 4″ 24
$v =$ — 109° 55′ 55″ 76

für II:

Differenz von $M$ für 21° 30′ — 5040
log *Diff* $3_n$ 7024
log *Diff* 1″ 2.3302
$\Delta v$ — 23″ 56.
$v =$ — 21° 29′ 36″ 44

für III:

Ein beiläufiger Ueberblick zeigt dass $v$ bei 170° 44′ 54 sein wird; ich nehme nun log *Diff* 1″ für 170° 44′ 77 aus der Tafel und finde:

Differenz von log $M$ von 170° 45′ — 10643
log *Diff* $4_n$ 02706
log *Diff* 1″ 2.58856
$\Delta v =$ — 27″ 45
$v =$ 170° 44′ 32″ 55.

Beispiele für den umgekehrten Fall anzusetzen halte ich nicht für nöthig, da in diesem Falle die Anwendung der Tafel V unmittelbar ersichtlich ist.

Wird die Anomalie sehr gross ($> 167^\circ$), so hat Bessel ein Verfahren angegeben, welches in diesen Fällen die Anwendung der Barker'schen Tafel umgeht und viel bequemer ist, als die Benützung des bislang angegebenen Verfahrens; man wird aber selten genug Veranlassung haben von demselben Gebrauch zu machen, da die Kometen meist nur in verhältnissmässig kleinen Anomalien beobachtet werden können; bei sehr kleinen Periheldistanzen wird aber diese Methode bisweilen von Nutzen sein, da in diesen Fällen kurze Zeit vor und nach dem Perihel die wahren Anomalien sich dem Werthe $180^\circ$ annähern.

Man hat nach (2)

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3\{1 + 3\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v^2\}$$

multiplicirt man den letzten Ausdruck mit: $(1 + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^2)^3$ und dividirt ihn wieder durch dieselbe Grösse und setzt

$$\frac{1 + 3\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^2}{(1 + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}v^2)^3} = b$$

so ist

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3\{1 + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v^2\}^3\, b$$

Es ist $b$ nothwendig nur um eine Grösse vierter Ordnung von der Einheit verschieden, wenn man $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v$ als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet; denn entwickelt man den Nenner nach steigenden Potenzen von $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}v$ so findet sich

$$b = 1 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v^4 + \ldots$$

Es ist weiter

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3\{1 + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v^2\}^3 = \{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}v\}^3 = \frac{8}{\sin v^3}$$

Demnach wird

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \frac{8b}{3\sin v^3} \quad (3)$$

Bedenkt man, dass $b$ sehr nahe der Einheit gleich ist, so wird, wenn man $w$ bestimmt nach

$$\sin w = \frac{2\sqrt{2q}}{\sqrt[3]{6kt}}$$

$w$ nur sehr wenig von $v$ verschieden sein können. Für $w$ wird man stets den Werth bei $180^\circ$ annehmen, vor dem Perihel wird also $w$ im dritten Quadranten, nach dem Perihel im zweiten Quadranten anzunehmen sein; im ersteren Falle wird man auch $w$ negativ nehmen dürfen. Am zweckmässigsten wird es aber sein, vorerst auf das Zeichen von $t$ keine Rücksicht zu nehmen und demnach $w$ stets im zweiten Quadranten anzunehmen und erst nach Ermittelung von $v$ am Schlusse der Rechnung das entsprechende Zeichen voransetzen.

Setzt man:

$$v = w + \delta$$

so ist $\delta$ eine kleine Grösse, die mit dem Argumente $w$ in eine Tafel gebracht werden kann; es stellt sich demnach die Aufgabe, $\delta$ als Funktion von $w$ darzustellen. Es ist

$$\frac{8}{\sin w^3} = 3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (w + \delta) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (w + \delta)^3$$

oder auch

$$\frac{8}{\sin w^3} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w^3 \{1 + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} w^2\}^3 = \frac{(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^2)^3}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} w^3}$$

Demnach ist, wenn man zur Abkürzung einführt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w = \theta$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta = x$$

und bedenkt, dass ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (w + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} w + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} w \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta}$$

auch die Gleichung

$$\frac{(1 + \theta^2)^3}{\theta^3} = 3 \frac{\theta + x}{1 - \theta x} + \left(\frac{\theta + x}{1 - \theta x}\right)^3$$

daraus erhält man weiter

$$(1 + 3\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)(1 - 3\theta x + 3\theta^2 x^2 - \theta^3 x^3) = 3(\theta^4 + x\theta^3)(1 - 2\theta x + \theta^2 x^2)$$
$$+ \theta^3 (\theta^3 + 3\theta^2 x + 3\theta x^2 + x^3)$$

Ordnet man nach Potenzen von $x$, so wird gefunden

$$\frac{1 + 3\theta^2}{3\theta(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} = x - \theta x^2 + \frac{\theta^2(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} x^3$$

Es ist demnach $x$ durch eine kubische Gleichung bestimmt und das Problem erscheint hiermit gelöst. Um aber die numerische Berechnung der verlangten Tafel zu erleichtern, hat Bessel weitere Transformationen vorgenommen. Setzt man

$$\frac{1 + 3\theta^2}{3\theta(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} = y$$

so wird sein

$$y = x - \theta x^2 + \frac{\theta^2(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} x^3$$

Entwickelt man nun nach steigenden Potenzen von $y$ und bleibt bei den Gliedern dritter Ordnung stehen, so wird zunächst sein

$$x = y + \theta(y^2 + 2\theta y^3) - \frac{\theta^2(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} y^3 + \ldots$$

oder auch

$$x = y + \theta y^2 + y^3 \frac{\theta^2}{3} \cdot \frac{4 + 18\theta^2 + 9\theta^4 + 5\theta^6}{1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6} + \ldots$$

Um nun den Werth von $\delta$ zu bekommen, bedenke man, dass durch Benutzung der Reihe für den Bogen durch die Tangente ist:

$$\delta = 2x - \tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{2}{5} x^5 \ldots$$

Demnach ist auch

$$\delta = 2y + 2\theta y^2 + y^3 \frac{-2 + 32\theta^4 + 16\theta^6 + 10\theta^8}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} + \ldots$$

Betrachtet man $\frac{1}{\theta}$ als eine Grösse erster Ordnung, so ist $y$ von der fünften, $\theta y^2$ aber von der neunten Ordnung und das dritte Glied der Reihe für $\delta$ ist dem zu Folge von der dreizehnten Ordnung und kann demnach innerhalb der Grenzen der Anwendung

dieser Methode fortgelassen werden. Es ist also einfacher mit hinreichender Genauigkeit

$$\delta = 2y + 2\theta y^2$$

**Bessel** hat nun nach dieser Formel eine Tafel berechnen lassen, die mit dem Argumente $w$ den Werth von $\delta$ gibt. Ich habe diese Tafel theilweise als Tafel VI aufgenommen; der Gebrauch dieser Tafel ist so einfach, dass eine Erläuterung desselben überflüssig ist; ich werde nun die zur Rechnung erforderlichen Formeln zusammenstellen und darnach ein Beispiel ausführen. Man hat zunächst

$$\sin w = D \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[3]{t}}$$

$$\log D = 0.780\ 3008$$

Mit dem Argumente $w$ nimmt man aus Tafel VI $\delta$ und es ist dann

$$v = w + \delta$$

Ich werde zur Erläuterung das dritte der früher gewählten Beispiele nach diesem Schema durchführen:

$$\begin{aligned}
\log D \sqrt{q} &= 0.539\ 8373 \\
\tfrac{1}{3} \log t &= 1.333\ 3333 \\
\sin w &= 9.206\ 5040 \\
w &= 170^\circ 44' 31'' 13 \\
\delta &= \qquad + 1'' 42 \text{ (Tafel VI)} \\
v &= 170^\circ 44' 32'' 55
\end{aligned}$$

vollkommen mit dem früher gefundenen Werthe übereinstimmend.

### c. Bahnen von nahezu parabolischer Gestalt.

Zur Bestimmung der wahren Anomalien in einer nahezu parabolischen Bahn bieten sich drei Methoden dar, die von **Bessel**, **Brünnow** und **Gauss** herrühren; letztere Methode verdient in Folge ihrer grösseren Allgemeinheit den Vorzug; da aber die ersteren zwei Methoden häufig angewendet werden, so werde ich zuerst die zum Verständniss derselben nöthigen Ableitungen aufnehmen, aber nicht die zur Anwendung unumgänglich nöthigen Hilfstafeln mittheilen, während ich die Hilfstafeln, die **Gauss'** Methode erfordert, in extenso der angehängten Tafelsammlung einverleiben werde.

#### α. *Bessel's Methode.*

Die wahre Anomalie in einer nahe parabolischen Bahn wird sich im Allgemeinen nicht viel von derjenigen unterscheiden, die eine parabolische Bahn darbietet, welche mit ersterer eine gleiche Periheldistanz hat; den Unterschied zwischen diesen beiden Anomalien zu ermitteln, ist der Endzweck der **Bessel**'schen Methode. Es ist

$$\int r^2 dv = kt \sqrt{p}$$

$$p = q\,(1 + e)$$

$$r^2 = \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2}$$

demnach wird auch, wenn man setzt

$$(1 - e) = \delta$$

wo der Voraussetzung nach $\delta$ eine kleine Grösse sein muss,

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}(1+e)^{\frac{3}{2}}} = \int (1 + \cos v - \delta \cos v)^{-2} dv$$

oder in eine Reihe aufgelöst nach steigenden Potenzen von $\delta$

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}(1+e)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dv}{(1+\cos v)^2} + 2\,\delta \int \frac{\cos v\, dv}{(1+\cos v)^3} + 3\,\delta^2 \int \frac{\cos v^2\, dv}{(1+\cos v)^4} + \ldots$$

Setzt man

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \tau$$

so wird

$$\cos v = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \qquad dv = \frac{2\, d\tau}{1+\tau^2}$$

und man findet

$$\int \frac{dv}{(1+\cos v)^2} = \tfrac{1}{2} \left\{ \tau + \frac{\tau^3}{3} \right\}$$

$$2\,\delta \int \frac{\cos v\, dv}{(1+\cos v)^3} = \tfrac{1}{2}\,\delta \left\{ \tau - \frac{\tau^5}{5} \right\}$$

$$3\,\delta^2 \int \frac{\cos v^2\, dv}{(1+\cos v)^4} = \tfrac{3}{8}\,\delta^2 \left\{ \tau - \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^5}{5} + \frac{\tau^7}{7} \right\}$$

u. s. w.

Um nun den ganzen Ausdruck nach steigenden Potenzen von $\delta$ zu entwickeln und überall $e$ fortzuschaffen, wird man in: $\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}(1+e)^{\frac{3}{2}}}$ ebenfalls setzen müssen

$$(1+e)^{\frac{3}{2}} = (2-\delta)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\,\{2 - \tfrac{3}{2}\,\delta + \tfrac{3}{16}\,\delta^2 - \ldots\}$$

Es wird dann

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \tau + \frac{\tau^3}{3} + \delta \left\{ \frac{\tau}{4} - \frac{\tau^3}{4} - \frac{\tau^5}{5} \right\} + \delta^2 \left\{ \frac{3\tau}{32} - \frac{7\tau^3}{32} + \frac{3\tau^7}{28} \right\} + \ldots$$

bezeichnet man mit $w$ die Anomalie, die zur Zeit $t$ gehört, in einer Parabel, deren Periheldistanz $q$ ist und setzt

$$\vartheta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w$$

so wird auch sein müssen

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \vartheta + \frac{\vartheta^3}{3}$$

der Unterschied zwischen $\vartheta$ und $\tau$ wird eine Funktion von $\delta$ sein und man wird daher haben im Allgemeinen:

$$\vartheta = \tau + \alpha\delta + \beta\delta^2 + \ldots$$

Demnach wird sein

$$\vartheta + \tfrac{1}{3}\,\vartheta^3 = \tau + \tfrac{1}{3}\,\tau^3 + \delta\alpha\,\{1 + \tau^2\} + \delta^2\,\{\beta + \beta\tau^2 + \alpha^2\tau\} + \ldots$$

Vergleicht man diese Reihe mit der früher gefundenen, so wird man leicht schliessen, dass ist:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{4}\tau - \frac{1}{4}\tau^3 - \frac{1}{5}\tau^5}{1+\tau^2}$$

$$\beta = \frac{\frac{3}{32}\tau - \frac{3}{32}\tau^3 - \frac{7}{32}\tau^5 - \frac{83}{120}\tau^7 + \frac{4}{35}\tau^9 + \frac{47}{700}\tau^{11}}{(1+\tau^2)^3}$$

Die Coefficienten $\alpha$ und $\beta$ verbinden die Ausdrücke tg $\frac{1}{2} v$ und tg $\frac{1}{2} w$; will man aber den Unterschied zwischen $w$ und $v$ unmittelbar bestimmen, so bemerke man, dass ist

$$\text{arc tg}\,\vartheta = \text{arc tg}\,(\tau + \varDelta\tau) = \text{arc tg}\,\tau + \frac{\varDelta\tau}{1+\tau^2} - \frac{\tau\,\varDelta\tau^2}{(1+\tau^2)^2} + \ldots$$

oder mit Rücksicht auf das Obige

$$w = v + \frac{2}{1+\tau^2}\,\alpha\delta + \left\{\frac{2\beta}{1+\tau^2} - \frac{2\tau\alpha^2}{(1+\tau^2)^2}\right\}\delta^2 + \ldots$$

Setzt man also übersichtlich

$$w = v - A\delta - B'\delta^2 \ldots$$

so wird man finden, nachdem man für $\alpha$ und $\beta$ die früher gefundenen Werthe substituirt

$$-A = \frac{\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\tau^3 - \frac{2}{5}\tau^5}{(1+\tau^2)^2}$$

$$-B' = \frac{\frac{3}{16}\tau - \frac{5}{16}\tau^3 - \frac{3}{16}\tau^5 - \frac{41}{560}\tau^7 + \frac{1}{35}\tau^9 + \frac{19}{350}\tau^{11}}{(1+\tau^2)^4}$$

$A$ und $B'$ sind in Tafeln gebracht worden mit dem Argumente $v$. Man wird diese Coefficienten benutzen, wenn die wahre Anomalie in einer Ellipse oder Hyperbel gegeben ist und man die Zeit des Periheldurchganges finden will.

Um aber die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich die wahre Anomalie zu bestimmen für ein gegebenes Zeitmoment, muss eine Reihe gefunden werden, die ebenfalls nach steigenden Potenzen von $\delta$ geordnet ist, deren Coefficienten aber Funktionen von $w$ sind. In den Ausdrücken $A$ und $B'$ wird man daher statt $\tau$ überall $\vartheta$ einführen müssen; zu diesem Zwecke wird aber zunächst die Taylor'sche Reihe geben

$$f(v) = f(w + \varDelta w) = f(w) + f'(w)\,dw + f''(w)\,\frac{dw^2}{2} + \ldots$$

es wird aber sein

$$v = w + a\delta + b\delta^2 + \ldots$$

wo jetzt $a$ und $b$ Funktionen von $\vartheta$ sind; daher auch

$$f(v) = f(w) + f'(w)\,\{a\delta + b\delta^2\} + f''(w)\left\{\frac{a^2\delta^2}{2}\right\} + \ldots$$

oder nach steigenden Potenzen von $\delta$ geordnet:

$$f(v) = f(w) + \delta a f' w + \delta^2\left\{b f'(w) + \frac{a^2}{2} f''(w)\right\} + \ldots$$

Diese Transformationsformeln werden gestatten, die vorgelegte Aufgabe durchzuführen; da der Coefficient $A$ schon mit $\delta$ multiplicirt erscheint, so kann man das mit $\rho^2$ multiplicirte Glied der eben entwickelten Reihe schon fortlassen, da durch dasselbe nur Glieder dritter Ordnung entstehen, die bisher übergangen wurden. Bezeichne ich nun mit $A_\vartheta$ und $B'_\vartheta$ die oben für $A$ und $B'$ gefundenen Ausdrücke, nachdem in denselben statt $\tau$ überall $\vartheta$ geschrieben wurde, so wird sich finden, wenn wieder Alles nach Potenzen von $\delta$ geordnet wird

$$v = w + A_\vartheta\,\delta + \left\{a\,\frac{dA_\vartheta}{dw} + B'_\vartheta\right\}\delta^2 + \ldots$$

Entwickelt man die eben angezeigten Coefficienten und vergleicht diese mit der oben angesetzten Reihe:

$$v = w + a\delta + b\delta^2 + \ldots$$

so wird man finden, dass ist:

$$a = \frac{-\frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta^3 + \frac{2}{5}\vartheta^5}{(1+\vartheta^2)^2}$$

$$b = \frac{-\frac{1}{16}\vartheta - \frac{9}{16}\vartheta^3 + \frac{37}{80}\vartheta^5 + \frac{531}{560}\vartheta^7 + \frac{13}{35}\vartheta^9 + \frac{9}{350}\vartheta^{11}}{(1+\vartheta^2)^4}$$

$a$ und $b$ sind ebenfalls in Tafeln gebracht worden, da aber $a$ und $A$ dieselbe Form haben, so kann ein und dieselbe Tafel für beide Coefficienten gelten. In der von Encke besorgten Auflage des Olbers'schen Werkes über die Bestimmung einer Kometenbahn finden sich in Tafel V die nöthigen Grössen. Es ist daselbst bezeichnet

mit $A$ der Werth $a \times 2062''648$
» $B$ » » $b \times 20''62648$
» $B'$ » » $B' \times 20''62648$

man erhält damit Alles in Bogenmass ausgedrückt und es wird sein

$$v = w + A\,[100\,(1-e)] + B\,[100\,(1-e)]^2 + \ldots$$
$$w = v - A\,[100\,(1-e)] - B'\,[100\,(1-e)]^2 + \ldots$$

### *β. Brünnow's Methode.*

Diese Methode ist ganz der vorausgehenden nachgebildet und ist von Bessel in dem darauf bezüglichen Aufsatze angedeutet worden.

Setzt man wieder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \tau$$

so ist

$$\cos v = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$$

$$dv = \frac{2}{1+\tau^2}\,d\tau$$

und man hat ähnlich wie früher

$$kt\sqrt{q}\,(1+e) = 2\int\frac{q^2\,(1+e)^2}{\left(1+e\,\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)^2}\,\frac{d\tau}{1+\tau^2}$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$i = \frac{1-e}{1+e}$$

so gibt eine leichte Transformation des eben aufgestellten Ausdruckes die Form:

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \int(1+\tau^2)\,(1+i\,\tau^2)^{-2}\,d\tau$$

Die Ausführung der angezeigten Integration gibt, nachdem man den zu integrirenden Ausdruck in eine Reihe aufgelöst hat:

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - 2i\left\{\frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^5}{5}\right\} + 3i^2\left\{\frac{\tau^5}{5} + \frac{\tau^7}{7}\right\} - 4i^3\left\{\frac{\tau^7}{7} + \frac{\tau^9}{9}\right\} + \ldots$$

Von hier ab schliessen sich die Transformationen ganz denjenigen an, welche bei Bessel's Methode durchgeführt wurden; es wird zunächst gesetzt

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \vartheta + \tfrac{1}{3}\vartheta^3$$

wobei aber beachtet werden muss, dass $\vartheta$ nicht mehr zu einer parabolischen Bahn gehört, deren Periheldistanz $q$ ist; ferner wird die Form angenommen

$$\vartheta = \tau + \alpha i + \beta i^2 + \gamma i^3 + \ldots$$

in welcher Reihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Funktionen von $\tau$ sind. Man findet für denselben durch gehörige Entwicklung nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten

$$\alpha = -\frac{2\{\frac{1}{3}\tau^3 + \frac{1}{5}\tau^5\}}{1+\tau^2}$$

$$\beta = \frac{3\{\frac{1}{5}\tau^5 + \frac{373}{945}\tau^7 + \frac{97}{315}\tau^9 + \frac{47}{525}\tau^{11}\}}{(1+\tau^2)^3}$$

$$\gamma = -\frac{4\{\frac{1}{7}\tau^7 + \frac{1298}{2835}\tau^9 + \frac{10174}{14175}\tau^{11} + \frac{2940}{42725}\tau^{13} + \frac{2213}{7875}\tau^{15} + \frac{410}{7875}\tau^{17}\}}{(1+\tau^2)^5}$$

setzt man analog, wie diess früher geschah, um die Differenz der Bögen $w$ und $v$ zu finden, zunächst

$$\text{arc tg}\,\vartheta = \text{arc tg}\,(\tau + \varDelta\tau) = \text{arc tg}\,\tau + \frac{(\varDelta\tau)}{1+\tau^2} - \frac{\tau(\varDelta\tau)^2}{(1+\tau^2)^2} + \frac{\tau^2 - \frac{1}{3}}{(1+\tau^2)^3}(\varDelta\tau)^3 - \ldots$$

so wird man haben

$$\varDelta\tau = \alpha i + \beta i^2 + \gamma i^3 + \ldots$$
$$\varDelta\tau^2 = \alpha^2 i^2 + 2\alpha\beta i^3 + \ldots$$
$$\varDelta\tau^3 = \alpha^3 i^3 + \ldots$$

und es wird sein übersichtlich

$$w = v - A\,(100\,i) + D\,(100\,i)^2 - E\,(100\,i)^3$$

Die Substitution der oben gefundenen Werthe von $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ lässt finden, wenn Alles im Bogenmass ausgedrückt werden soll:

$$A = \frac{\frac{4}{3}\tau^3 + \frac{4}{5}\tau^5}{(1+\tau^2)^2} \cdot 2062''648$$

$$D = \frac{\frac{6}{5}\tau^5 + \frac{166}{315}\tau^7 + \frac{82}{105}\tau^9 + \frac{38}{175}\tau^{11}}{(1+\tau^2)^4} \cdot 20''62648$$

$$E = \frac{\frac{8}{7}\tau^7 + \frac{5288}{2835}\tau^9 + \frac{26384}{14175}\tau^{11} + \frac{6960}{4725}\tau^{13} + \frac{5128}{7875}\tau^{15} + \frac{901}{7875}\tau^{17}}{(1+\tau^2)^6} \cdot 0''2062648$$

Die Coefficienten $A$, $D$ und $E$ hat Brünnow in Tafeln gebracht (Brünnow, Astronomical Notices No. 2). Wie man sieht, hat Brünnow's Methode vor der Bessel'schen den Vortheil, dass für kleine Anomalien die Korrektionen wesentlich kleiner sind, weil der Coefficient $A$ bei Bessel schon $\tau$ in der ersten Potenz enthält, während bei Brünnow sofort $\tau^3$ als die niedrigste Potenz von $\tau$ in dem ersten Korrektionsgliede erscheint. Ersetzt man, um für die Umkehrung der Aufgabe geeignete Ausdrücke zu bekommen, $\tau$ durch $\vartheta$ nach den bei der Bessel'schen Methode mitgetheilten Principien, so wird sich nach Durchführung einiger etwas weitläufiger Reduktion ergeben eine neue Reihe von der Form

$$v = w + A\,(100\,i) + B\,(100\,i)^2 + C\,(100\,i)^3 + \ldots$$

in welcher die Coefficienten die folgende Bedeutung haben:

$$A = \frac{\frac{4}{3}\vartheta^3 + \frac{4}{5}\vartheta^5}{(1+\vartheta^2)^2}\,2062''648$$

$$B = \frac{\frac{22}{15}\vartheta^5 + \frac{598}{315}\vartheta^7 + \frac{86}{105}\vartheta^9 + \frac{18}{175}\vartheta^{11}}{(1+\vartheta^2)^4}\,20''62648$$

$$C = \frac{\frac{384}{315}\vartheta^7 + \frac{9752}{2835}\vartheta^9 + \frac{37328}{14175}\vartheta^{11} + \frac{1648}{1575}\vartheta^{13} + \frac{1768}{7875}\vartheta^{15} + \frac{184}{7875}\vartheta^{17}}{(1+\vartheta^2)^6} \cdot 0''2062648$$

Ich habe Bessel's und Brünnow's Methode nur andeutungsweise behandelt, da beide Methoden in Beziehung auf Allgemeinheit der Gauss'schen nachstehen; ich werde deshalb die letztere ausführlich vornehmen und mit der zweckmässigen Abänderung vortragen, die von Nicolai herrührt und sich auf die von Gauss mit $C$ bezeichnete Grösse bezieht.

### $\gamma$. *Gauss' Methode.*

Um diese Methode gleichzeitig für die Ellipse oder Hyperbel zu erweisen, gehe ich von einer anderen Grundgleichung aus, als diess Gauss gethan hat. Es wird im Verlaufe der Ableitung mehrmals Imaginäres hervortreten, wenn $e$ grösser als die Einheit (Hyperbel) wird; da aber in den Schlussformeln dasselbe wieder eliminirt erscheint, so hat diess weiter keinen nachtheiligen Einfluss; ich umgehe dadurch, wie mir scheint dem Zwecke entsprechend, die sonst hervortretende Unterscheidung, je nachdem die Bahn elliptisch oder hyperbolisch ist. Bei der hier gegebenen Ableitung zu Brünnow's Methode war die Form erlangt worden

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \int (1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} v)\,(1+i\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} v)^{-2}\, d\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} v$$

setzt man

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} v = \tau = \frac{\theta}{i}$$

so wird erhalten

$$\frac{kt\,(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}\,(1+e)} = \int \frac{(i+\theta)\,(1+\theta)^{-2}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta$$

oder integrirt:

$$\frac{kt\,(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\theta}\left\{(1-e) - \frac{1-3e}{3}\,\theta + \frac{1-5e}{5}\,\theta^2 - \frac{1-7e}{7}\,\theta^3 + \ldots\right\}$$

Da $(1-e)$ eine Grösse erster Ordnung ist, so wird $\theta$ von derselben Ordnung sein müssen, da

$$i\tau = \theta$$

angenommen wird. (Gauss nimmt bei seinen Untersuchungen $\sqrt{\theta}$ als Grösse erster Ordnung an). Die eben gefundene Reihe kann in zwei Reihen zerfällt werden; setzt man nämlich

$$\alpha = 2\sqrt{\theta}\,\{1 - \tfrac{1}{3}\theta + \tfrac{1}{5}\theta^5 - \tfrac{1}{7}\theta^7 + \ldots\}$$
$$\beta = 2\sqrt{\theta}\,\{1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \ldots\}$$

so wird sein

$$\frac{kt\,(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}} = \alpha - e\beta$$

Man wird sich leicht überzeugen können, dass $\alpha$ und $\beta$ in der Relation des Bogens zum Sinus stehen, ausserdem wird stets sehr nahe

$$\alpha = e\beta$$

in dem vorliegenden Falle sein, so dass die eben gefundene Gleichung in der Form zur Lösung nicht brauchbar ist. Man kann sehr verschiedene Transformationen vornehmen, die alle das Ziel erreichen lassen, dass die Berechnung dieser Differenz mit hinlänglicher Schärfe mit Hilfe der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln vorgenommen werden kann; um aber später eine Grösse $(B)$ so nahe der Einheit gleich setzen zu können, dass man hierbei nur Fehler zweiter Ordnung (nach Gauss' Ordnungsbestimmung vierter

Ordnung) begeht, wird sich die von Gauss vorgeschlagene Transformation besonders empfehlen. Es wird sein.

$$\alpha - e\beta = \frac{1-e}{10}(9\alpha + \beta) + \frac{1+9e}{10}(\alpha - \beta),$$

Setzt man

$$A = 15\,\frac{\alpha - \beta}{9\alpha + \beta}$$

so wird zunächst erhalten werden

$$\frac{kt\sqrt{1-e}}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{9\alpha + \beta}{10}\left\{1 + \frac{1+9e}{1-e}\cdot\frac{A}{15}\right\}$$

führt man überdiess ein:

$$B = \frac{9\alpha + \beta}{20\sqrt{A}}$$

von welcher Grösse später gezeigt werden soll, dass dieselbe nur um eine Grösse zweiter Ordnung von der Einheit verschieden ist, so wird:

$$\frac{kt\sqrt{1-e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = B\left\{A^{\frac{1}{2}} + \frac{1+9e}{1-e}\,\frac{A^{\frac{3}{2}}}{15}\right\}$$

Setzt man vorläufig $B$ als bekannt voraus, so wird man die vorstehende Gleichung so entwickeln können, dass man zur Auflösung derselben (Ermittlung von $A$) die Barker'sche Tafel (Tafel V) benutzen kann.

Nimmt man an, dass ist:

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}w$$

so wird sein:

$$\frac{kt}{2Bq^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1+9e}{5}} = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}w$$

welche Gleichung sofort mit Hilfe der Barker'schen Tafel gelöst werden kann (Bestimmung von $w$), sobald der Werth von $B$ bekannt ist. Ich nehme vorläufig an, dass $B$ bekannt sei und will, um die Uebersicht zu erleichtern, gleich zeigen, wie man die Operation weiter fortzuführen hat, um $v$ bestimmen zu können. Es war gesetzt worden:

$$\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}v = \frac{1+e}{1-e}\,\theta$$

Setzt man nun (mit Nicolai)

$$\theta = AC^2 = C^2\,\frac{5(1-e)}{1+9e}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}w$$

und nimmt wieder vorläufig den Werth von $C$ als bekannt an, so wird sein:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = C\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}w\sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}$$

Ist $v$ bekannt, so kann $r$ sehr leicht berechnet werden nach

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos v}$$

welche Formel sehr bequem ist, und die ich den übrigen Abänderungen vorziehe, will man aber $r$ nach einer ähnlichen Form, wie dieselbe in der Parabel angewendet wird, berechnen, so bemerke man, dass sich schreiben lässt:

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v\,(1+\theta)}$$

oder für $\theta$ der obige Werth eingesetzt:

$$r = \frac{q}{(1+AC^2)\cos^2\frac{1}{2}v}$$

Die bislang angezeigten Operationen bedürfen aber zum Nachweise der Ausführbarkeit die Bestimmung der Werthe von $B$ und $C$ und es wird sich zweckmässig erweisen $B$ und $C$ als Funktionen von $A$ darzustellen. Die Berechnung von $C$ wird auf direkte Weise geschehen, $B$ wird aber indirekt ermittelt werden müssen, da die erste Auflösung der oben angesetzten kubischen Gleichung ohne Kenntniss des Werthes von $A$ geschehen muss. Setzt man für $\alpha$ und $\beta$ die früher gefundenen Reihen ein, so wird man haben:

$$15\,(\alpha - \beta) = 2\sqrt{\theta}\,\{10\,\theta - \tfrac{60}{5}\theta^2 + \tfrac{90}{7}\theta^3 - \tfrac{120}{9}\theta^4 + \tfrac{150}{11}\theta^5 - \ldots\}$$

$$9\alpha + \beta = 2\sqrt{\theta}\,\{10 - \tfrac{12}{3}\theta + \tfrac{14}{5}\theta^2 - \tfrac{16}{7}\theta^3 + \tfrac{18}{9}\theta^4 - \ldots\}$$

oder durch die Divisionen beider Reihen

$$A = 15\,\frac{\alpha - \beta}{9\alpha + \beta} = \theta\,\{1 - \tfrac{4}{5}\theta + \tfrac{24}{35}\theta^2 - \tfrac{1592}{2625}\theta^3 + \tfrac{78856}{144375}\theta^4 \ldots\}$$

Diese Reihe wird den Werth von $C$ finden lassen, denn es war

$$\theta = A\,C^2$$

demnach ist:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{A}{\theta}$$

man erhält so $C^{-2}$ durch eine Reihe ausgedrückt die nach steigenden Potenzen von $\theta$ geordnet ist; die für $A$ gefundene Reihe kann aber umgekehrt werden, so dass $\theta$ durch eine Reihe bestimmt wird, die nach steigenden Potenzen von $A$ geordnet ist. Führt man diese Umkehrung aus, so wird sich finden:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{A}{\theta} = 1 - \tfrac{4}{5}A + \tfrac{8}{175}A^2 + \tfrac{8}{525}A^3 + \tfrac{1896}{336875}A^4 + \tfrac{28744}{13138125}A^5 + \ldots$$

Um nun $B$ ebenfalls als Funktion von $A$ darzustellen, wird es zweckmässig sein ähnliche Reihenentwicklungen vorzunehmen. Man wird zuerst nach

$$B = \frac{9\alpha + \beta}{20\sqrt{A}}$$

eine Reihe herstellen, die nach steigenden Potenzen von $\theta$ geordnet ist und finden:

$$B = 1 + \tfrac{3}{175}\theta^2 - \tfrac{62}{2625}\theta^3 + \tfrac{9007}{336875}\theta^4 - \ldots$$

und ersetzt man mit Hilfe der oben angedeuteten Umkehrung $\theta$ durch $A$, so findet sich

$$B = 1 + \tfrac{3}{175}A^2 + \tfrac{8}{525}A^2 + \tfrac{471}{336875}A^4 + \ldots$$

Man sieht sofort, dass $B$ von der Einheit nur um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden ist, und diess ist durch die von Gauss gewählte Zerlegung erreicht. In der Anwendung wird es zweckmässiger sein die Werthe von $\log B$ und $\log C$ in Tafeln zu bringen. Es ist aber

$$\log y = M\{(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4 + \ldots\}$$

wobei $M$ der Modul der briggischen Logarithmen ist, und welche Reihe zur Berechnung der Werthe $\log B$ und $\log C$ benutzt werden kann. Die Tafel VII gibt mit dem Argumente $A$ innerhalb der Grenzen $-0.3$ und $+0.3$, was für alle Fälle ausreicht, die zugehörigen Werthe von $\log B$ und $\log C$; man wird leicht bemerken, dass sobald $A$ negativ ist, die Bahn eine Hyperbel ist, wird $A$ positiv gefunden, so ist die Bahn elliptisch.

Ich werde nun das bislang entwickelte Verfahren für die praktische Ausführung übersichtlich zusammenstellen. Die in diesem Werke enthaltene Barker'sche Tafel gibt mit dem Argumente $v$ (hier ist dafür $w$ zu substituiren) den Werth

$$M = \frac{\sqrt{2}}{k}\left\{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3\right\}$$

man berechnet also im vorliegenden Falle

$$M = \frac{t}{Bq^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1+9e}{10}} \qquad (1)$$

und findet zu $M$ mit Hilfe der Tafel V den Werth von $w$. Im ersten Versuche wird man $B$ der Einheit gleich setzen müssen, wodurch man einen Fehler zweiter Ordnung begeht, und durch eine flüchtige Rechnung wird man einen genäherten Werth von $w$ bestimmen. Ist $w$ gefunden so ist, wenn man mit $\gamma$ den Werth

$$\gamma = \frac{5(1-e)}{1+9e} \qquad (2)$$

bezeichnet, der ein für allemal gerechnet wird, in dem vorgelegten speciellen Falle,

$$A = \gamma \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}w \qquad (3)$$

Mit diesem $A$ geht man in die Tafel VII ein und entlehnt hierfür den $\log B$ und berechnet jetzt nach (1) den Werth von $M$ genauer. Meistens wird eine einmalige Wiederholung der Rechnung völlig ausreichen; wenn nicht, so muss man so lange die Operationen vornehmen, bis keine Aenderung von $B$ merkbar hervortritt. Dann wird man aus Tafel VII den Werth von $\log C$ nehmen, und setzt man zur Abkürzung

$$\delta = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \qquad (4)$$

so wird sein:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \delta C \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w \qquad (5)$$

und schliesslich:

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos v} = \frac{q}{(1+AC^2)\cos^2\frac{1}{2}v} \qquad (6)$$

Die Formeln (1) — (6) lassen aus der seit dem Perihel verflossenen Zeit die wahre Anomalie und den Radiusvector finden. Ich werde nun ein Beispiel vornehmen. Für den Kometen III 1862 ist:

$$T = 1862 \text{ August } 22.949139 \text{ mittl. Berl. Zeit}$$
$$\log q = 9.983\,4650$$
$$e = 0.960\,7588$$
$$\log e = 9.982\,6144$$

daraus findet sich zunächst

$$\log\gamma = 8.308\,3277 \qquad \log\delta = 0.003\,5048$$

$$\log\sqrt{\frac{1+9e}{10q^3}} = 0.016\,9948 = \log\alpha$$

$$\log(1+e)\,q = 0.275\,8892$$

Es sei nun die wahre Anomalie für 1862 Octob. 23.0 zu berechnen. Es ist:

$$t = +\,61.050\,861$$
$$\log t = 1.785\,6918$$
$$\log \alpha t = 1.802\,6866$$

Setzt man vorläufig $B = 1$ und geht in die Barker'sche Tafel (V) ein, so findet sich genähert $w = 67^\circ\ 45'$

$$\tfrac{1}{2} w = 33^\circ\ 52'5 \qquad A = 0.00\ 917$$
$$tg^2 \tfrac{1}{2} w = 9.6540$$
$$\log A = 7.9623 \qquad \log B = 0.000\ 0006$$
$$\log M = 1.802\ 6860$$
$$w = 67^\circ\ 45'\ 8''78$$
$$\tfrac{1}{2} w = 33^\circ\ 52'\ 34''39 \qquad \log C = 0.001\ 5976$$
$$tg\ \tfrac{1}{2} w = 9.826\ 9618 \qquad \log \delta C = 0.005\ 1024$$
$$tg^2 \tfrac{1}{2} w = 9.653\ 9236 \qquad tg\ \tfrac{1}{2} v = 9.832\ 0642$$
$$\log A = 7.962\ 2513 \qquad \tfrac{1}{2} v = 34^\circ\ 11'\ 18''345$$
$$A = 0.009\ 1675 \qquad v = 68^\circ\ 22'\ 36''69$$

$$\cos v = 9.566\ 4376 \qquad \log(1 + e \cos v) = 0.131\ 6314$$
$$\log e \cos v = 9.549\ 0520 \qquad \log r = 0.144\ 2578$$

Die umgekehrte Aufgabe, aus der wahren Anomalie die Zeit des Perihels zu finden, wird sich leicht aus den bisherigen Vorschriften ableiten lassen. Man berechnet zunächst

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\, tg^2 \tfrac{1}{2} v \qquad (1)$$

und setzt in der ersten Annäherung $\theta = A$ und nimmt mit dem so für $A$ gefundenen Werth $\log C$ aus Tafel VII und berechnet jetzt genauer

$$A = \gamma \left(\frac{tg\,\frac{1}{2} v}{\delta C}\right)^2 \qquad (2)$$

mit diesem Werthe von $A$ nimmt man jetzt den genaueren Werth von $C$ aus der Tafel und wiederholt die Rechnung so lange bis keine Aenderung des Werthes von $C$ sich herausstellt, dann ist:

$$tg\ \tfrac{1}{2} w = \frac{tg\ \frac{1}{2} v}{\delta C} \qquad (3)$$

mit dem Argumente $w$ nimmt man aus Barker's Tafel $M$ und hat dann

$$t = M B q^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{10}{1 + 9e}} \qquad (4)$$

wo jetzt $B$ unmittelbar durch den jetzt bekannten Werth von $A$ ermittelt wird. Man könnte diese Rechnung ganz direkt führen, wenn man eine Tafel besitzt, die mit dem Argumente $\theta$ den Werth $A$ sofort genau ergibt; ich habe aber die darauf bezügliche Tafel nicht aufgenommen, da dieselbe einerseits nur selten gebraucht wird und andererseits das indirekte Verfahren ebenfalls das Ziel rasch erreichen lässt. Ich werde nun das obige Beispiel benutzen. Es wird nach (1) gefunden

$$\theta = 0.00923$$

darnach wird:

$$\log C = 0.001\ 6085 \qquad \log tg\ \tfrac{1}{2} v^2 = 9.664\ 1284$$
$$\log \delta C = 0.005\ 1133 \qquad \log \gamma\, tg\ \tfrac{1}{2} v^2 = 7.972\ 4561$$
$$\log(\delta C)^2 = 0.010\ 2266 \qquad \log A = 7.962\ 2295$$

$$A = 0.009\,1670$$
$$\log C = 0.001\,5975 \quad (\varDelta C = -\,110)$$
$$\log A = 7.962\,2515$$
$$A = 0.009\,1675$$

$$\log C = 0.001\,5976 \qquad \log B = 0.000\,0006$$
$$\log \delta C = 0.005\,1024 \qquad \log M = 1.802\,6860$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w = 9.826\,9618 \qquad \lg \operatorname{compl} \alpha = 9.983\,0052$$
$$\tfrac{1}{2} w = 33^\circ\,52'\,34''395 \qquad \log t = 1.785\,6918$$
$$w = 67^\circ\,45'\,8''79 \qquad t = +\,61.05086$$

Es wird nicht immer nöthig sein, auf die kleinen Korrektionen, die aus $B$ und aus dem Unterschiede von $1 + \frac{4}{5} A$ und $C^2$ entstehen, Rücksicht zu nehmen; will man nicht darauf achten und ist die Bahn eine Ellipse, so wird man setzen

$$M = t \sqrt{\frac{1 + 9e}{10\,q^3}}$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w \sqrt{\tfrac{4}{5}\gamma} = \sin \sigma$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \frac{\delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} w}{\cos \sigma}$$

man würde für das obige Beispiel erhalten

$$w = 67^\circ\,45'\,8''99 \qquad \sin \sigma = 8.93267$$
$$\tfrac{1}{2} w = 33\;52\;34''49 \qquad \cos \sigma = 9.998\,4016$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w = 9.826\,9622 \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = 9.832\,0654$$
$$\delta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w = 9.830\,4670 \qquad \tfrac{1}{2} v = 34^\circ\,11'\,18''61$$
$$\sqrt{\tfrac{4}{5}\gamma} = 9.105\,71 \qquad v = 68\;22'\,37''22$$

Aus der nahen Uebereinstimmung mit den Resultaten der strengen Berechnung kann man leicht ersehen, wie genau die vorgeschlagenen Näherungsformeln sind und man wird dieselben in den meisten Fällen benützen können, ohne der Genauigkeit zu schaden, wenn die Bahn nicht allzu sehr von der Parabel abweicht und der Komet allzu weit vom Perihel entfernt ist.

Für die Hyperbel wird unter ähnlichen Umständen gesetzt werden können:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w \sqrt{-\tfrac{4}{5}\gamma} = \operatorname{tg} \sigma \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \delta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w \cos \sigma$$

### 3. Aberration.

Die Erscheinungen der Aberration erklären sich aus dem Umstande, dass die Geschwindigkeit des Lichtes im Verhältniss zu der Geschwindigkeit der Bewegung der Himmelskörper nicht unendlich gross ist. Diese Thatsache veranlasst zwei wesentlich verschiedene Phänomene. Vorerst wird ein Beobachter, der auf der Erde alle Bewegungen gemeinschaftlich mit dieser ausführen muss, den Lichtstrahl nicht in seiner wahren Richtung erkennen, da die beobachtete Richtung bedingt ist durch die relative Bewegung des Lichtstrahles gegen den Beobachter; die durch diese relative Bewegung veranlasste scheinbare Aenderung der Richtung des Lichtstrahles bezeichnet man mit dem Namen der Fixsternaberration, zum Unterschiede von dem zweiten Erscheinungskomplexe, der dadurch bedingt wird, dass man den Körper nicht an der Stelle sieht, an der er sich zur Zeit der Beobachtung befindet, sondern an einer Stelle, wo er war,

als die wahrgenommenen Lichtwellen von demselben ausgingen; man nennt diess die Planetenaberration.

Ich werde nun beide Arten der Aberration gesondert behandeln. —

### a. Fixsternaberration.

Die Fixsternaberration ist, wie erwähnt, wesentlich bedingt durch die Bewegung des Beobachters, die derselbe mit der Erde macht; diese ist der Hauptsache nach eine dreifache. 1. Die Bewegung der Erde um die Achse, 2. um die Sonne, und endlich 3. die Bewegung der Erde mit der Sonne; letztere Bewegung als zu wenig erforscht, muss ausser Acht gelassen werden, wird aber den Ort eines Fixsternes nur um eine konstante Grösse beeinflussen. Der Einfluss, den die Erdrotation auf die scheinbare Richtung des Lichtstrahles nimmt, wird ebenfalls nicht näher betrachtet werden müssen, da die Beobachtungen stets für die sog. tägliche Aberration korrigirt sind; es wird desshalb nur die jährliche Aberration näher untersucht werden müssen für die Zwecke des vorliegenden Werkes.

Den mit der Aberration behafteten Ort nennt man den scheinbaren Ort, während die von Aberration befreite Position als die wahre bezeichnet wird. Seien $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeiten der Erde nach den rechtwinkligen Coordinaten zerlegt und zwar sei durch diese Grössen das Mass der Bewegung in der Zeiteinheit vorgestellt, $\mu$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder der Weg, den das Licht in einer Zeiteinheit zurücklegt, und bezeichnet man die zugehörigen polaren Coordinaten mit $\alpha$ und $\delta$, die die Richtung des Lichtstrahles bestimmen, so sind, da der Lichtstrahl in der umgekehrten Richtung der Fortpflanzungsrichtung wahrgenommen wird, die Coordinaten eines Punktes in der Entfernung $\mu$

$$\xi = -\mu \cos\delta \cos\alpha$$
$$\eta = -\mu \cos\delta \sin\alpha$$
$$\zeta = -\mu \sin\delta$$

Bezeichnet man nun die durch die Aberration veränderten Werthe mit Accenten, so wird sein

$$\xi' = -\mu' \cos\delta' \cos\alpha'$$
$$\eta' = -\mu' \cos\delta' \sin\alpha'$$
$$\zeta' = -\mu' \sin\delta'$$

oder nach dem Prinzip der relativen Bewegung

$$\mu' \cos\delta' \cos\alpha' = \mu \cos\delta \cos\alpha + \frac{dx}{dt}$$
$$\mu' \cos\delta' \sin\alpha' = \mu \cos\delta \sin\alpha + \frac{dy}{dt}$$
$$\mu' \sin\delta' = \mu \sin\delta + \frac{dz}{dt}$$

Es sind aber, wie diess auf pag. 31 nachgewiesen wurde, die Aenderungen der polaren Coordinaten bestimmt durch die Aenderungen der rechtwinkligen nach den folgenden Gleichungen, die übrigens dem vorliegenden Fall angepasst sind:

$$\left.\begin{aligned} d\alpha = \alpha' - \alpha = -\frac{\sin\alpha\sec\delta}{\mu}\frac{dx}{dt} + \frac{\cos\alpha\sec\delta}{\mu}\frac{dy}{dt} \\ d\delta = \delta' - \delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\mu}\frac{dx}{dt} - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\mu}\frac{dy}{dt} + \frac{\cos\delta}{\mu}\frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

woraus sich unmittelbar die Werthe für die Aberration ergeben, sobald die Ausdrücke $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ bekannt sind. Nimmt man den Aequator als Fundamentalebene an, so sind, wenn man mit $\odot$ die Sonnenlänge, mit $R$ die Entfernung derselben von der Erde und mit $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik bezeichnet, mit Vernachlässigung der Sonnenbreiten, die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten der Erde:

$$x = -R\cos\odot$$
$$y = -R\sin\odot\cos\varepsilon$$
$$z = -R\sin\odot\sin\varepsilon$$

Würde man die Ekliptik als Fundamentalebene annehmen, so wäre in der Folge nur $\varepsilon$ der Null gleich zu setzen.

Nennt man $v$ die wahre Anomalie der Sonne, $\pi$ die Länge des Perigäums der Sonne, die als Konstante vorausgesetzt wird, so ist da die Sonnenbreite gleich Null angenommen wird

$$\odot = \pi + v$$
$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

und demnach

$$\frac{dx}{dt} = -\cos\odot\frac{dR}{dt} + R\sin\odot\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sin\odot\cos\varepsilon\frac{dR}{dt} - R\cos\odot\cos\varepsilon\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\sin\odot\sin\varepsilon\frac{dR}{dt} - R\cos\odot\sin\varepsilon\frac{dv}{dt}$$

Um nun $\frac{dR}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ von der grossen Achse der Erdbahn oder vielmehr von ihrer täglichen mittleren siderischen Bewegung und dem Orte in der Bahn abhängig zu machen, müssen $dv$ und $dR$ als Funktionen von $dM$ dargestellt werden. Es ist nach pag. 47

$$M = E - e\sin E$$
$$r = a\,(1 - e\cos E)$$

demnach ist

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE = \frac{R}{a}\,dE$$

Weiter fand sich bei der Integration für die elliptische Bewegung auf pag. (47)

$$r\,dv = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\,dE$$

oder auf den vorliegenden Fall übertragen und unter Berücksichtigung dass ist:

$$e = \sin\varphi$$
$$R\,dv = a\cos\varphi\,dE$$

Demnach wird

$$dM = \frac{R^2}{a^2\cos\varphi}\,dv$$

Weiter findet sich

$$dR = ae \sin E\, dE$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (8) auf pag. 48

$$dR = R \sin v \operatorname{tg} \varphi\, dE$$

Es ist also

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{R^2} \cos \varphi \frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = a \operatorname{tg} \varphi \sin v \frac{dM}{dt}$$

wobei $\frac{dM}{dt}$ eine Konstante ist, sobald der Himmelskörper, der in Betracht kommt, bestimmt ist; für vorliegenden Fall ist es die Erde. Setzt man nun die eben gefundenen Ausdrücke in die früher aufgestellten Relationen ein und bedenkt, dass nach

$$R = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

sich leicht findet

$$\frac{a \cos \varphi^2}{R} = 1 + \sin \varphi \cos v$$

so wird man haben für die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{\sin \odot + \sin \varphi \sin \pi\}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \cos \varepsilon \{\cos \odot + \sin \varphi \cos \pi\}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \sin \varepsilon \{\cos \odot + \sin \varphi \cos \pi\}$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichungen (1) einzusetzen, da aber diese Gleichungen als gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{\mu}$ enthalten, so kann man mit diesem auch die übrigen als gemeinschaftliche Faktoren auftretenden Grössen zweckmässig vereinigen, und setzt man zur Abkürzung

$$f = \frac{a}{\mu \cos \varphi} \frac{dM}{dt}$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -f\{\sin \alpha \sin \odot + \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon\} \sec \delta \\ &\quad - \sin \varphi f\{\sin \alpha \sin \pi + \cos \alpha \cos \pi \cos \varepsilon\} \sec \delta \\ \delta' - \delta &= f\{\cos \odot\ (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \odot \cos \alpha \sin \delta\} \\ &\quad + \sin \varphi f\{\cos \pi\ (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \pi \cos \alpha \sin \delta\} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die mit $\sin \varphi$ multiplicirten Glieder sind bis auf Grössen zweiter Ordnung konstant für einen gewissen Fixstern und können deshalb durchaus vernachlässigt werden, weil dieselben dem Sternorte schon anhaften; nicht so kann diess geschehen, wenn man eine Planetenbahn berechnen will und daher die Planetenorte vollständig von der Aberration befreien muss; da muss dieses Glied mitgenommen werden, wenn man es nicht wegen seiner Kleinheit, also aus praktischen Gründen, weglassen will. Die Grösse $f$ kann auf zweifache Weise ermittelt werden; vorerst durch die direkte Beobachtung der Fixsterne, wodurch der Faktor $f$ unmittelbar bekannt wird oder durch die direkte Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ($\mu$) in Verbindung mit bekannten Bahnelementen der Erde.

O. Struve hat durch sehr sorgfältige Beobachtungen nach der ersten Methode den Werth gefunden

$$f = 20''4451$$

um aus diesem Werthe $\mu$ berechnen zu können, entlehne ich aus Le-Verrier's Sonnentafeln

die mittlere tägliche siderische Bewegung der Erde $= 59' \, 8'' 193$

die Excentricität der Erdbahn in Bogenmass $= 3459'' 28$

Da für die Erdbahn $a = 1$ ist, so findet sich die Zeit (in Sekunden), welche das Licht braucht, um die Entfernung 1 zu durcheilen

$$\text{Lichtzeit} = f \frac{\cos \varphi}{dM} 86400 = 497^s 78$$

Delambre hat nach der zweiten Methode direkt die Lichtzeit berechnet nach den Verfinsterungen der Jupitersatelliten und dieselbe gefunden: $493^s 15$; daraus wird

$$f = 20'' 255$$

Bedenkt man die Unsicherheit, die bei den letztgenannten Beobachtungen sehr beträchtlich ist, so wird man der ersteren Angabe (Struve's Werth) den Vorzug geben; diese Angabe wurde auch durch anderweitige Beobachtungsreihen mehrfach als sehr nahe richtig bestätigt gefunden. Klinkerfues hat in seinem Werke über die Fixsternaberration eine Erklärung dieser Differenz aus theoretischen Betrachtungen abzuleiten versucht, da aber noch gerechte Bedenken sich der daselbst gegebenen Erklärung entgegenstellen, so dürfte die eben angedeutete Wahl der Konstanten gestattet sein.

Der konstante Faktor $f \sin \varphi$ findet sich nach den obigen Angaben unter Annahme des Werthes von Struve

$$f \sin \varphi = 0'' 3429.$$

Die Berechnung der Aberration für den Aequator ist ziemlich unbequem und man muss durch Einführung von Hilfswinkeln dieselbe für die logarithmische Berechnung zu Recht legen. Diess kann etwa auf die folgende Weise geschehen:

$$\begin{aligned}
\sec \delta \cos \alpha \cos \varepsilon &= a \sin A \\
\sec \delta \sin \alpha &= a \cos A \\
\sin \alpha \cos \varepsilon &= m \cos M \\
- \sin \varepsilon &= m \sin M \\
m \sin (M + \delta) &= b \sin B \\
- \sin \delta \cos \alpha &= b \cos B
\end{aligned}$$

dann ist:

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha &= - 20'' 445 \, a \sin (A + \odot) - 0'' 343 \, a \sin (A + \pi) \\
\delta' - \delta &= \phantom{-} 20'' 445 \, b \sin (B + \odot) + 0'' 343 \, b \sin (B + \pi) \\
\pi &= \phantom{-} 280^0 21' 21'' + 61'' 70 \, (t - 1850)
\end{aligned}$$

Diese Methode der Berechnung oder die Benützung der Gauss'schen Hilfstafeln ist aber unzweckmässig, wenn man, was wol stets der Fall sein wird, eine Ephemeridensammlung bei der Hand hat; indem in denselben mit dem Argumente »Zeit« die Werthe $h$, $H$ und $i$ gefunden werden, die bestimmt sind durch

$$-f \sin \odot = h \cos H$$
$$-f \cos \odot \cos \varepsilon = h \sin H$$
$$h \sin H \operatorname{tg} \varepsilon = i$$

Alle diese Werthe sind nur mit der Zeit veränderlich und gestatten eine sehr bequeme Berechnung des ersten Theils (der von sin $\varphi$ unabhängige Theil) der Aberration. Es wird nämlich durch Substitution in (2)

$$(\alpha' - \alpha)_I = h \sin (H + \alpha) \sec \delta$$
$$(\delta' - \delta)_I = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta$$

welche Formeln man bei der Berechnung der Aberration eines Fixsternes anzuwenden hat.

Für die Berechnung des zweiten Theils der Aberration lassen sich ähnliche zweckmässige Ausdrücke aufstellen, die ebenfalls mit der Zeit veränderlich sind; diese Aenderungen mit der Zeit sind sehr gering, da $\pi$ nur eine verhältnissmässig geringe säkulare Aenderung erfährt. Setzt man nämlich

$$-f \sin \varphi \cos \pi \cos \varepsilon = h_0 \sin H_0$$
$$-f \sin \varphi \sin \pi = h_0 \cos H_0$$
$$-f \sin \varphi \cos \pi \sin \varepsilon = i_0$$

so ist sofort

$$(\alpha' - \alpha)_{II} = h_0 \sin (H_0 + \alpha) \sec \delta$$
$$(\delta' - \delta)_{II} = h_0 \cos (H_0 + \alpha) \sin \delta + i_0 \cos \delta$$

Die Werthe $h_0$, $H_0$ und $i_0$ habe ich nach Le-Verrier berechnet für das gegenwärtige Jahrhundert, und gefunden

| | $\log h_0$ | $H_0$ | $i_0$ |
|---|---|---|---|
| 1800 | 9.5342 | 351° 16′ | — 0″022 |
| 1850 | 9.5340 | 350 29 | — 0.024 |
| 1900 | 9.5338 | 349 42 | — 0.026 |

Das zweite Glied der Aberration in Deklination des vorstehenden Ausdruckes ist so klein, dass man dasselbe wird wol stets weglassen könen.

Für die Ekliptik werden die Formeln viel einfacher. Setzt man statt $\alpha$ und $\delta$ die Werthe $\lambda$ und $\beta$ und nimmt, wie diess die Transformation fordert, $\varepsilon = 0$ an, so wird

$$\lambda' - \lambda = -20''445 \cos (\odot - \lambda) \sec \beta - 0''343 \cos (\pi - \lambda) \sec \beta$$
$$\beta' - \beta = -20''445 \sin (\odot - \lambda) \sin \beta - 0''343 \sin (\pi - \lambda) \sin \beta$$
$$\pi = 280^\circ 21' 21'' + 61''70 \, (t - 1850)$$

### b. Planetenaberration.

Seien $X$, $Y$ und $Z$ die Coordinaten der Erde im Momente, wo das Licht den Himmelskörper verlässt, $X_0$, $Y_0$ und $Z_0$ dieselben Coordinaten zur Zeit der Beobachtung; sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die geocentrischen Coordinaten, die zu $X$, $Y$ und $Z$ gehören, und $\xi'$ $\eta'$ und $\zeta'$ dieselben, aber bezogen auf die Coordinaten der Erde zur Zeit der Beobachtung, so bestehen die Relationen

$$X + \xi = X_0 + \xi'$$
$$Y + \eta = Y_0 + \eta'$$
$$Z + \zeta = Z_0 + \zeta'$$

Fasst man nun die Unterschiede $X_0 - X$, $Y_0 - Y$ und $Z_0 - Z$ als differentielle Grössen auf und schreibt dafür $dx$, $dy$ und $dz$, so wird

$$\xi' = \xi - dx$$
$$\eta' = \eta - dy$$
$$\zeta' = \zeta - dz$$

oder durch Einführung der polaren Coordinaten

$$\Delta' \cos\alpha' \cos\delta' = \Delta \cos\alpha \cos\delta - dx$$
$$\Delta' \sin\alpha' \cos\delta' = \Delta \sin\alpha \cos\delta - dy$$
$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - dz.$$

Daraus ergibt sich ganz so wie diess für die Fixsternaberration ausgeführt wurde

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{1}{\Delta}\{-\sin\alpha \sec\delta\, dx + \cos\alpha \sec\delta\, dy\} \\ \delta' - \delta &= -\frac{1}{\Delta}\{-\sin\delta \cos\alpha\, dx - \sin\delta \sin\alpha\, dy + \cos\delta\, dz\} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Man kann diese Unterschiede als parallaktische Verschiebung auffassen, veranlasst durch die Bewegung der Erde von $X, Y, Z$ nach $X_0$, $Y_0$ und $Z_0$; $dx, dy$ und $dz$ werden je nach der Zeit, welche das Licht braucht, um vom Himmelskörper zum Beobachter zu gelangen, sehr verschieden gross sein; das Zeitintervall (Lichtzeit) ist aber, wenn ich dasselbe mit $dt$ bezeichne, bestimmt durch

$$dt = \frac{\Delta}{\mu}$$

wo $\mu$ dieselbe Bedeutung hat, wie dasselbe bei der Fixsternaberration genommen wird, nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Zeiteinheit. Substituirt man nun in der Gleichung (3) die Relation

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\mu\, dt}$$

so wird

$$\alpha' - \alpha = -\frac{1}{\mu}\left\{-\sin\alpha \sec\delta \frac{dx}{dt} + \cos\alpha \sec\delta \frac{dy}{dt}\right\}$$
$$\delta' - \delta = -\frac{1}{\mu}\left\{-\sin\delta \cos\alpha \frac{dx}{dt} - \sin\delta \sin\alpha \frac{dy}{dt} + \cos\delta \frac{dz}{dt}\right\}$$

welcher Ausdruck in der Form vollkommen demjenigen gleicht, der für die Fixsternaberration erhalten wurde, nur ist das Zeichen entgegengesetzt; daraus zieht man den Schluss: die durch die Planetenaberration bedingte parallaktische Verschiebung ist gleichwerthig der Fixsternaberration, das Vorzeichen ist aber verschieden.

Man kann mit Beziehung auf das eben Abgeleitete drei Methoden angeben, wie man den Ort eines Kometen oder Planeten vom Einflusse der Aberration befreien kann. Nennt man die Zeit der Beobachtung $t$, die Zeit, wann das Licht vom Himmelskörper ausging, $T$, so ist

$$dt = t - T$$

Für die erste Methode ergibt sich die folgende Vorschrift. Man zieht von der beobachteten Zeit $t$, $dt$ (Lichtzeit für die Entfernung $\Delta$) ab, dann ist der wahre Ort zur

Zeit $T$ identisch mit dem scheinbaren zur Zeit $t$; denn zur Zeit der Beobachtung kompensirt die Fixsternaberration die Planetenaberration (parallaktische Verschiebung) völlig, so dass die scheinbare Sehlinie parallel der Verbindungslinie des Himmelskörpers und des Erdortes zur Zeit $T$ wird. Diese Methode kann man anwenden, wenn man Beobachtungen mit Ephemeriden, die stets wahre Orte geben, vergleicht; man wird mit Hilfe der Distanz die Lichtzeit berechnen, dieselbe von der Beobachtungszeit abziehen und mit dieser korrigirten Zeit den Ephemeridenort interpoliren und mit der Beobachtung vergleichen. Wenn die Distanz des Himmelskörpers bekannt ist, so ist die eben angedeutete Methode die bequemste.

Die zweite Methode ist eine unmittelbare Folge der ersteren; will man nämlich die Beobachtungszeit $t$ selbst beibehalten und nicht auf die Zeit $T$ zurückgehen, so bemerke man, dass der wahre Ort zur Zeit $t$ identisch ist mit dem scheinbaren zur Zeit $t + dt$, alle Aenderungen vermöge ihrer Kleinheit linear vorausgesetzt. Man berechnet also mit Hilfe einer Ephemeride die scheinbare Bewegung des Himmelskörpers in der Zeit $dt$, addirt diese zur Beobachtung und hat so den wahren Ort zur Zeit $t$. Diese Methode ist bei weitem weniger zu empfehlen, als die vorausgehende, und ist auch desshalb einer Beschränkung unterworfen, dass dieselbe ausser der Distanz die scheinbare Bewegung als bekannt voraussetzt, während die erstere Methode nur die Kenntniss der Distanz erfordert. Diese zweite Methode würde man dann mit Vortheil anwenden, wenn die Forderung gestellt würde, eine Ephemeride zu berechnen, die den scheinbaren Ort des Himmelskörpers und nicht den wahren angibt.

Die dritte Methode endlich, die mit Vortheil bei ersten Bahnbestimmungen benutzt wird, besteht darin, dass man die zur Zeit $t$ beobachteten Coordinaten von der Fixsternaberration (aber vollständig) befreit, und die so korrigirte Beobachtung als wahren Ort des Himmelskörpers annimmt, zur Zeit $T$ gesehen vom Erdorte, der zur Zeit der Beobachtung ($t$) gehört. Diese Methode eignet sich desshalb besonders für erste Bahnbestimmungen, da der Erdort und die aus demselben abgeleiteten Hilfsgrössen ungeändert bleiben.

### 4. Aenderungen der Fundamentalebenen im Raume.

Die Lage der Fundamentalebenen (Aequator und Ekliptik) ist säkularen und periodischen Störungen unterworfen. Die säkularen Aenderungen fasst man unter dem Namen der Präcession zusammen, die periodischen werden in den Begriff der Nutation einbezogen. Die Folge dieser Störungen ist, dass die Lage des Aequinoctialpunktes ebenfalls Aenderungen erleidet. Befreit man eine Beobachtung vom Einflusse der Aberration und den periodischen Aenderungen der Fundamentalebenen (Nutation), so sagt man, dass diese Beobachtung auf das mittlere Aequinoctium der Zeit der Beobachtung bezogen ist. Durch Anbringung der Präcession kann man die Reduction auf ein beliebiges anderes mittleres Aequinoctium ausführen. Befreit man die Beobachtung nur von dem Einflusse der Aberration, so ist diese Beobachtung auf das wahre Aequinoctium reducirt, die Beobachtung selbst ohne weitere Korrektion gilt für das scheinbare Aequinoctium.

a. Präcession.

Die säkularen Aenderungen der Fundamentalebenen, die Präcession, lassen sich auf die Form bringen

$$x = at + bt^2 + ct^3 + \ldots$$

d. h. nach steigenden Potenzen der Zeit entwickeln. Die Zeiteinheit ist hier das Jahr und es kann hierfür gewählt werden das julianische, tropische oder siderische. Das tropische Jahr fällt mit dem bürgerlichen im Mittel zusammen, indem die Periode der Jahreszeiten sich mit jenem abwickelt, hat aber vor diesem den Vorzug, dass dasselbe der Hauptsache nach, wenn man kleine Glieder zweiter Ordnung in der Präcession vernachlässigt, konstant ist, während das bürgerliche Jahr stets eine volle Anzahl Tage enthält, desshalb aber, um mit dem tropischen Jahre gleichen Schritt zu halten, in gewissen Jahren (Schaltjahren) einen Tag einschalten muss. Der Anfang des tropischen Jahres wird nach Bessel's Vorgange mit dem Augenblick zusammenfallend betrachtet, in dem die mittlere Länge der Sonne mehr dem konstanten Theil der Aberration ($-20''45$) gleich $280^\circ$ ist, gezählt vom zugehörigen mittleren Aequinoctium. Bessel zählt in diesem Moment: Januar 0.0, welches Datum identisch ist mit dem 31.0 December des vorausgehenden Jahres. Während der Anfang des julianischen und siderischen Jahres sich immer mehr von der bürgerlichen Zeitrechnung entfernt, bleibt die Differenz des Anfanges des tropischen und bürgerlichen Jahres immer innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen und die Einführung dieser Zeiteinheit bietet daher gewisse Vortheile, die bei der Berechnung der Präcession als massgebend für die Wahl des tropischen Jahres betrachtet werden können. Die in den Ephemeriden enthaltenen Reduktionsgrössen zur Uebertragung vom mittleren Aequinoctium des Jahresanfanges auf das scheinbare gelten für den oben definirten Jahresanfang (dies reductus). Es wird daher in der Folge stets das tropische Jahr als Einheit angesehen und der Jahresanfang auf den des annus fictus bezogen.

Die Relation zwischen dem Anfange des annus fictus und des bürgerlichen Jahres soll zunächst entwickelt und die nothwendigen numerischen Substitutionen nach Le-Verrier's Sonnentafeln ausgeführt werden.

Im Verlaufe eines Jahrhunderts wickelt sich die Periode eines bürgerlichen Jahres ebenso ab, wie die des julianischen, nur das Ende macht bekanntlich meistens eine Ausnahme. Würde der astronomische Jahresanfang mit dem 0.0 Januar des bürgerlichen zusammenfallen und wäre das tropische Jahr gleich dem julianischen, so würde für das ganze Jahrhundert die Formel gelten

$$\text{Jahresanfang} = 0.0 \text{ Januar} + \tfrac{1}{4} F \qquad (1)$$

wo $F$ den Rest bezeichnet, der nach der Division der Jahreszahl durch 4 übrig bleibt; ist derselbe aber gleich Null, d. h. ist die Zahl durch 4 theilbar, so muss für $F$ der Werth 4 eingesetzt werden, da der Schalttag erst am 24. Februar eingeschoben wird. Auf den Abschluss eines Jahrhunderts und der damit verbundenen Abänderung wird nicht Rücksicht genommen, die folgende Formel gilt bloss für das 19. Jahrhundert. Die unter (1) angesetzte Formel bedarf jedoch zweier Korrektionen, da zwei fehlerhafte

Voraussetzungen gemacht wurden; nämlich es fällt der Jahresanfang im astronomischen Sinne genommen nicht mit dem 0.0 Januar zusammen, und ferner unterscheidet sich das tropische Jahr um eine geringe Grösse vom julianischen. Am 1.0 Januar 1850 mittlere Pariser Zeit, welches die Hauptepoche bei Le-Verrier ist, findet sich nach den Tafeln die mittlere Länge der Sonne $= 280^0\ 46'\ 43''51$ und die tägliche tropische Bewegung: $3548''3304$. Für 1850 fällt also der astronomische Jahresanfang vor den 1.0 Januar und zwar um eine Grösse die gleich ist der Zeit, welche die Sonne braucht um $46'\ 43''51$ in ihrer mittleren tropischen Bewegung zurückzulegen; man findet diese Zeit: 0.790093 mittlere Sonnentage.

Für 1850 ist aber $\frac{1}{4} F = 0.5$. Mit Rücksicht auf diese Korrektion geht die Formel (1) über in

$$\text{Jahresanfang} = 0.0 \text{ Januar} - 0.290093 + \tfrac{1}{4} F \qquad (2)$$

Es erübrigt aber auch die zweite Formel (2) wegen dem Unterschiede des julianischen und tropischen Jahres zu verbessern. Die tropische Bewegung der Sonne in einem julianischen Jahre ist nach Le-Verrier: $360^0 + 27''6784$. Diese Grösse ist jedoch mit der Zeit veränderlich, wiewol die mittlere siderische Bewegung frei ist von jeder säkularen Störung. Die jährliche Aenderung dieser Grösse ist aber nach denselben Tafeln: $+ 0''00022144$.

Bezeichnet man mit $t$ die seit der Hauptepoche verflossene Zeit in julianischen Jahren, so berechnet man die mittlere tropische Bewegung in dieser Zeit nach

$$(360^0 + 27''6784)\ t + 0''00011072\ t^2$$

drückt man nun den Einfluss dieser Korrektion mit Hilfe der bekannten oben mitgetheilten mittleren täglichen tropischen Bewegung der Erde in Tagen aus, so ist die vollständige jetzt völlig genaue Formel zur Berechnung des Jahresanfanges

$$\text{Jahresanfang} = 0.0 \text{ Januar} - 0.290093 - 0.0078004020\,t - 0.000000301203\,t^2 + \tfrac{1}{4} F \quad (3)$$

geltend für den Pariser Meridian. Bedenkt man, dass dieses Moment für die gebräuchlichen Reduktionen auf drei Decimaltheile des Tages nur bekannt zu sein braucht, um mehr als ausreichend genaue Resultate zu erlangen, so kann man diesen Ausdruck wesentlich abkürzen und verwandelt man gleichzeitig unter der Annahme von $44^m\ 14^s0$ als Längendifferenz zwischen Paris-Berlin die Pariser Zeit in solche die für den Meridian von Berlin gilt, so ist mit genügender Genauigkeit für das gegenwärtige Jahrhundert:

$$\text{Jahresanfang} = (-0.2594 - 0.00780\,t + \tfrac{1}{4} F) \text{ Januar Berliner Zeit} \qquad (4)$$

$t$ muss wie schon oben bemerkt wurde von 1850 an gezählt werden.

Nachdem nun das Moment des astronomischen Jahresanfanges festgestellt ist, gehe ich auf die Präcession selbst über. Es ist nothwendig eine fixe Ebene auf welche die übrigen Aenderungen bezogen werden zu wählen und ich nehme mit Le-Verrier die Hauptepoche für 1850 und betrachte die Ekliptik des Jahresanfanges 1850 als fixe Ebene. Die Schiefe der Ekliptik ist für diese Zeit $= 23^0\ 27'\ 31''24$. Ich habe bei dieser Annahme Le-Verrier's Angabe um $0''59$ vermindert; die Rechtfertigung dieser Thatsache ist einfach darin begründet, dass Le-Verrier mit einer wesentlich ungenauen Abnahme der Schiefe der Ekliptik den Werth von $\varepsilon$ für 1850 ableitet, welches Zeitmoment völlig ausserhalb der Beobachtungsepochen liegt. Das Rückweichen des

Aequators auf der fixen Ekliptik (die lunisolare Präcession) bezeichne ich mit $l_1$; das Rückweichen auf der beweglichen Ekliptik mit $l$ (die allgemeine Präcession), die Schiefe der fixen Ekliptik gegen den jeweiligen Aequator mit $\varepsilon_0$, die Neigung der beweglichen Ekliptik gegen den gleichzeitigen Aequator mit $\varepsilon$. Nehme ich nun als Einheit das tropische Jahr, so finde ich nach Le-Verrier für 1850.0:

$$l = 50''23465\, t + 0''000\,11288\, t^2$$
$$l_1 = 50''36924\, t - 0''000\,10881\, t^2$$
$$\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 31''24 - 0''47593\, t - 0''000\,00149\, t^2$$
$$\varepsilon_0 = 23^\circ\, 27'\, 31''24 + 0''000\,00719\, t^2$$

Für die praktische Anwendung ist aber diese Form der Konstanten keineswegs zweckmässig und es müssen desshalb jetzt die wichtigsten Transformationen vorgenommen werden. Um die Ideen zu fixiren, wird es zweckmässig sein, eine Figur zu Hilfe zu nehmen. Stellt man sich die Durchschnitte einer Ebene mit der Himmelskugel als Kreise vor, so kann Fig. I als Schema dienen; die in derselben gezogenen Kreise stellen grösste Kreise auf der Himmelskugel vor, $\varepsilon\,\varepsilon_0$ sei ein Bogen der angenommenen fixen Ekliptik zur Zeit $t = 0$; $\varepsilon\,\varepsilon_1$ gehöre jedoch einer anderen Ekliptik an, die zur Zeit $t_0$ stattfindet; es ist also bei $\varepsilon$ der niedersteigende Knoten der beweglichen Ekliptik auf der fixen; bezeichnet man die Länge dieses Punktes mit $180^\circ + \Pi$, so ist $\Pi$ die Länge des aufsteigenden Knotens. Der sphärische Winkel $\varepsilon_0\,\varepsilon\,\varepsilon_1$ ist die Neigung der beweglichen Ekliptik gegen die fixe und dieselbe wird mit $\pi$ bezeichnet. Ganz analog der gewählten Bezeichnung für die Ekliptik bezeichne ich mit $A_0\,A$ den Aequator zur Zeit der Hauptepoche, mit $A\,A_1$ den zur Zeit $t_0$ gehörigen Aequator; die gerade Aufsteigung des aufsteigenden Knotens dieses Aequators im fixen sei $P$, der Winkel $A_0\,A\,A_1$ wird mit $n$ bezeichnet.

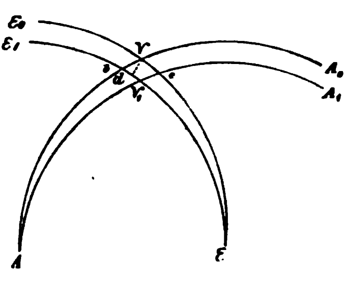



Fig. I.

Der Bogen $\gamma c$ ist die Lunisolarpräcession ($l_1$), der Punkt $\gamma$ der Ekliptik ist während der Zeit $t$ bis $d$ fortgerückt, der Bogen $d\gamma_1$ ist demnach die allgemeine Präcession ($l$) für dieses Zeitintervall; $\varepsilon_0\,c\,A$ ist die Schiefe der fixen Ekliptik gegen den beweglichen Aequator ($\varepsilon_0$) zur Zeit $t_0$, während $\varepsilon_1\,\gamma_1\,A$ die zu dieser Zeit stattfindende mittlere Schiefe ($\varepsilon$) ist. Der Bogen $c\gamma_1$, den ich der Kürze halber mit $a$ bezeichnen will, wird die Präcession durch die Planeten genannt.

Ich wende mich zuerst zu den Relationen, die für die Ekliptik gelten und da ist es vor allem wichtig, aus den obigen Fundamentalangaben die Werthe $\Pi$ und $\pi$ zu ermitteln. Die Betrachtung des sphärischen Dreieckes $c\,\varepsilon\,\gamma_1$ wird die gewünschte Lösung gewähren. Berücksichtigt man die früher gegebenen Definitionen der Bogen und Winkel, so wird man für dieses Dreieck finden:

| Seiten | Winkel |
|---|---|
| $c\,e = 180^\circ - \Pi - l_1$ | $c\,\gamma_1\,\varepsilon = \varepsilon$ |
| $\gamma_1\,\varepsilon = 180^\circ - \Pi - l$ | $\gamma_1\,c\,\varepsilon = 180^\circ - \varepsilon_0$ |
| $\gamma_1\,c = a$ | $\gamma_1\,\varepsilon\,c = \pi$ |

Man kann sofort drei Relationen zwischen diesen Werthen aufstellen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\sin\{\Pi+\tfrac{1}{2}(l_1+l)\} = \sin\tfrac{1}{2}(l_1-l)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_0) \quad \ldots (\mathrm{I})$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\cos\{\Pi+\tfrac{1}{2}(l_1+l)\} = \cos\tfrac{1}{2}(l_1-l)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0) \quad \ldots (\mathrm{II})$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_0) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l_1-l)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0) \quad \ldots (\mathrm{III})$$

Die nächste Aufgabe wird nun sein die Werthe von $\pi$, $\Pi$ und $a$ als Funktionen der Zeit darzustellen. Löst man in (I) und (II) den Sinus und Cosinus der Summen der Winkel $\Pi$ und $\frac{1}{2}(l_1+l)$ auf und bezeichnet die so aus (I) entstehende Relation mit (IV), die aus (II) gebildete mit (V) und entwickelt weiter, indem gesetzt wird:

$$(\mathrm{IV})\cos\tfrac{1}{2}(l_1+l) - (\mathrm{V})\sin\tfrac{1}{2}(l_1+l) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\sin\Pi$$

$$(\mathrm{IV})\sin\tfrac{1}{2}(l_1+l) + (\mathrm{V})\cos\tfrac{1}{2}(l_1+l) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\cos\Pi$$

so findet man, indem man die angezeigten Substitutionen ausführt:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\sin\Pi = \cos\tfrac{1}{2}(l_1+l)\sin\tfrac{1}{2}(l_1-l)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_0) - \sin\tfrac{1}{2}(l_1+l)\cos\tfrac{1}{2}(l_1-l)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\cos\Pi = \sin\tfrac{1}{2}(l_1+l)\sin\tfrac{1}{2}(l_1-l)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_0) + \cos\tfrac{1}{2}(l_1+l)\cos\tfrac{1}{2}(l_1-l)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

für $\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_0)$ wird man schreiben dürfen $\varepsilon_0+\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)$, welche Relation für die folgenden Entwicklungen nöthig ist. Bedenkt man das ist:

$$\cos\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \ldots$$

$$\sin\alpha = \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3 + \ldots$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \ldots$$

so wird es ersichtlich, dass man alle Glieder der zweiten Ordnung in Bezug auf die Zeit in den eben entwickelten Ausdrücken mitnimmt, wenn man für die Sinus und Tangenten der kleinen Winkel die Bögen und für die Cosinus dieser Winkel die Einheit substituirt. Es gehen demnach die eben entwickelten Relationen über in:

$$\pi\sin\Pi = (l_1-l)\operatorname{tg}\varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\left\{\frac{l_1-l}{\cos^2\varepsilon_0} - (l_1+l)\right\}$$

$$\pi\cos\Pi = \tfrac{1}{2}(l_1{}^2-l^2)\operatorname{tg}\varepsilon_0 + (\varepsilon-\varepsilon_0)\left\{1+\frac{l_1{}^2-l^2}{4\cos^2\varepsilon_0}\right\}$$

Nun wird es keine Schwierigkeiten haben, diese Ausdrücke nach steigenden Potenzen der Zeit zu entwickeln, denn man hat die Formen

$$l = \lambda t + \lambda' t^2$$

$$l_1 = \lambda_1 + \lambda_1' t^2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0{}^0 + \eta t + \eta' t^2$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0{}^0 + \eta_1' t^2$$

Substituirt man diese Ausdrücke, deren numerische Coefficienten oben angeführt sind, und ordnet Alles nach Potenzen der Zeit und lässt wieder wie früher die Glieder dritter Ordnung weg, so wird man erhalten

$$\pi\sin\Pi = mt + m' t^2$$

$$\pi\cos\Pi = nt + n' t^2$$

wo die konstanten Coefficienten die folgende Bedeutung haben:

$$m = (\lambda_1 - \lambda)\operatorname{tg}\varepsilon_0{}^0$$

$$m' = (\lambda_1' - \lambda')\operatorname{tg}\varepsilon_0{}^0 + \frac{\lambda_1-\lambda}{2\cos^2\varepsilon_0}\,\eta\sin 1'' - \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda)\,\eta\sin 1''$$

$$n = \eta$$

$$n' = \tfrac{1}{2}(\lambda_1{}^2-\lambda^2)\operatorname{tg}\varepsilon_0{}^0\sin 1'' + (\eta'-\eta_1')$$

In diesen Ausdrücken habe ich überall statt tg $\varepsilon_0$ den Werth tg $\varepsilon_0{}^0$ angesetzt, da $\varepsilon_0{}^0$ nur von $\varepsilon_0$ um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden ist, also daraus nur Fehler dritter Ordnung entstehen. Aus den Werthen für $\pi$ sin $\Pi$ und $\pi$ cos $\Pi$ wird es nicht schwierig sein die Werthe für $\Pi$ und $\pi$ in der verlangten Form herzustellen. Es wird sein:

$$\operatorname{tg}\Pi = \frac{m}{n} + \left(\frac{m'}{n} - \frac{n'm}{n.n}\right)\frac{t}{\sin 1''}$$

woraus sofort folgt, wenn man tg $\Pi_0 = \frac{m}{n}$ annimmt:

$$\Pi = \Pi_0 + \left(\frac{m'}{n} - \frac{n'm}{n.n}\right)\frac{\cos^2 \Pi_0}{\sin 1''}\, t$$

$$\pi = (m \sin \Pi_0 + n \cos \Pi_0)\, t + (m' \sin \Pi_0 + n' \cos \Pi_0)\, t^2$$

Behandelt man in ähnlicher Weise die Gleichung (III), so wird man zunächst erhalten:

$$a = \frac{l_1 - l}{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

oder aufgelöst nach steigenden Potenzen von $t$:

$$a = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\cos \varepsilon_0{}^0}\, t + \left\{\frac{\lambda_1' - \lambda'}{\cos \varepsilon_0{}^0} + \frac{(\lambda_1 - \lambda)\, \eta \sin \varepsilon_0{}^0 \sin 1''}{2 \cos^2 \varepsilon_0{}^0}\right\} t^2$$

Die numerische Substitution in den bisher aufgestellten Formeln lässt der Reihe nach finden:

$$\pi \sin \Pi = + 0''05841\, t + 0''000\,01968\, t^2$$
$$\pi \cos \Pi = - 0''47593\, t + 0.000\,00556\, t^2$$
$$\pi = + 0''47950\, t - 0.000\,00312\, t^2$$
$$\Pi = 173^\circ\, 0'\, 12'' - 8''694\, t$$
$$a = + 0''14672\, t - 0''000\,24174\, t^2$$

Ich werde nun die analogen Grössen für den Aequator ableiten. Hierbei kommt das sphärische Dreieck $\Upsilon A c$ in Betracht. Die Seiten $\Upsilon A$ und $cA$ werden vermöge der Bewegung des Aequators nahe an 90° sein. Bei $A$ ist der aufsteigende Knoten des beweglichen Aequators in Bezug auf den fixen. Man hat wieder:

| Seiten | Winkel |
|---|---|
| $\Upsilon A = P = 90^\circ - p$ | $\Upsilon c A = \varepsilon_0 + d\varepsilon_0$ |
| $cA = Q = 90^\circ - q$ | $c \Upsilon A = 180^\circ - \varepsilon_0$ |
| $\Upsilon c = l_1$ | $\Upsilon A c = n$ |

Die Relationen die hier in Betracht kommen sind:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p + q) = - \frac{\sin \frac{1}{2} d\varepsilon_0}{\sin(\varepsilon_0 + \frac{1}{2} d\varepsilon_0)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2} l_1$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p - q) = \frac{\cos(\varepsilon_0 + \frac{1}{2} d\varepsilon_0)}{\cos \frac{1}{2} d\varepsilon_0} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} l_1$$

$$\sin n = \frac{\sin(\varepsilon_0 + d\varepsilon_0) \sin l_1}{\sin P}.$$

Lässt man ähnlich wie früher die Glieder dritter Ordnung weg, so ist

$$180^\circ - (P + Q) = p + q = - \frac{2\eta_1'}{\lambda_1 \sin \varepsilon_0{}^0 \sin 1''}\, t + \frac{2\eta_1' \lambda_1'}{\lambda_1 \lambda_1 \sin \varepsilon_0{}^0}\, \frac{t^2}{\sin 1''}$$

$$Q - P = p - q = \lambda_1 \cos \varepsilon_0{}^0\, t + \lambda_1' \cos \varepsilon_0{}^0\, t^2$$

$$n = \lambda_1 \sin \varepsilon_0{}^0\, t + \lambda_1' \sin \varepsilon_0{}^0\, t^2$$

Der Ausdruck der allgemeinen Präcession in Rectascension ($m$) findet sich leicht aus der Relation:

$$m = Q - P - a$$

Die numerische Substitution lässt folgende Werthe finden:

$$P = 90^0 - 23''029\,t$$
$$m = 46''05938\,t + 0''000\ 14192\,t^2$$
$$n = 20''05137\,t - 0''000\ 04332\,t^2$$

Durch die eben gegebenen Werthe wird es möglich den Einfluss der Aenderungen der Fundamentalebenen auf die scheinbaren Orte der Gestirne zu ermitteln. Hierbei jedoch ist eine zweifache Aufgabe zu lösen. Der zuerst zu behandelnde Fall soll sich mit dem Einflusse beschäftigen, den die Präcession auf die Bahnlage eines Himmelskörpers ausübt und der zweite Theil wird sich mit dem Einflusse der Präcession auf den einzelnen Ort befassen.

Es sei in Fig. II, ganz die in Fig. I gewählte Bezeichnung beibehalten und der neu hinzugekommene Bogen $(B)\,(B)$ stelle den grössten Kreis vor, den die vorgelegte Bahnebene mit der Himmelskugel bildet. Bei $\Omega_0$ und $\Omega_1$ sind die aufsteigenden Knoten in der fixen und beweglichen Ekliptik; $\varepsilon_0\,\Omega_0\,B$ und $\varepsilon_1\,\Omega_1\,B$ sind die zugehörigen Neigungen $i_0$ und $i_1$. Die Neigungen werde ich nach den pag. 8 aufgestellten Prinzipien bis $180^0$ zählen und nehme daher auf die sonst übliche sehr unzweckmässige Unterscheidung von retrograder und direkter Bewegung keine Rücksicht. Der Bogen:

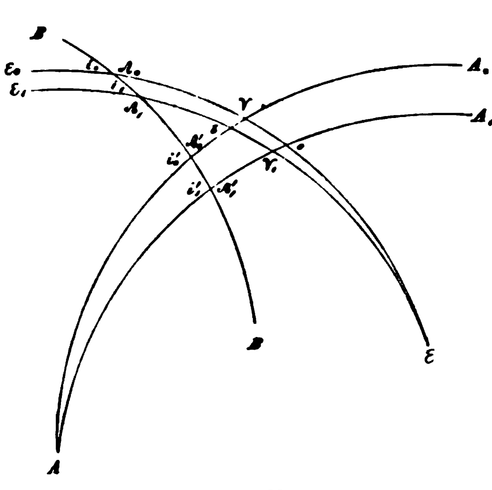



Fig. II.

$$\Omega_0\,\Omega_1 = d\omega$$

ist die Aenderung des Abstandes des Perihels vom Knoten, so weit diese von der Präcession abhängig ist. Bezeichnet man die analogen Grössen des Aequators durch Accente, so hat man für die Ekliptik und den Aequator beziehungsweise die beiden sphärischen Dreiecke: $\Omega_0\,\varepsilon\,\Omega_1$ und $\Omega_0'\,A\,\Omega_1'$ zu betrachten. Es sind wieder für:

| die Ekliptik | | den Aequator | |
|---|---|---|---|
| Seiten | Winkel | Seiten | Winkel |
| $\Omega_0 + 180^0 - \Pi$ | $180^0 - i_1$ | $P - \Omega_0'$ | $i_1'$ |
| $\Omega_1 + 180^0 - \Pi - l$ | $i_0$ | $P - \Omega_1' + m$ | $180 - i_0'$ |
| $d\omega$ | $\pi$ | $d\omega'$ | $n$ |

Das erstere Dreieck gewährt die folgenden Relationen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,(\Omega_1 - \Pi - l + d\omega) = \frac{\cos\frac{1}{2}\,(i_0 + \pi)}{\cos\frac{1}{2}\,(i_0 - \pi)}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,(\Omega_0 - \Pi)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,(\Omega_1 - \Pi - l - d\omega) = \frac{\sin\frac{1}{2}\,(i_0 + \pi)}{\sin\frac{1}{2}\,(i_0 - \pi)}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,(\Omega_0 - \Pi)$$

Das zweite Dreieck liefert:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega_1' - P - m + d\omega') = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_0' + n)}{\cos\frac{1}{2}(i_0' - n)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega_0' - P)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega_1' - P - m - d\omega') = \frac{\sin\frac{1}{2}(i_0' + n)}{\sin\frac{1}{2}(i_0' - n)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Omega_0' - P)$$

Vergleicht man diese vier Gleichungen, so sieht man, dass sowol für die Ekliptik als auch für den Aequator die Formen identisch sind. Man kann sich desshalb bei der weiteren Entwicklung nur auf die Betrachtung des einen Falles beschränken, da man sofort die Ausdrücke von der Ekliptik auf den Aequator durch geeignete Aenderungen der Buchstaben übertragen kann. Man wird setzen müssen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| statt | $\Omega_1 : \Omega_1'$ | statt | $d\omega : d\omega'$ |
| » | $\Omega_0 : \Omega_0'$ | » | $\Pi : P$ |
| » | $i_1 : i_1'$ | » | $\pi : n$ |
| » | $i_0 : i_0'$ | » | $l : m$ |

Auch ohne Ansicht der Formeln ist dieses Wechselverhältniss klar, da die hier gegenübergestellten Bezeichnungen Analoga sind.

Um nun die aufgestellten Gleichungen in eine geeignete Form zu bringen, um aus denselben direkt die Aenderungen des Knotens und des Perihels abzuleiten, nehme ich den bei der Parallaxe (pag. 28) bewiesenen Satz zu Hilfe, dass die Gleichungen von der Form

$$\operatorname{tg}\varphi' = g \operatorname{tg}\varphi$$

in eine Reihe entwickelt werden können von der folgenden Anordnung

$$\varphi' - \varphi = \frac{g-1}{g+1}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^2 \sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^3 \sin 6\varphi + \ldots$$

welche Reihe sehr rasch konvergirt, sobald nur der Werth $\frac{g-1}{g+1}$ sehr klein ist, was im vorliegenden Falle in der That stattfindet, da die Coefficienten nach Potenzen von $\pi$ vorschreiten. In der ersten Gleichung wird man setzen müssen:

$$\frac{g-1}{g+1} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i_0 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi$$

in der zweiten jedoch

$$\frac{g-1}{g+1} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2} i_0 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi$$

Geht man bis zu Gliedern zweiter Ordnung inclusive, so wird man zunächst erhalten

$$\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) - \tfrac{1}{2}d\omega = \tfrac{1}{2}l + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}i_0 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi \sin(\Omega_0 - \Pi) + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}i_0 \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\pi \sin 2(\Omega_0 - \Pi) + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0) + \tfrac{1}{2}d\omega = \tfrac{1}{2}l - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i_0 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi \sin(\Omega_0 - \Pi) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}i_0 \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\pi \sin 2(\Omega_0 - \Pi) + \ldots$$

Für die Tangenten von $\frac{1}{2}\pi$ kann der Bogen gesetzt werden, und durch Addition der Gleichungen wird erhalten

$$\Omega_1 = \Omega_0 + l + \operatorname{cotg} i_0 \pi \sin(\Omega - \Pi) + (\operatorname{cotg}^2 i_0 + \tfrac{1}{2})\,\pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\,\pi \cos(\Omega_0 - \Pi) \sin 1'' + \ldots$$

Ganz ähnliche Ausdrücke würde man für $d\omega$ erhalten, bedenkt man aber, dass die Länge des Perihels: $\pi_1 = \omega + \Omega$ ist, also

$$d\pi_1 = d\omega + d\Omega$$

und es für die praktische Anwendung in der Regel bequemer ist, die Aenderungen der

Lage des Perihels selbst zu kennen, so wird der hierzu nöthige Ausdruck einfach durch Verdopplung der zweiten oben entwickelten Reihe erhalten und gefunden

$$\pi_1 = \pi_1^0 + l - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i_0 \pi \sin(\Omega_0 - \Pi) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2} i_0 \pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\, \pi \cos(\Omega_0 - \Pi) \sin 1'' + \ldots$$

Um die Ausdrücke für die Aenderung der Neigung zu erhalten, bemerke man die Relation

$$tg\tfrac{1}{2}(i_0 + 180^0 - i_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0 - l)}{\cos\frac{1}{2}(\Omega_1 - 2\Pi - l + \Omega_0)} \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\pi$$

und ganz analoge Ausdrücke gelten für den Aequator. Substituirt man nun den eben gefundenen Werth von $\Omega_1$ und nimmt, da nur Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, das Glied erster Ordnung dieser Grösse mit, so wird man erhalten:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(i_1 - i_0) = -\frac{\cos\{\Omega_0 - \Pi + \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\, i_0 \pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\}}{\cos\frac{1}{2}\{\mathrm{cotg}\, i_0 \pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\}} \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\pi$$

woraus folgt:

$$i_1 = i_0 - \pi\cos(\Omega_0 - \Pi) + \tfrac{1}{2}\mathrm{cotg}\, i_0 \pi^2 \sin^2(\Omega_0 - \Pi)\sin 1'' + \ldots$$

Um nun die analogen Ausdrücke für den Aequator zu erlangen, hat man die oben angedeutete Substitution auszuführen; thut man diess und setzt für $P$ den Werth: $(90^0 - p)$ so wird man finden:

$$\Omega_1' = \Omega_0' + m - \mathrm{cotg}\, i_0' n \cos(\Omega_0' + p) - (\mathrm{cotg}^2 i_0' + \tfrac{1}{2}) n \sin(\Omega_0' + p)\, n\cos(\Omega_0' + p)\sin 1'' + \ldots$$

$$\pi_1' = \pi_0' + m + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} i_0' n \cos(\Omega_0' + p) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2} i_0' n \sin(\Omega_0' + p)\, n\cos(\Omega_0' + p)\sin 1'' + \ldots$$

$$i_1' = i_0' - n\sin(\Omega_0' + p) + \tfrac{1}{2}\mathrm{cotg}\, i_0' \{n\cos(\Omega_0' + p)\}^2 \sin 1'' + \ldots$$

In den Gliedern zweiter Ordnung für $\Omega$ und $\pi_1$ habe ich absichtlich die Reduktion aus den doppelten Winkeln von $\Omega_0 - \Pi$ und $\Omega_0' + p$ nicht vorgenommen, da in dieser Form die numerischen Operationen etwas kürzer werden.

Es könnte scheinen, als ob nach den bisherigen Entwicklungen nur die Uebertragung der Elemente von der fixen Epoche auf die Zeit $t_0$ möglich wäre, während eine Uebertragung von der Zeit $t_0$ auf $t_1$ nicht unmittelbar ausführbar ist. Die Lösung dieser Aufgabe jedoch wird keine Schwierigkeiten haben, wenn man nur die Konstanten auf eine geeignete Form bringt, so dass für jede beliebige Zeit die Fundamentalebene in dem Sinne, wie es oben geschah, als fix betrachtet werden kann.

Mit Ausnahme von $\Pi$ haben alle hier in Betracht kommenden Grössen die Form:

$$r = at + bt^2$$

wo $t$ vom Jahre 1850.0 im vorliegenden Falle zu zählen ist. Für den Zeitpunkt $t_0$ und $t_1$ wird man in Bezug auf die Epoche 1850 erhalten

$$r_{t_0} = at_0 + bt_0^2$$
$$r_{t_1} = at_1 + bt_1^2$$

durch Subtraktion und eine leichte Umformung findet sich

$$r_{t_0}^{t_1} = (a + 2bt_0)(t_1 - t_0) + b(t_1 - t_0)^2$$

wodurch die verlangte Form hergestellt ist, indem es jetzt möglich ist, die Koefficienten auf eine beliebige Epoche zu beziehen, die als Ausgangspunkt gewählt werden kann.

Eine etwas andere Betrachtung muss mit $\Pi$ vorgenommen werden. Es wurde $\Pi$ ermittelt aus der Verbindung der Ausdrücke $\pi \sin \Pi$ und $\pi \cos \Pi$, die ganz dieselbe Form haben, wie dieselbe oben durch $r$ repräsentirt wird. Es ist also für eine beliebige Epoche

$$\pi \sin \Pi = (m + 2m' t_0)\ (t_1 - t_0)\ + m'\ (t_1 - t_0)^2$$
$$\pi \cos \Pi = (n + 2n' t_0)\ (t_1 - t_0)\ + n'\ (t_1 - t_0)^2$$

Geht man nicht über Glieder hinaus, die zweiter Ordnung sind, so wird

$$\Pi = \text{arc} \left\{ \text{tg} = \frac{m + 2m' t_0}{n + 2n' t_0} \right\} + \left\{ \frac{m'}{n} - \frac{n' m}{n.n} \right\} \frac{\cos^2 \Pi_0\ (t_1 - t_0)}{\sin 1''}$$

Der zweite Theil dieses Ausdruckes ist identisch mit demjenigen, welcher früher für die jährliche Aenderung von $\Pi_0$ gefunden wurde; ich nenne denselben der Kürze halber $c$. Der erste Theil dieses Ausdruckes gibt nach Potenzen der Zeit entwickelt:

$$\Pi_0 + 2\, c\, t_0.$$

Es ist demnach vollständig, wenn man bedenkt, dass ausserdem eine Aenderung der Lage des Aequinoctialpunktes durch die allgemeine Präcession bewirkt wird, die Länge des Knotens $\Pi$

$$\Pi = \Pi_0 + (2c + l)\ t_0 + c\ (t_1 - t_0)$$

oder durch Substitution der obigen Werthe

$$\Pi = 173^\circ 0' 12'' + 32'' 847\ t_0 - 8'' 964\ (t_1 - t_0)$$

Es ist wol zweckmässig, alles Zusammengehörige übersichtlich neben einander zu stellen, und ich gebe zwei Zusammenstellungen, wovon die eine für die Ekliptik, die andere für den Aequator als Fundamentalebene angenommen gilt. Die Zeit $t_0$ entspricht der vorgelegten Ausgangsepoche, $t_1$ ist die Zeit, auf welche das Elementensystem übertragen werden soll.

Ekliptik

$$\Omega_1 = \Omega_0 + l + \text{cotg}\, i_0\, \pi \sin(\Omega_0 - \Pi) + (\text{cotg}^2 i_0 + \tfrac{1}{2})\, \pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\, \pi \cos(\Omega_0 - \Pi) \sin 1''$$
$$\pi_1 = \pi_0 + l - \text{tg}\, \tfrac{1}{2} i_0\, \pi \sin(\Omega_0 - \Pi) + \tfrac{1}{2} \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} i_0\, \pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\, \pi \cos(\Omega_0 - \Pi) \sin 1''$$
$$i_1 = i_0 - \pi \cos(\Omega_0 - \Pi) + \tfrac{1}{2} \text{cotg}\, i_0 \{\pi \sin(\Omega_0 - \Pi)\}^2 \sin 1''$$
$$\Pi = 173^\circ 0' 12'' + 32'' 847\ (t_0 - 1850) - 8'' 694\ (t_1 - t_0)$$
$$\pi = \{0'' 47950 - 0'' 000\,00624\ (t_0 - 1850)\}\ (t_1 - t_0) - 0'' 000\,003\,12\ (t_1 - t_0)^2$$
$$l = \{50'' 23465 + 0'' 000\,22576\ (t_0 - 1850)\}\ (t_1 - t_0) + 0'' 000\,11288\ (t_1 - t_0)^2$$

Aequator

$$\Omega_1' = \Omega_0' + m - \text{cotg}\, i_0'\, n \cos(\Omega_0' + p) - (\text{cotg}^2 i_0' + \tfrac{1}{2})\, n \sin(\Omega_0' + p)\, n \cos(\Omega_0' + p) \sin 1''$$
$$\pi_1' = \pi_0' + m + \text{tg}\, \tfrac{1}{2} i_0'\, n \cos(\Omega_0' + p) - \tfrac{1}{2} \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} i_0'\, n \sin(\Omega_0' + p)\, n \cos(\Omega_0' + p) \sin 1''$$
$$i_1' = i_0' - n \sin(\Omega'_0 + p) + \tfrac{1}{2} \text{cotg}\, i_0' \{n \cos(\Omega_0' + p)\}^2 \sin 1''$$
$$p = 23'' 029\ (t_1 - t_0)$$
$$n = \{20'' 05137 - 0'' 000\,08664\ (t_0 - 1850)\}\ (t_1 - t_0) - 0'' 000\,04332\ (t_1 - t_0)^2$$
$$m = \{46'' 05938 + 0'' 000\,28384\ (t_0 - 1850)\}\ (t_1 - t_0) + 0'' 000\,14192\ (t_1 - t_0)^2$$

Hat man eine genäherte Kenntniss von $\frac{d\Omega}{dt}$ und $\frac{di}{dt}$, so wird man viel einfacher rechnen können und dabei doch die Glieder zweiter Ordnung mitnehmen. Man wird $\Omega$ und $i$ für die Zeit $\frac{t_1 + t_0}{2}$ berechnen und ebenso die Konstanten; ist $\Omega$ und $i$ derjenige Werth von dem Knoten und der Neigung der für die Mitte der Zeiten $\left(\frac{t_1 + t_0}{2}\right)$ gilt, so werden die Formeln für die

Ekliptik

$$\Omega_1 = \Omega_0 + l + \operatorname{cotg} i\, \pi \sin(\Omega - \Pi)$$
$$\pi_1 = \pi_0 + l - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i\, \pi \sin(\Omega - \Pi)$$
$$i_1 = i_0 - \pi \cos(\Omega - \Pi)$$
$$\Pi = 173^\circ 0' 12'' + 32''847 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850\right)$$
$$\pi = \left\{0''47950 - 0''00000624 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850\right)\right\} (t_1 - t_0)$$
$$l = \left\{50''23405 + 0''00022576 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850\right)\right\} (t_1 - t_0)$$

für den

Aequator

$$\Omega_1' = \Omega_0' + m - \operatorname{cotg} i'\, n \cos(\Omega' + p)$$
$$\pi_1' = \pi_0' + m + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i'\, n \cos(\Omega' + p)$$
$$i_1' = i_0' - n \sin(\Omega' + p)$$
$$p = 23''029\, (t_1 - t_0)$$
$$n = \left\{20''05137 - 0''00008664 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850\right)\right\} (t_1 - t_0)$$
$$m = \left\{40''05938 + 0''00028384 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850\right)\right\} (t_1 - t_0)$$

Würde einmal der Fall eintreten, dass die Neigung so nahe 0° und 180° gleich wird, dass die Anwendung obiger Formeln nicht zulässig wäre, so wird man entweder, wenn eine solche Uebertragung nöthig wird, die strengen Formeln anwenden, oder die Elemente auf die andere Fundamentalebene übertragen und nach den für diese letztere geltenden Formeln die Uebertragung ausführen; bei den kleinsten bisher bekannten Neigungen Massalia 0° 41′ wird man selbst auf entfernte Epochen hin mit den Gliedern zweiter Ordnung ausreichen und kann allenfalls durch Fraktionirung des Zeitintervalles auch auf sehr grosse Intervalle übergehen, ohne wesentlich an Genauigkeit zu verlieren. Bei Neigungen von sehr nahe 180° kann es zweckmässiger sein, statt der Aenderung der Länge des Perihels die Aenderung des Abstandes des Perihels vom Knoten zu berechnen.

Um vorstehende Formeln durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich die Elemente des Planeten 64 Angelina vom mittleren Aequinoctium 1800.0 auf das von 1850.0 übertragen. Die Elemente sind für 1800.0

$$\pi_0 = 123^\circ 33' 10''57$$
$$\Omega = 311^\circ 4' 28''73$$
$$i = 1^\circ 1[illegible]' 31''83$$

Ich werde nach dem ersten Rechnungsschema zuerst vorgehen. Es ist

$$\Pi = 173^\circ 4' 15''$$
$$\pi = 4''794 \qquad \log\pi = 0.68070$$
$$l = 8'\,22''380$$

$$\Omega_0 - \Pi = 138^\circ 0' 34''$$
$$\cos(\Omega_0 - \Pi) = 9_n 87114$$
$$\sin(\Omega_0 - \Pi) = 9.82543$$
$$\pi\cos(\Omega_0 - \Pi) = 0_n 55184$$
$$\operatorname{cotg} i_0 = 1.63383$$
$$\pi\sin(\Omega_0 - \Pi) = 0.50613$$
$$\Delta\Omega_{II} = +2'\,18''026$$
$$\operatorname{cotg} i_0^2 = 3.268$$
$$\operatorname{cotg} i_0^2 + \tfrac{1}{2} = 3.268$$
$$\pi\sin(\Omega_0 - \Pi)\,\pi\cos(\Omega_0 - \Pi) = 1_n 058$$
$$\sin 1'' = 4.686$$
$$\log\Delta\Omega_{III} = 9_n 012$$
$$\Delta\Omega_{III} = -0''102$$
$$\Delta\Omega = +10'\,40''304$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i_0 = 8.06505$$
$$\Delta\pi_{II} = -0''037$$
$$\Delta\pi_0 = 8'\,22''343$$
$$\Delta i_I = +3''563$$
$$\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} i_0 = 1.333$$
$$\{\pi\sin(\Omega_0 - \Pi)\}^2 = 1.012$$
$$\sin 1'' = 4.686$$
$$\log\Delta i_{II} = 7.031$$
$$\Delta i_{II} = +0''001$$
$$\Delta i = +3''564$$

Nach dem zweiten Rechnungsschema wird, wenn genäherte Werthe von $d\Omega$ und $di$ bekannt sind, gefunden

$$i = 1^\circ 19' 53''6 \qquad \pi = 4''794$$
$$\Omega = 311^\circ 10' 9'' \qquad l = 8'\,22''380$$
$$\Pi = 173^\circ 8' 25'' \qquad \lg\pi = 0.68070$$
$$\Omega - \Pi = 138^\circ 1' 44'' \qquad \operatorname{cotg} i = 1.63368 \qquad \Delta\Omega = +10'\,40''308$$
$$\sin(\Omega - \Pi) = 9.82527 \qquad \pi\sin(\Omega - \Pi) = 0.50597 \qquad \Delta\pi = +8'\,22''343$$
$$\cos(\Omega - \Pi) = 9_n 87127 \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i = 8.06522$$
$$\pi\cos(\Omega - \Pi) = 0_n 55197 \qquad \Delta\Omega_{II} = +2'\,17''928$$
$$\Delta i = +3''564 \qquad \Delta\pi_{II} = -0''037$$

Der Einfluss der Praecession auf den Ort eines Himmelskörpers kann auf zweifache Weise berechnet werden, man bedient sich entweder strenger Formeln, oder man führt, was für die meisten Zwecke ausreicht, nur Näherungswerthe ein. Die strengen Formeln wird man anwenden müssen, sobald man den Uebergang auf ein sehr entferntes Aequinoctium auszuführen hat und sobald der Ort sehr nahe dem Pole zu liegen kommt; im letztern Falle kann selbst bei einer sehr mässigen Zwischenzeit (Jahre) die Anwendung der Näherungswerthe misslich werden. Für den vorliegenden Zweck (Bahnbestimmungen) wird man stets mit den Näherungsformeln ausreichen, denn längere Zeitintervalle (von Jahrzehnten) kommen nur bei den Planeten und bei den periodischen Kometen vor, die im Allgemeinen alle hinreichend weit vom Pole entfernt bleiben, so dass die Anwendung der Näherungswerthe nichts an der Genauigkeit verlieren lässt. Bei Kometen, die sich dem Pole oft sehr bedeutend annähern, wird es selten eine Veranlassung geben, die Reduktion auf ein sehr entferntes Aequinoctium auszuführen.

Bei der Entwicklung der eben erwähnten Näherungsformeln werde ich einen Weg einschlagen, der für beide Coordinationssysteme vollkommen analog ist, so dass wieder schliesslich nur durch Umsetzung der Buchstaben die für die Ekliptik erhaltenen Resultate auf den Aequator übertragen werden können. Ist $\lambda$ und $\beta$ die Länge und Breite des Gestirns zur Zeit der Ausgangsepoche ($\alpha$ und $\delta$ die Rectascension und Deklination zu derselben Zeit) $d\lambda$ und $d\beta$ ($d\alpha$ und $d\delta$) die Aenderungen dieser Coordinaten durch die Präcession, so sind die rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf die fixe Ekliptik als Anfangspunkt der Zählung $\Pi$ angenommen,

$$x = \cos\beta \cos(\lambda - \Pi)$$
$$y = \cos\beta \sin(\lambda - \Pi)$$
$$z = \sin\beta$$

Für die andere Ekliptik wird mit derselben Zählweise

$$x_1 = \cos(\beta + d\beta) \cos(\lambda + d\lambda - \Pi - l)$$
$$y_1 = \cos(\beta + d\beta) \sin(\lambda + d\lambda - \Pi - l)$$
$$z_1 = \sin(\beta + d\beta)$$

Das erstere System unterscheidet sich vom zweiten nur dadurch, dass das zweite Coordinatensystem um den Winkel $\pi$, die X-Achse als Drehungsachse angenommen, gegen das erstere gedreht erscheint; es sind demnach die Transformationsformeln

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y \cos\pi + z \sin\pi$$
$$z_1 = - y \sin\pi + z \cos\pi$$

Substituirt man in diese Gleichung die oben aufgestellten Werthe und nimmt nur die ersten Potenzen der Aenderungen mit, so wird sofort:

$$-\cos\beta \sin(\lambda - \Pi)(d\lambda - l) - \cos(\lambda - \Pi) \sin\beta\, d\beta = 0$$
$$\cos\beta \cos(\lambda - \Pi)(d\lambda - l) - \sin(\lambda - \Pi) \sin\beta\, d\beta = \pi \sin\beta$$
$$\cos\beta\, d\beta = - \pi \cos\beta \sin(\lambda - \Pi)$$

woraus man ohne Schwierigkeit erhält

$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= l + \pi \operatorname{tg}\beta \cos(\lambda - \Pi) \\ d\beta &= - \pi \sin(\lambda - \Pi) \end{aligned}\right\}$$

Für die Sonne wird das Produkt $\pi \operatorname{tg}\beta$ verschwindend klein.

Um nun die analogen Aenderungen für den Aequator zu finden, wird man setzen

| | | |
|---|---|---|
| statt $\lambda$ : $\alpha$ | | statt $l$ : $m$ |
| ,, $\beta$ : $\delta$ | | ,, $\pi$ : $n$ |
| ,, $d\lambda$ : $d\alpha$ | | ,, $\Pi$ : $90^\circ - p$ |
| ,, $d\beta$ : $d\delta$ | | |

und man wird finden, wenn man bedenkt, dass $p = f(t_1 - t_0)$ ist, demnach für unendlich kleine Zwischenzeiten verschwindet, wie diess vorausgesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= m + n \operatorname{tg}\delta \sin\alpha \\ d\delta &= n \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

Will man bei diesen Präcessionsformeln die zweiten Potenzen in Bezug auf die Zeit mitnehmen, was fast für alle Fälle ausreicht, so kann diess sehr leicht geschehen, wenn man genäherte Werthe der Präcession bereits kennt. Man berechnet mit diesen

$\alpha$ und $\delta$ für die Mitte der Zeit $\left(\frac{t_1 + t_0}{2}\right)$ und nimmt ebenso die Konstanten für diese Epoche an und multiplicirt die so erhaltenen Werthe, die für das tropische Jahr als Einheit genommen gelten, mit $(t_1 - t_0)$. Von der Richtigkeit dieser Vorschrift kann man sich leicht überzeugen. Für die praktische Anwendung habe ich in folgender Tabelle die in Betracht kommenden Grössen für das gegenwärtige Jahrhundert von zehn zu zehn Jahren berechnet und $m$ in Zeitmass angesetzt.

| | $l$ | $\pi$ | $\Pi$ | $m$ | log $(n:15)$ | log $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1800 | 50″2234 | 0″4792 | 172°32′50″ | 3ˢ06968 | 0.126146 | 1.302238 |
| 1810 | 50″2256 | 0.4793 | 172 38 18 | 3.06987 | 0.126128 | 1.302219 |
| 1820 | 50″2279 | 0.4793 | 172 43 47 | 3.07006 | 0.126109 | 1.302200 |
| 1830 | 50″2301 | 0.4794 | 172 49 15 | 3.07025 | 0.126090 | 1.302182 |
| 1840 | 50″2324 | 0.4794 | 172 54 44 | 3.07044 | 0.126072 | 1.302163 |
| 1850 | 50″2346 | 0.4795 | 173 0 12 | 3.07063 | 0.126053 | 1.302144 |
| 1860 | 50″2369 | 0.4796 | 173 5 40 | 3.07081 | 0.126034 | 1.302125 |
| 1870 | 50″2392 | 0.4796 | 173 11 9 | 3.07100 | 0.126015 | 1.302107 |
| 1880 | 50″2414 | 0.4797 | 173 16 37 | 3.07119 | 0.125996 | 1.302088 |
| 1890 | 50″2437 | 0.4797 | 173 22 6 | 3.07138 | 0.125978 | 1.302069 |
| 1900 | 50″2459 | 0.4798 | 173 27 34 | 3.07157 | 0.125959 | 1.302050 |

### b. Nutation.

Wie schon bemerkt wurde, fasst man die periodischen Aenderungen der Fundamentalebenen unter dem Namen der Nutation zusammen, da aber diese durch die Aenderung der Lage des Aequators allein bedingt sind, so werden die Breiten eines Himmelskörpers durch die Nutation nicht verändert. Die Nutation ist wesentlich abhängig von der Länge des Mondknotens (☊), der Länge der Sonne (☉) und des Mondes (☾) und der Länge des Perigaeums der Sonne ($P$) und des Mondes ($P'$). Peters hat für die Nutation in der Länge ($\Delta\lambda$) und der Schiefe der Ekliptik ($\Delta\varepsilon$) die folgenden numerischen Werthe gegeben und zwar für das Jahr

1800

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = &- 17''2405 \sin ☊ + 0''2073 \sin 2 ☊ \\ &- 1''2692 \sin 2 ☉ - 0''2041 \sin 2 ☾ \\ &+ 0''1279 \sin (☉ - P) - 0''0213 \sin (☉ + P) \\ &+ 0''0677 \sin (☾ - P') \\ \Delta\varepsilon = &+ 9''2231 \cos ☊ - 0''0897 \cos 2 ☊ \\ &+ 0''5509 \cos 2 ☉ + 0''0886 \cos 2 ☾ \\ &+ 0''0093 \cos (☉ + P)\end{aligned}$$

diese Koefficienten sind aber mit der Zeit veränderlich, und zwar sind dieselben für

1900

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = &- 17''2577 \sin ☊ + 0''2073 \sin 2 ☊ \\ &- 1''2693 \sin 2 ☉ - 0''2041 \sin 2 ☾ \\ &+ 0''1275 \sin (☉ - P) - 0''0213 \sin (☉ + P) \\ &+ 0''0677 \sin (☾ - P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon = &+ 9''2240 \cos \Omega - 0''0896 \cos 2\,\Omega \\ &+ 0''5506 \cos 2\,☉ + 0''0885 \cos 2\,☾ \\ &+ 0''0092 \cos (☉ + P)\end{aligned}$$

Die Werthe $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ finden sich in den astronomischen Ephemeriden berechnet, gewöhnlich ist nicht $\Delta\varepsilon$ mitgetheilt, sondern

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon$$

wo $\varepsilon_m$ die mittlere Schiefe der Ekliptik vorstellt; $\varepsilon$ wird dann die wahre oder scheinbare Schiefe genannt. Hat man demnach die wahre Rectascension und Deklination eines Gestirns und will man den von der Nutation befreiten Ort in Bezug auf die Ekliptik kennen, so wird man die gegebenen äquatorealen Coordinaten mit der wahren Schiefe in Länge und Breite verwandeln und von der Länge die aus den Ephemeriden entlehnte für das vorgelegte Datum geltende Nutation subtrahiren. Es ist aber oft wünschenswerth, den Einfluss der Nutation auf die Rectascension und Deklination der Gestirne zu berechnen. Es ist aber, wenn man bei den ersten Potenzen der Aenderungen stehen bleibt

$$d\alpha = \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon$$
$$d\delta = \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{d\delta}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon$$

Um die Differentialquotienten, deren Kenntniss hier nöthig ist, zu bestimmen, nehme ich die Gleichungen vor, die bei der Transformation der Coordinaten gefunden wurden (pag. 13). Es wurde daselbst erhalten

$$\begin{aligned}\cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta \cos\lambda \\ \cos\delta \sin\alpha &= \cos\beta \sin\lambda \cos\varepsilon - \sin\beta \sin\varepsilon \\ \sin\delta &= \cos\beta \sin\lambda \sin\varepsilon + \sin\beta \cos\varepsilon.\end{aligned}$$

Die Differentiation lässt zunächst finden mit Rücksicht darauf, dass $d\beta$ der Null gleich ist:

$$\cos\delta \sin\alpha\, d\alpha + \cos\alpha \sin\delta\, d\delta = \cos\beta \sin\lambda\, d\lambda$$
$$\cos\delta \cos\alpha\, d\alpha - \sin\alpha \sin\delta\, d\delta = \cos\beta \cos\lambda \cos\varepsilon\, d\lambda - (\cos\beta \sin\lambda \sin\varepsilon + \sin\beta \cos\varepsilon)\, d\varepsilon$$
$$\cos\delta\, d\delta = \cos\beta \cos\lambda \sin\varepsilon\, d\lambda + (\cos\beta \sin\lambda \cos\varepsilon - \sin\beta \sin\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Um nun alles durch äquatoreale Polarkoordinaten auszudrücken, wird man leicht aus der zweiten und dritten der zuerst aufgestellten Gleichungen ableiten:

$$\cos\beta \sin\lambda = \cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon$$

dann wird man schreiben können

$$\cos\delta \sin\alpha\, d\alpha + \cos\alpha \sin\delta\, d\delta = (\cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon)\, d\lambda$$
$$\cos\delta \cos\alpha\, d\delta - \sin\alpha \sin\delta\, d\delta = \cos\delta \cos\alpha \cos\varepsilon\, d\lambda - \sin\delta\, d\varepsilon$$
$$d\delta = \cos\alpha \sin\varepsilon\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon$$

woraus sich sofort bestimmt:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha \operatorname{tg}\delta \qquad \frac{d\delta}{d\lambda} = \cos\alpha \sin\varepsilon$$
$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\cos\alpha \operatorname{tg}\delta \qquad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin\alpha$$

Nimmt man $\varepsilon = 23^{0} 27' 54'' 2$ für 1800 und setzt die numerischen Koefficienten sogleich ein, so wird man finden für 1800

$$d\alpha = -15'' 8148 \sin \Omega - \{6'' 8650 \sin \Omega \sin \alpha + 9'' 2231 \cos \Omega \cos \alpha\} \operatorname{tg} \delta$$
$$+ 0'' 1902 \sin 2\Omega + \{0'' 0825 \sin 2\Omega \sin \alpha + 0'' 0897 \cos 2\Omega \cos \alpha\} \operatorname{tg} \delta$$
$$- 1'' 1642 \sin 2\odot - \{0'' 5054 \sin 2\odot \sin \alpha + 0'' 5509 \cos 2\odot \cos \alpha\} \operatorname{tg} \delta$$
$$- 0'' 1872 \sin 2 ☾ - \{0'' 0813 \sin 2 ☾ \sin \alpha + 0'' 0886 \cos 2 ☾ \cos \alpha\} \operatorname{tg} \delta$$
$$- 0'' 0195 \sin (\odot + P) - \{0'' 0085 \sin (\odot + P) \sin \alpha + 0'' 0093 \cos (\odot + P) \cos \alpha\} \operatorname{tg} \delta$$
$$+ \{0'' 0621 + 0'' 0270 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta\} \sin (☾ - P') + \{0'' 1173 + 0'' 0509 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta\} \sin (\odot - P)$$

$$d\delta = -6'' 8650 \sin \Omega \cos \alpha + 9'' 2231 \cos \Omega \sin \alpha$$
$$+ 0'' 0825 \sin 2\Omega \cos \alpha - 0'' 0897 \cos 2\Omega \sin \alpha$$
$$- 0'' 5054 \sin 2\odot \cos \alpha + 0'' 5509 \cos 2\odot \sin \alpha$$
$$- 0'' 0813 \sin 2 ☾ \cos \alpha + 0'' 0886 \cos 2 ☾ \sin \alpha$$
$$- 0'' 0085 \sin (\odot + P) \cos \alpha + 0'' 0093 \cos (\odot + P) \sin \alpha$$
$$+ 0'' 0270 \sin (☾ - P') \cos \alpha + 0'' 0509 \sin (\odot - P) \cos \alpha$$

Diese Grössen sind mit der Zeit veränderlich, einerseits weil die Koefficienten, die für $d\lambda$ und $d\varepsilon$ gegeben wurden, selbst säkularen Aenderungen unterworfen sind, und weil andererseits die Schiefe der Ekliptik mit der Zeit sich ändert; da aber diese Aenderungen alle sehr klein sind, so werden dieselben nur in den grössten Gliedern etwas merkbarer hervortreten. Für 1900 sind diese grössten Glieder:

$$d\alpha = -15'' 8321 \sin \Omega - \{6'' 8683 \sin \Omega \sin \alpha + 9'' 2240 \cos \Omega \cos \alpha\} \operatorname{tg} \delta$$
$$d\delta = -6'' 8683 \sin \Omega \cos \alpha + 9'' 2240 \cos \Omega \sin \alpha$$

Die übrigen Glieder können unverändert beibehalten werden. Um diese Korrektionen für die Nutation bequem berechnen zu können, könnte man in den astronomischen Ephemeriden die Koefficienten $p$, $q$ und $r$ aufnehmen, und es wäre dann

$$d\alpha = p + (q \sin \alpha + r \cos \alpha) \operatorname{tg} \delta$$
$$d\delta = q \cos \alpha - r \sin \alpha$$

die noch einer weiteren Transformation fähig wären. Es werden aber diese Ausdrücke nicht mitgetheilt, da es andere Hilfsmittel gibt, die im nächsten Kapitel vorgebracht werden sollen, um die Aenderungen der Coordinaten durch die Nutation in Verbindung mit den anderen Korrektionen zu berechnen.

## 5. Reduction der Coordinaten auf die verschiedenen Aequinoctien.

Die Beobachtung ergibt im Allgemeinen den scheinbaren Ort des Gestirnes, verbindet man mehrere Beobachtungen mit einander, um dieselben einer Rechnung zu Grunde zu legen, so wird man, um nur Homogenes mit einander zu verbinden, alle Beobachtungen auf eine bestimmte Fundamentalebene (Aequinoctium) beziehen, und es wird sich die Aufgabe stellen, die in den vorausgehenden Kapiteln (Aberration, Präcession und Nutation) erläuterten Vorschriften zu diesem Zwecke zu verwerthen und die Hilfsmittel anzugeben, welche die astronomischen Ephemeriden zur Erleichterung dieser Operationen angeben. Hierbei wird es sich wesentlich unterscheiden, ob die Fundamentalebene die Ekliptik oder der Aequator ist.

### a. Ekliptik.

Die Beobachtungen sind meist auf den Aequator bezogen; man wird desshalb vorerst mit der scheinbaren Schiefe ($\varepsilon$) der Ekliptik dieselbe in scheinbare Längen ($\lambda$) und Breiten ($\beta$) verwandeln. Die scheinbare Schiefe findet man in den Ephemeriden und gewöhnlich auch an derselben Stelle die Nutation in Länge ($N$) von zehn zu zehn Tagen mitgetheilt; es genügt hierbei nur mit Rücksicht auf die ersten Differenzen zu interpoliren. Die scheinbaren Längen und Breiten sind zuerst von der Aberration zu befreien. Es ist (pag. 70), wenn man mit $\odot$ die zur Beobachtung gehörige Sonnenlänge und mit $\pi_{\odot}$ die Länge des Perigaeums der Sonne bezeichnet, hiefür

$$d\lambda_1 = [20''445 \cos(\odot - \lambda) + 0''343 \cos(\pi_{\odot} - \lambda)] \sec\beta$$
$$d\beta_1 = [20''445 \sin(\odot - \lambda) + 0''343 \sin(\pi_{\odot} - \lambda)] \sin\beta$$

Bringt man diese Korrektionen an die Beobachtung an, so erscheint dieselbe auf das wahre Aequinoctium des Beobachtungsdatums reducirt.

Die Korrektion für Nutation ist sehr einfach, da durch diese nur die Länge beeinflusst wird. Es wird sein

$$d\lambda_2 = -N$$
$$d\beta_2 = 0$$

Nach Anbringung der beiden Korrektionen (Aberration und Nutation) an die Werthe, die durch die Beobachtung gegeben wurden, erscheint dieselbe auf das mittlere Aequinoctium des Beobachtungsdatums reducirt.

Nimmt man nun ein bestimmtes mittleres Aequinoctium an, welches zur Zeit $T$ (für $T$ wird sich häufig genug der Jahresanfang empfehlen) gehört, und auf welches Alles reducirt werden soll, ferner sei $t$ die Zeit der Beobachtung, und drückt man das Zeitintervall ($t - T$) in mittleren Sonnentagen aus, so wird zunächst diese Differenz in Theile des tropischen Jahres ($\tau$) umzusetzen sein. Man hat mit genügender Genauigkeit

$$\tau = \frac{t - T}{365.242}$$

Bezeichnet man mit $l$ die jährliche (tropisches Jahr) allgemeine Präcession in Länge, mit $\pi$ und $\Pi$ die früher angegebenen Constanten der Präcession (pag. 85), so wird sein

$$d\lambda_3 = -\tau\,[l + \pi \operatorname{tg}\beta \cos(\lambda - \Pi)]$$
$$d\beta_3 = \tau\pi \sin(\lambda - \Pi)$$

Vereinigt man die drei Korrektionen für Aberration, Nutation und Präcession, so ist:

$$\lambda_0 = \lambda + [20''445 \cos(\odot - \lambda) + 0''343 \cos(\pi_{\odot} - \lambda)] \sec\beta - N - \frac{t - T}{365.242}[l + \pi \operatorname{tg}\beta \cos(\lambda - \Pi)]$$
$$\beta_0 = \beta + [20''445 \sin(\odot - \lambda) + 0''343 \sin(\pi_{\odot} - \lambda)] \sin\beta + \frac{t - T}{365.242}\,\pi \sin(\lambda - \Pi)$$

Die numerischen Werthe der Konstanten sind, wenn mit $t_i$ das Beobachtungsjahr bezeichnet wird:

$$\pi_{\odot} = 280^0\ 21'\ 21'' + 61''70\ (t_i - 1850)$$
$$l = 50''23465 + 0''00022576\ (t_i - 1850)$$
$$\pi = 0''47950 - 0.00000624\ (t_i - 1850)$$
$$\Pi = 173^0\ 0'\ 12'' + 32''85\ (t_i - 1850)$$

Für die Sonne, bei der man bei der Berechnung der Reduktionen $\beta = 0$ setzen darf, werden dadurch die Formeln etwas einfacher, doch wird es nicht nöthig sein, dieselben hier anzusetzen.

### b. Aequator.

Will man die Korrektionen für Aberration, Präcession und Nutation an die äquatorealen Coordinaten anbringen, so bieten die Ephemeriden hierfür sehr geeignete Hilfsmittel. Für die Aberration sind die darauf bezüglichen Formeln auf pag. 70 bereits mitgetheilt worden. Für die Berechnung der Präcession und Nutation können ähnliche Kunstgriffe angewendet werden, nur muss man eine bestimmte Annahme über das fixe Aequinoctium machen; hierzu wird der astronomische Jahresanfang (vergl. pag. 74) gewählt Die Formeln für die Berechnung der Präcession haben die Form (pag. 84):

$$d\alpha_1 = \tau\ (m + n \operatorname{tg}\delta \sin\alpha)$$
$$d\delta_1 = \tau n \cos\alpha$$

für die Nutation (pag. 87) wurde die Form gefunden:

$$d\alpha_2 = p + (q \sin\alpha + r \cos\alpha) \operatorname{tg}\delta$$
$$d\delta_2 = q \cos\alpha - r \sin\alpha$$

Es wird demnach:

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 = (p + \tau m) + (q + \tau n) \sin\alpha \operatorname{tg}\delta + r \cos\alpha \operatorname{tg}\delta$$
$$d\delta_1 + d\delta_2 = (q + \tau n) \cos\alpha - r \sin\alpha.$$

Führt man also für die von der Zeit abhängigen Grössen ein

$$p + \tau m = f$$
$$q + \tau n = g \cos G$$
$$r = g \sin G$$

so wird:

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 = f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg}\delta$$
$$d\delta_1 + d\delta_2 = g \cos(G + \alpha)$$

Die Grössen $f$, $g$, $G$ nebst den für die Aberration nöthigen Hilfsgrössen $h$, $H$ und $i$ finden sich in den astronomischen Ephemeriden. Die letzteren Coefficienten für Aberration enthalten aber nicht die kleinen nothwendigen Korrektionen (pag. 70), um die Beobachtung völlig von der Aberration der Fixsterne zu befreien, hierfür sind die Konstanten $h_0$, $H_0$ und $i_0$ nöthig. Es ist also die vollständige Reduktion auf den Jahresanfang in der folgenden Uebersicht enthalten:

$$\alpha_0 = \alpha - [f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg}\delta + h \sin(H + \alpha) \sec\delta + h_0 \sin(H_0 + \alpha) \sec\delta]$$
$$\delta_0 = \delta - [g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin\delta + h_0 \sin(H_0 + \alpha) \sin\delta + (i + i_0) \cos\delta]$$

| | $\log h_0$ | $H_0$ | $i_0$ |
|---|---|---|---|
| 1800 | 9.5342 | 351° 16′ | — 0″022 |
| 1850 | 9.5340 | 350° 29′ | — 0″024 |
| 1900 | 9.5338 | 349° 42′ | — 0″026 |

Liegen die zu vereinigenden Beobachtungen in verschiedenen Jahren, so wird man zuerst die Reduktion nach den eben zusammengetragenen Vorschriften auf den betreffenden Jahresanfang ausführen und dann mit Hilfe der bei der Präcession gegebenen Formeln (pag. 84) die Uebertragung auf das gewählte mittlere fixe Aequinoctium durchführen.

Bei der Berechnung der Ephemeriden gibt man stets den auf das wahre Aequinoctium bezogenen Ort des Planeten an, da die Fixstern- und Planeten-Aberration durch Aenderung der Beobachtungszeit gleichzeitig berücksichtigt werden können; man wird gewöhnlich die auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogenen rechtwinkligen Coordinaten des Planeten erhalten, die mit den auf dasselbe Aequinoctium bezogenen Coordinaten der Sonne vereinigt, die geocentrischen Coordinaten finden lassen. Um die so erhaltenen polaren Coordinaten auf das wahre Aequinoctium des gegebenen Datums zu beziehen wird man an die berechnete Rectascension und Deklination die Korrektionen für Präcession und Nutation anbringen müssen; dieselben sind nach dem Vorausgehenden

$$\Delta\alpha = f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg}\delta$$
$$\Delta\delta = g \cos(G + \alpha)$$

Manche Ephemeriden geben aber nicht die auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogenen rechtwinkligen Coordinaten der Sonne, sondern unmittelbar die wahren. Man wird desshalb die für den Himmelskörper gefundenen Coordinaten, die in der Regel auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogen sind, auf das wahre Aequinoctium übertragen müssen; ist diess geschehen, so gibt die Vereinigung der Coordinaten des Planeten (Kometen) und der Sonne sofort die wahren geocentrischen Orte. Die nothwendige Umsetzung geschieht am einfachsten mit Hilfe der eben angeführten Hilfswerthe $f$, $g$ und $G$ (vergl. Hill, astron. Nachr. No. 1593).

Sind $x$, $y$, $z$ die heliocentrischen rechtwinkligen Aequatorcoordinaten bezogen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges, $a$ und $d$ die heliocentrische Rectascension und Deklination, $r$ die Entfernung, so ist:

$$x = r \cos a \cos d$$
$$y = r \sin a \cos d$$
$$z = r \sin d$$

Sind $x'$ $y'$ und $z'$ die auf das jeweilige wahre Aequinoctium bezogenen Coordinaten, so ist, da die aus der Transformation entstehenden Aenderungen differentieller Natur sind:

$$x' - x = \delta x$$
$$y' - y = \delta y$$
$$z' - z = \delta z$$

und

$$\delta x = -r \sin a \cos d\, \delta a - r \cos a \sin d\, \delta d$$
$$\delta y = r \cos a \cos d\, \delta a - r \sin a \sin d\, \delta d$$
$$\delta z = r \cos d\, \delta d$$

Setzt man für $\delta a$ und $\delta d$ die Werthe

$$\delta a = f + g \sin(G + a) \operatorname{tg} d$$
$$\delta d = g \cos(G + a)$$

nachdem man die Grössen $\sin(G + a)$ und $\cos(G + a)$ aufgelöst hat, so wird man finden:

$$x' - x = (\quad - fy \quad - g \cos G z) \sin 1''$$
$$y' - y = (\quad fx \quad + g \sin G z) \sin 1''$$
$$z' - z = (g \cos G x - g \sin G y) \sin 1''$$

Diese Korrektionen wird man an die mittleren Coordinaten in Einheiten des Radius anzubringen haben, um die wahren zu erhalten.

## Anhang.

Bei der Vorausberechnung der Ephemeriden, insbesondere der der kleinen Planeten, werden gewöhnlich mehrere Bestimmungen angegeben, welche über die Zeit der Opposition (Länge des Himmelskörpers gleich der Länge der Erde), über die Helligkeit und Lichtstärke des Himmelskörpers Aufschluss geben sollen und mehr einen die Beobachtung vorbereitenden Zweck haben.

Die Zeit der Opposition wird man leicht genug finden aus der Bedingung, dass die heliocentrische Länge des Planeten gleich ist der heliocentrischen Länge der Erde. Ist $u$ das Argument der Breite, so ist:

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \operatorname{tg} u \cos i$$

woraus die heliocentrische Länge ($l$) des Planeten leicht gefunden wird. Da dieses Oppositionsmoment nur auf etwa eine Stunde genau angegeben wird, so wird es genügen, in der Nähe der Opposition von 20 zu 20 Tagen (die Störungsrechnung wird meistens die nöthigen Grössen enthalten) die heliocentrische Länge des Planeten mit denen der Erde zu vergleichen, und ein einfaches Interpolationsverfahren mit Rücksicht auf höhere Differenzen wird das Gewünschte sofort erreichen lassen.

Die Helligkeit wird sich leicht finden lassen, wenn man von der Phase absieht und annimmt, dass der Planet nur vermoge der Erleuchtung durch die Sonne sichtbar wird, also keine ihm eigenthümliche Lichtentwicklung hat. Sei $J_0$ die Lichtstärke des Planeten zu einer gegebenen Zeit, in der die Entfernung von der Sonne $r_0$ und die Entfernung von der Erde $\varrho_0$ war, so wird die Lichtstärke in einem Moment, wo die Entfernung von der Sonne $r$, von der Erde $\varrho$ ist, berechnet nach:

$$J = J_0 \frac{r_0^2 \varrho_0^2}{r^2 \varrho^2}$$

Für die kleinen Planeten nimmt man als Einheit die Lichtstärke an, in welcher der

Planet erscheint, wenn er in der Entfernung $a$ (halbe grosse Achse) von der Sonne und in der Entfernung $(a - 1)$ von der Erde sich befinden würde. Es ist dann:

$$J = \frac{a^2 (a-1)^2}{r^2 \varrho^2}$$

Um nun die Leuchtkraft des Planeten zu finden, drückt man dieselbe in derselben Scala aus, in welche man die Fixsterne einreiht (Grössenklassen). Die Erfahrung lehrt, dass das Verhältniss ($h$) der Lichtstärken zweier unmittelbar folgenden Sternklassen ein konstantes ist und es zeigt sich hierbei, dass es der Wahrheit sehr nahe kommt, wenn man annimmt dass ist

$$\frac{1}{\log h} = 2.5$$

Ist nun $M$ die Grösse des Planeten unter den Verhältnissen die $J$ der Einheit gleich machen ($r = a$, $\varrho = a - 1$) und $m$ die Grösse, die der Planet zeigt, wenn die Entfernung von der Sonne $r$ und die von der Erde $\varrho$ ist, so wird sein:

$$J = h^{(M - m)}$$

oder logarithmisch:

$$m = M - \frac{\log J}{\log h}$$

Mit Rücksicht auf den numerischen Werth von $h$ lässt sich aber auch schreiben:

$$m = M - 2.5 \log J.$$

Setzt man für $\log J$ den oben angegebenen Werth ein, so wird man leicht finden:

$$m = M + 5 (\log r + \log \varrho) - 5 \log (a^2 - a)$$

Ist für ein gegebenes Datum $m$ durch die Beobachtung gegeben, so wird man leicht daraus die Grösse $M$ (die mittlere Oppositionsgrösse) berechnen nach:

$$M = m + 5 \log (a^2 - a) - 5 (\log r + \log \varrho)$$

Bei den kleinen Planeten wird gewöhnlich bei der Oppositionsephemeride, ausser dem Moment der Opposition noch $J$ und $m$ angegeben für die Zeit der Opposition, und desshalb habe ich die Bestimmungsart dieser Werthe in diesem Anhange aufgenommen.

## Zweiter Theil.

### Bahnbestimmung.

In den vorausgehenden Abschnitten ist gezeigt worden, dass die Bahnen der Himmelskörper des Sonnensystems als Kegelschnittslinien betrachtet werden dürfen in deren Brennpunkt die Sonne steht. Um einen Kegelschnitt völlig zu charakterisiren genügen im Allgemeinen zwei Angaben, nämlich die grosse Halbachse ($a$) und die Excentricität ($e = \sin\varphi$). Ist die Bahn jedoch parabolisch, wobei $a = \infty$ und $e = 1$ wird, muss zur Dimensionsbestimmung eine andere Angabe gemacht werden, und man benutzt zu derselben die Entfernung des Kometen von der Sonne in seiner Sonnennähe, den Perihelabstand ($q$). Um den Ort des Himmelskörpers in dieser Bahn zu kennen, muss man wissen, in welchem Punkte der Bahn der Himmelskörper zu einer gewissen Zeit (Epoche) stand. Für diese Angabe wird gewöhnlich bei nahe kreisförmigen Bahnen (Planetenbahnen) die mittlere Anomalie ($M$) zur Zeit der Epoche angesetzt; bei sehr excentrischen Bahnen jedoch wählt man hierfür den Zeitpunkt der Sonnennähe, die Perihelzeit ($T$). Um nun die Bahnlage im Raume zu fixiren muss zuerst die Bahnebene ihrer Lage nach unzweideutig festgestellt werden, diess geschieht durch die Angabe des aufsteigenden Knotens ($\Omega$) und durch die Neigung ($i$). Ueber die Bedeutung und Zählweise dieser Elemente und des gleich zu erwähnenden sechsten Bestimmungsstückes ist schon früher (pag. 8) das Nöthige vorgebracht worden. Die Lage der Bahn in dieser Ebene wird bestimmt sein, wenn man den Abstand (im grössten Kreise gezählt) des Perihels vom aufsteigenden Knoten ($\omega$) in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers gezählt, angibt. Die Summe der Bögen

$$\Omega + \omega = \pi$$

wird die Länge des Perihels genannt. Zu diesen sechs bislang angeführten Elementen wird als siebentes noch die Masse ($m$) treten; da aber bei allen Himmelskörpern des Sonnensystems, bei denen erste Bahnbestimmungen nöthig werden, dieselbe der Null gleich gesetzt werden darf, so will ich auf dieses Element nicht weiter achten. Ist über die Bahn eines Himmelskörpers nichts Näheres bekannt, so sind sechs Elemente zu bestimmen. Jede Beobachtung gibt zwei unabhängige Bestimmungsstücke (Rectascension, Deklination oder Länge, Breite), demnach sind drei vollständige Beobachtungen im Allgemeinen zur Bestimmung der Bahnelemente genügend. Es ist klar, dass man

zur Erreichung desselben Zweckes sechs unvollständige Beobachtungen benutzen könnte und in manchen Fällen wird sogar die Kombination unvollständiger Beobachtungen mit vollständigen sehr zweckdienlich sein.

Bei der Lösung des Problems der Bahnbestimmungen wird zu unterscheiden sein, ob die zu bestimmende Bahn einem Kometen oder Planeten angehört. Bei Kometenbahnbestimmungen würde es nicht zweckmässig sein, sechs Elemente als unbekannt vorauszusetzen, da sich die grösste Mehrzahl derselben in so nahe parabolischen Bahnen bewegt, dass es für die Genauigkeit des erhaltenen Resultates förderlicher ist, sofort $e = 1$ zu setzen. Es werden demnach nur fünf Elemente zu bestimmen sein, zwei vollständige Beobachtungen geben demnach zu wenig, drei aber zu viel Bestimmungsstücke. Man wird desshalb eine Beobachtung als unvollständig betrachten müssen und wie diess am zweckmässigsten geschieht wird später ausführlich behandelt werden. Die Lösung der Aufgabe, die völlig unbekannten Bahnelemente eines Himmelskörpers aus geocentrischen Beobachtungen zu bestimmen, wird dem zu Folge auf zwei wesentlich verschiedene Arten ausgeführt werden, je nachdem man die Bahn als Parabel voraussetzt oder ob man keine bestimmte Annahme über die Excentricität macht. In dem folgenden werden beide Arten der Lösung behandelt.

## I. Abschnitt. Bestimmung parabolischer Elemente.

### §. 1. Aufstellung der Bedingungsgleichungen der Bahnebene.

Es sollen zuerst die Bedingungen festgestellt werden, welche erfüllt sein müssen, wenn die drei Kometenorte in einer Ebene liegen sollen, die durch den Sonnenmittelpunkt geht. Es seien die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten der drei Orte des Kometen im Raume beziehungsweise $(x_{,}\ y_{,}\ z_{,})$, $(x_{,,}\ y_{,,}\ z_{,,})$, $(x_{,,,}\ y_{,,,}\ z_{,,,})$, so ist die Lage einer Ebene bestimmt, die durch den Sonnenmittelpunkt (Anfangspunkt der Coordinaten) und durch die drei Kometenorte hindurchgeht bestimmt durch die folgenden drei Gleichungen:

$$Ax_{,} + By_{,} + Cz_{,} = 0$$
$$Ax_{,,} + By_{,,} + Cz_{,,} = 0$$
$$Ax_{,,,} + By_{,,,} + Cz_{,,,} = 0$$

Die Grössen $A$, $B$ und $C$ sind völlig bestimmt in einem gegebenen Falle und Funktionen des Knotens und der Neigung. Man kann diese Grössen ohne Schwierigkeit eliminiren. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $z_{,,}$, die zweite mit $z_{,}$ und subtrahirt die letztere von der ersten, und ebenso die erste mit $z_{,,,}$ und die dritte mit $z_{,}$ und subtrahirt wie früher, so wird erhalten:

$$A\,(x_{,}\,z_{,,} - x_{,,}\,z_{,}) + B\,(y_{,}\,z_{,,} - y_{,,}\,z_{,}) = 0$$
$$A\,(x_{,}\,z_{,,,} - x_{,,,}\,z_{,}) + B\,(y_{,}\,z_{,,,} - y_{,,,}\,z_{,}) = 0$$

um nun $B$ zu eliminiren multiplicire man die erste der eben erhaltenen Gleichungen mit $(y_{,}\,z_{,,,} - y_{,,,}\,z_{,})$ und die zweite mit $(y_{,,}\,z_{,} - y_{,}\,z_{,,})$ und addirt, so erhält man sofort:

$$A\{x_{,}z_{,,}y_{,}z_{,,,} - x_{,,}z_{,}y_{,}z_{,,,} - x_{,}z_{,,}y_{,,,}z_{,} + x_{,,}z_{,}y_{,,,}z_{,} + x_{,}z_{,,,}y_{,,}z_{,} - x_{,}z_{,,,}y_{,}z_{,,} - x_{,,,}z_{,}y_{,,,}z_{,} + x_{,,,}z_{,}y_{,,,}z_{,}\} = 0$$

Das erste Glied hebt sich mit dem sechsten auf und die übrigen enthalten als gemeinschaftlichen Faktor: $\Delta z_{,}$, welcher Faktor wegen der rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Null weggelassen werden darf, und man erhält als die Bedingung für die oben näher definirte Ebene die Gleichung:

$$-x_{,,}y_{,}z_{,,,} - x_{,}z_{,,}y_{,,,} + x_{,,}z_{,}y_{,,,} + x_{,,,}y_{,}z_{,,} + x_{,}z_{,,,}y_{,,} - x_{,,,}z_{,}y_{,,} = 0$$

welche Gleichung in drei verschiedenen Formen geschrieben werden kann, je nachdem man $(x_{,}, -x_{,,}, +x_{,,,})$ oder $(-y_{,}, +y_{,,}, -y_{,,,})$ oder $(z_{,}, -z_{,,}, +z_{,,,})$ als partielle gemeinschaftliche Faktoren heraushebt. Es wird so:

$$\left.\begin{aligned} x_{,}(y_{,,}z_{,,,} - y_{,,,}z_{,,}) - x_{,,}(y_{,}z_{,,,} - y_{,,,}z_{,}) + x_{,,,}(y_{,}z_{,,} - y_{,,}z_{,}) &= 0 \\ y_{,}(x_{,,}z_{,,,} - x_{,,,}z_{,,}) - y_{,,}(x_{,}z_{,,,} - x_{,,,}z_{,}) + y_{,,,}(x_{,}z_{,,} - x_{,,}z_{,}) &= 0 \\ z_{,}(x_{,,}y_{,,,} - x_{,,,}y_{,,}) - z_{,,}(x_{,}y_{,,,} - x_{,,,}y_{,}) + z_{,,,}(x_{,}y_{,,} - x_{,,}y_{,}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die innerhalb der Klammern stehenden Coefficienten haben eine ganz bestimmte geometrische Bedeutung. Betrachtet man die erste der Gleichungen, so wird man leicht finden, dass die Coefficienten der Reihe nach die Coordinaten der Projektionen des zweiten und dritten, ersten und dritten, ersten und zweiten Ortes auf die $yz$-Ebene enthalten, die zweite Gleichung die analogen Projektionen auf die $xz$-Ebene und endlich die dritte dieselben Grössen in der $xy$-Ebene. Ich nehme zur weiteren Betrachtung den speciellen Fall $(x_{,}y_{,,,} - x_{,,,}y_{,})$ vor. $P_{,}$ und $P_{,,,}$ (Fig. III) seien die Projektionen des ersten und dritten Kometenortes auf die $xy$-Ebene, $x_{,}$ $y_{,}$ und $x_{,,,}$ $y_{,,,}$ sind die zugehörigen Koordinaten. Das Dreieck zwischen $P_{,}OP_{,,,}$ kann zerlegt werden in drei kleinere Dreiecke und zwar ist:

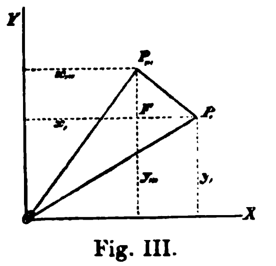


Fig. III.

$$\Delta(P_{,}OP_{,,,}) = \Delta(P_{,}FP_{,,,}) + \Delta(P_{,}FO) + \Delta(P_{,,,}FO)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \Delta(P_{,}FP_{,,,}) &= \tfrac{1}{2}(y_{,,,} - y_{,})(x_{,} - x_{,,,}) \\ \Delta(P_{,}FO) &= \tfrac{1}{2}y_{,}(x_{,} - x_{,,,}) \\ \Delta(P_{,,,}FO) &= \tfrac{1}{2}x_{,,,}(y_{,,,} - y_{,}) \end{aligned}$$

addirt man nun die aufgelösten Werthe so findet sich

$$\Delta(P_{,}OP_{,,,}) = \tfrac{1}{2}(x_{,}y_{,,,} - x_{,,,}y_{,})$$

Es stellt demnach der eben betrachtete Faktor die doppelte Fläche von $P_{,}OP_{,,,}$ dar. Nennt man die Neigung der Kometenbahnebene gegen die $xy$-Ebene $i_{xy}$, gegen die $xz$-Ebene $i_{xz}$ und gegen die $yz$-Ebene $i_{yz}$ und bezeichnet die zwischen den Radienvektoren gelegenen doppelten Dreiecksflächen symbolisch mit $[r_{,}\, r_{,,}]$, $[r_{,}\, r_{,,,}]$ und $[r_{,,}\, r_{,,,}]$, indem man die begrenzenden Radien in eckige Klammern setzt, so ist offenbar:

$$\Delta(P_{,}OP_{,,,}) = \tfrac{1}{2}[r_{,}\, r_{,,,}] \cos i_{xy}$$

Dehnt man die eben erhaltenen Relationen auf alle Coefficienten aus, so erschliesst man leicht, dass ist:

$$\begin{aligned} (y_{,,}z_{,,,} - y_{,,,}z_{,,}) &= [r_{,,}r_{,,,}]\cos i_{yz}; & (x_{,,}z_{,,,} - x_{,,,}z_{,,}) &= [r_{,,}r_{,,,}]\cos i_{xz}; & (x_{,,}y_{,,,} - x_{,,,}y_{,,}) &= [r_{,,}r_{,,,}]\cos i_{xy} \\ (y_{,}z_{,,,} - y_{,,,}z_{,}) &= [r_{,}r_{,,,}]\cos i_{yz}; & (x_{,}z_{,,,} - x_{,,,}z_{,}) &= [r_{,}r_{,,,}]\cos i_{xz}; & (x_{,}y_{,,,} - x_{,,,}y_{,}) &= [r_{,}r_{,,,}]\cos i_{xy} \\ (y_{,}z_{,,} - y_{,,}z_{,}) &= [r_{,}r_{,,}]\cos i_{yz}; & (x_{,}z_{,,} - x_{,,}z_{,}) &= [r_{,}r_{,,}]\cos i_{xz}; & (x_{,}y_{,,} - x_{,,}y_{,}) &= [r_{,}r_{,,}]\cos i_{xy} \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in (1 so wird sofort erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]\, x_{\prime} - [r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]\, x_{\prime\prime} + [r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]\, x_{\prime\prime\prime} = 0 \\ [r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]\, y_{\prime} - [r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]\, y_{\prime\prime} + [r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]\, y_{\prime\prime\prime} = 0 \\ [r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]\, z_{\prime} - [r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]\, z_{\prime\prime} + [r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]\, z_{\prime\prime\prime} = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

welchen Bedingungen die drei Kometenorte entsprechen müssen, damit dieselben in einer Ebene liegen, die durch den Sonnenmittelpunkt gelegt ist. Die heliocentrischen Coordinaten des Kometen sind unbekannt, dieselben können aber auf andere Formen hingeführt werden, die ich im nächsten Paragraphe vornehmen werde; ich bemerke hier nur noch, dass in den Gleichungen (2) leicht die Verhältnisse der Dreiecksflächen eingeführt werden können. Setzt man nämlich:

$$\frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]} = n'' \qquad \frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]} = n$$

so kann anstatt (2) geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} n x_{\prime} + n'' x_{\prime\prime\prime} = x_{\prime\prime} \\ n y_{\prime} + n'' y_{\prime\prime\prime} = y_{\prime\prime} \\ n z_{\prime} + n'' z_{\prime\prime\prime} = z_{\prime\prime} \end{array}\right\} \quad (3)$$

welche drei Gleichungen als Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen dienen, und welche in eine zur Auflösung geeignete Form übergeführt werden sollen.

## §. 2. Transformation der heliocentrischen Coordinaten des Kometen und Aufstellung einer Relation zwischen den geocentrischen Entfernungen.

Nennt man $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ die geocentrischen Coordinaten des Kometen, $X$, $Y$ und $Z$ die geocentrischen Coordinaten der Sonne und unterscheidet dieselben, wie früher, für die drei verschiedenen Orte durch unten angehängte Accente, so ist allgemein:

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi - X \\ y = \eta - Y \\ z = \zeta - Z \end{array}\right\} \quad (4)$$

Die Coordinaten, die den Beobachtungen oder den Ephemeriden entnommen sind, sind in der Regel polare Coordinaten und es wird zweckmässig sein, dieselben sofort in das Problem einzuführen. Vor Allem aber stellt sich die Frage, welches Coordinatensystem die meisten Vortheile bietet. Ohne Zweifel ist diess das System der Längen und Breiten, da die Breite der Sonne vernachlässigt oder streng eliminirt werden kann (vergl. pag. 36, 38). Es ist klar, dass die Wahl des Coordinatensystems die Allgemeinheit einer Methode nicht beeinflussen kann; ich nehme daher an, dass die Sonnenbreiten der Null gleich sind, was wie schon bemerkt wurde, völlig streng geschehen kann. Nennt man $\varrho$ die Entfernung des Kometen von der Erde, $\lambda$ und $\beta$ die geocentrische Länge und Breite, $R$ die Entfernung der Sonne von der Erde, $L$ die geocentrische Sonnenlänge, so ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = \varrho \cos\lambda \cos\beta & X = R \cos L \\ \eta = \varrho \sin\lambda \cos\beta & Y = R \sin L \\ \zeta = \varrho \sin\beta & Z = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Für die drei verschiedenen in Betracht kommenden Orte werden diese Grössen, wie früher, durch Accente unterschieden. Substituirt man nun in den Gleichungen (3) die Werthe aus (4) und ersetzt die rechtwinkligen Coordinaten durch die polaren nach (5) und zählt die Längen von einem vorläufig willkührlich gewählten Punkte, dessen Länge $\Pi$ ist, so wird:

$$\left.\begin{array}{l}
n\{\varrho_{,}\cos(\lambda_{,}-\Pi)\cos\beta_{,}-R_{,}\cos(L_{,}-\Pi)\}+n''\{\varrho_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-\Pi)\cos\beta_{,,,}-R_{,,,}\cos(L_{,,,}-\Pi)\} \\
\qquad = \varrho_{,,}\cos(\lambda_{,,}-\Pi)\cos\beta_{,,}-R_{,,}\cos(L_{,,}-\Pi) \\
n\{\varrho_{,}\sin(\lambda_{,}-\Pi)\cos\beta_{,}-R_{,}\sin(L_{,}-\Pi)\}+n''\{\varrho_{,,,}\sin(\lambda_{,,,}-\Pi)\cos\beta_{,,,}-R_{,,,}\sin(L_{,,,}-\Pi)\} \\
\qquad = \varrho_{,,}\sin(\lambda_{,,}-\Pi)\cos\beta_{,,}-R_{,,}\sin(L_{,,}-\Pi) \\
\qquad n\varrho_{,}\sin\beta_{,}+n''\varrho_{,,,}\sin\beta_{,,,}=\varrho_{,,}\sin\beta_{,,}
\end{array}\right\} \quad (6)$$

wodurch die verlangte Transformation hergestellt ist. Diese Gleichungen enthalten fünf Unbekannte, nämlich $\varrho_{,}$ $\varrho_{,,}$ $\varrho_{,,,}$ und $n$, $n''$; es werden später die Hilfsmittel angegeben werden, durch die man mindestens zu einer genäherten Kenntniss der Werthe $n$ und $n''$ gelangt; ich setze desshalb voraus, dass diese beiden Unbekannten durch andere Gleichungen bestimmt sind. Es liegen demnach drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor und es liesse demnach die Bestimmung von $\varrho_{,}$ $\varrho_{,,}$ und $\varrho_{,,,}$ aus diesen keine Schwierigkeit übrig, wenn nicht wie oben (pag. 94) erwähnt wurde für die Bestimmung parabolischer Elemente drei Beobachtungen zu viel Bestimmungsstücke liefern würden; es tritt dadurch abermals eine Unbestimmtheit auf, so dass es nur möglich ist, eine Unbekannte zu eliminiren und eine Relation zwischen den übrigen zwei Grössen herzustellen. Um demnach nur fünf Bestimmungsstücke anwenden zu können, wird man die eine Beobachtung als unvollständig ansehen; für die Sicherheit der Elemente ist es wol am zweckdienlichsten, wenn man die mittlere Beobachtung hierzu auswählt, doch wird es keinen Nachtheil für die Methode haben, wenn eine der äusseren Beobachtungen unvollständig ist; man wird nur bei der Durchführung der Rechnung die Daten der unvollständigen Beobachtung mit dem Accente: ,, versehen und mit konsequenter Berücksichtigung der Vorzeichen (es werden negative Zwischenzeiten auftreten) die Rechnung durchführen. Unter diesem Vorbehalt werde ich die mittlere Beobachtung als unvollständig bezeichnen. Die Beobachtung gibt die Richtungslinie, in welcher der Komet zur Beobachtungszeit steht; die Linie im Raume ist durch zwei unabhängige Bedingungen festgestellt, eine Ebene aber nur durch eine Gleichung; ich werde daher die mittlere Beobachtung dadurch zu einer unvollständigen machen, dass ich voraussetze, dass der Komet zur Beobachtungszeit bloss in einer bestimmten Ebene steht, die durch die Beobachtungsrichtung hindurchgelegt ist. Diese Bedingung kann man auch so fassen, dass der Komet zur Zeit der mittleren Beobachtung in einem bestimmten grössten Kreise steht, der durch diese hindurchgelegt ist, da sich die Richtungslinie als Punkt, die gewählte Ebene als grösster Kreis auf der Himmelskugel projicirt. Der aufsteigende Knoten dieses grössten Kreises in der Ekliptik sei $\Pi$ und die Neigung $J$. Die Bedingung, dass der grösste Kreis durch die mittlere Beobachtung hindurchgeht, ist enthalten in:

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg}\beta_{,,}}{\sin(\lambda_{,,}-\Pi)}$$

In dieser Relation ist eine Bedingung völlig willkührlich, und $\Pi$ kann beliebig gewählt werden, wenn nur $J$ dann dieser Relation entsprechend bestimmt wird. Die Wahl eines bestimmten grössten Kreises behalte ich dem §. 7 vor, und hebe nur hier hervor, dass diese Wahl charakteristisch ist für die verschiedenen Methoden.

Um nun diese Relation in den Gleichungen (6) einzuführen, setze ich den Abstand des mittleren Kometenortes von dem aufsteigenden Knoten des grössten Kreises ($\Pi$) gleich $u$; es ist nach dem Obigen $u$ völlig unbestimmt, so lange nicht andere Bedingungen (Parabel) in das Problem eingeführt werden. Für diesen Winkel $u$ finden sich leicht die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda_{,,} - \Pi)\cos\beta_{,,} &= \cos u \\ \sin(\lambda_{,,} - \Pi)\cos\beta_{,,} &= \sin u \cos J \\ \sin\beta_{,,} &= \sin u \sin J \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

die in den Gleichungen (6) eingesetzt werden müssen und demnach $u$ als neue, vierte Unbekannte einführen. Ich werde nun $u$ und $\varrho_{,,}$ aus (6) eliminiren, wodurch eine Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ ermittelt wird. Im folgenden Paragraph wird nämlich gezeigt werden, dass sich mit Hilfe der Gesetze der parabolischen Bewegung ebenfalls eine weitere Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ aufstellen lässt, die in Verbindung mit der ersteren sofort die Eruirung der Werthe $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ gestattet.

Die verlangte Elimination wird sich nicht schwierig durchführen lassen. Bezeichnet man der Reihe nach die Werthe der Ausdrücke links vom Gleichheitszeichen in (6) mit $I$, $II$ und $III$, so wird durch (7) sofort erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \varrho_{,,} \cos u - R_{,,} \cos(L_{,,} - \Pi) \\ II &= \varrho_{,,} \sin u \cos J - R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi) \\ III &= \varrho_{,,} \sin u \sin J \end{aligned}$$

Man kann aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen allein $\varrho_{,,} \sin u$ eliminiren. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit $\sin J$, die dritte mit $-\cos J$ und addirt, so wird:

$$II \sin J - III \cos J = - R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi) \sin J$$

Setzt man für $II$ und $III$ die Werthe ein, so findet sich:

$$\begin{aligned} \varrho_{,} n \{\sin(\lambda_{,} - \Pi)\cos\beta_{,} \sin J - \sin\beta_{,} \cos J\} + \varrho_{,,,} n'' \{\sin(\lambda_{,,,} - \Pi)\cos\beta_{,,,} \sin J - \sin\beta_{,,,} \cos J\} = \\ = n R_{,} \sin(L_{,} - \Pi)\sin J - R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi)\sin J + n'' R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \Pi)\sin J \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \odot_{,} &= R_{,} \sin(L_{,} - \Pi) \\ \odot_{,,} &= R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi) \\ \odot_{,,,} &= R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \Pi) \\ \mathcal{S}_{,} &= \sin\beta_{,} \cos J - \sin(\lambda_{,} - \Pi)\cos\beta_{,} \sin J \\ \mathcal{S}_{,,,} &= \sin(\lambda_{,,,} - \Pi)\cos\beta_{,,,} \sin J - \sin\beta_{,,,} \cos J \end{aligned}$$

so kann man die obige Gleichung schreiben:

$$-\varrho_{,} n \mathcal{S}_{,} + \varrho_{,,,} n'' \mathcal{S}_{,,,} = \sin J \{n \odot_{,} - \odot_{,,} + n'' \odot_{,,,}\}$$

wobei die symbolische Bezeichnung auf die Entstehung der Werthe hinweist.

Löst man diese Gleichungen nach $\varrho_{,,,}$ auf, so wird:

$$\varrho_{,,,} = \frac{\sin J}{\mathcal{S}_{,,,}} \left\{ \frac{n}{n''} \odot_{,} - \frac{\odot_{,,}}{n''} + \odot_{,,,} \right\} + \frac{n\,\mathcal{S}_{,}}{n''\,\mathcal{S}_{,,,}}\,\varrho_{,} \qquad (8)$$

welches die Fundamentalgleichung für die folgende Untersuchung ist; man kann bemerken, dass die erlangte Form geschrieben werden kann:

$$\varrho_{,,,} = m + M\varrho_{,} \qquad (9)$$

und eine sehr einfache Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ abgibt. Schliesslich füge ich noch die Bemerkung an, dass sich die geometrische Bedeutung der Grössen $\mathcal{S}_{,}$ und $\mathcal{S}_{,,,}$ sehr leicht nachweisen lässt, es sind die Sinus der Perpendikel vom ersten und dritten Kometenort auf den durch die mittlere Beobachtung hindurchgelegten grössten Kreis.

## §. 3. Ableitung einer Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ aus den Gesetzen für die parabolische Bewegung.

Eine so einfache Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$, wie diess im vorigen Paragraph geschehen ist, lässt sich allerdings nicht durch die Kepler'schen Gesetze herstellen; man wird zu einer Gleichung sehr hohen Grades geführt, die aber durch zweckmässige Umformungen verhältnissmässig leicht durch Versuche gelöst werden kann in Verbindung mit der Gleichung (9). $r_{,}$ und $r_{,,,}$, die Distanzen des Kometen von der Sonne, lassen sich unschwer als Funktionen von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ darstellen, und es wird desshalb nur nöthig sein, eine Relation zwischen $r_{,}$ und $r_{,,,}$ aufzustellen, wozu auch die Sehne ($s$) zwischen dem ersten und dritten Kometenorte hinzukommt, die ebenfalls eine Funktion von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ ist. Nach pag. 50 hat man, wenn mit $Fl$ die Fläche der Parabel zwischen dem Perihelabstande und dem Radiusvector bezeichnet wird, für den ersten Ort:

$$2\,Fl_{,} = kt_{,}\sqrt{2\,q} = 2\,q^2\,(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\,v_{,})$$

und ebenso für den dritten Ort

$$2\,Fl_{,,,} = kt_{,,,}\sqrt{2\,q} = 2\,q^2\,(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\,v_{,,,})$$

durch Subtraktion dieser Gleichungen wird erhalten:

$$2\,\text{Sector} = k\,(t_{,,,} - t_{,})\sqrt{2\,q} = 2\,q^2\,\{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,} - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,} + \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}v_{,,,} - \mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}v_{,})\}$$

In dieser Gleichung ist nun $q$ zu eliminiren und $v_{,}$ und $v_{,,,}$ als Funktionen von $r_{,}$ und $r_{,,,}$ und der Sehne ($s$) zwischen dem ersten und dritten Kometenorte auszudrücken. Vorerst kann man obige Gleichung folgendermassen transformiren:

$$\begin{aligned} k\,(t_{,,,} - t_{,})\sqrt{2\,q} &= 2\,q^2\,(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,} - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,})\,(1 + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\,v_{,,,} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\,v_{,}) \\ &= 2\,q^2\,\{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,} - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,}\}\,\{1 + \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,} - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,})^2 + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,}\} \end{aligned}$$

bedenkt man, dass ist:

$$r = q\,\sec^2\tfrac{1}{2}\,v$$

und setzt man:

$$\tfrac{1}{2}\,(v_{,,,} - v_{,}) = f$$

so wird geschrieben werden können

$$1 + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,,,}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\,v_{,} = \frac{\cos\frac{1}{2}\,v_{,,,}\,\cos\frac{1}{2}\,v_{,} + \sin\frac{1}{2}\,v_{,}\,\sin\frac{1}{2}\,v_{,,,}}{\cos\frac{1}{2}\,v_{,}\,\cos\frac{1}{2}\,v_{,,,}} = \frac{\cos f\sqrt{r_{,}\,r_{,,,}}}{q}$$

ferner:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v_{,,,} - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v_{,} = \frac{\sin\frac{1}{2}v_{,,,}\cos\frac{1}{2}v_{,} - \cos\frac{1}{2}v_{,,,}\sin\frac{1}{2}v_{,}}{\cos\frac{1}{2}v_{,}\cos\frac{1}{2}v_{,,,}} = \frac{\sin f\sqrt{r_{,}r_{,,,}}}{q}$$

wodurch man erhält:

$$k\,(t_{,,,} - t_{,})\sqrt{2q} = 2\,r_{,}r_{,,,}\sin f\cos f + \tfrac{4}{3}\,\frac{(r_{,}r_{,,,})^{\frac{3}{2}}\sin f^3}{q}$$

oder auch:

$$k\,(t_{,,,} - t_{,}) = \frac{\sin f\cos f\,r_{,}r_{,,,}\sqrt{2}}{\sqrt{q}} + \frac{\sin f^3\,(r_{,}r_{,,,})^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3q^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

Wie man sieht sind die wahren Anomalien nun fortgeschafft und an ihrer Stelle findet sich nur die Differenz der Anomalien, eine Grösse, die leicht durch $s$ ausgedrückt werden kann. Vorerst wird es aber nothwendig sein, zu zeigen, dass die Unbekannte $q$ fortgeschafft werden kann. Es ist:

$$\begin{aligned}\sin f^2 &= \sin\tfrac{1}{2}v_{,,,}^2\cos\tfrac{1}{2}v_{,}^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}v_{,}\cos\tfrac{1}{2}v_{,}\sin\tfrac{1}{2}v_{,,,}\cos\tfrac{1}{2}v_{,,,} + \sin\tfrac{1}{2}v_{,}^2\cos\tfrac{1}{2}v_{,,,}^2\\ &= \frac{q}{r_{,}} + \frac{q}{r_{,,,}} - 2\cos\tfrac{1}{2}v_{,}\cos\tfrac{1}{2}v_{,,,}\left(\cos\tfrac{1}{2}v_{,}\cos\tfrac{1}{2}v_{,,,} + \sin\tfrac{1}{2}v_{,}\sin\tfrac{1}{2}v_{,,,}\right)\\ &= \frac{q}{r_{,}} + \frac{q}{r_{,,,}} - 2\cos f\,\frac{q}{\sqrt{r_{,}r_{,,,}}}\end{aligned}$$

daraus leitet sich sofort ab:

$$\sin f^2 = \frac{q}{r_{,}r_{,,,}}\left(r_{,} + r_{,,,} - 2\cos f\sqrt{r_{,}r_{,,,}}\right) \qquad (2)$$

Dieser Werth in (1) für $\sin f$ substituirt macht sofort $q$ verschwinden, es wird aber zweckmässiger sein, diese Substitution nicht sogleich auszuführen. Man kann für $f$ die Sehne ($s$) einführen. Man hat:

$$\begin{aligned}s^2 &= r_{,}^2 + r_{,,,}^2 - 2\,r_{,}r_{,,,}\cos 2f\\ &= (r_{,} + r_{,,,})^2 - 4\,r_{,}r_{,,,}\cos f^2\end{aligned}$$

demnach ist

$$\cos f = \pm\sqrt{\frac{s^2 - (r_{,} + r_{,,,})^2}{4r_{,}r_{,,,}}} = \frac{\pm\,mn}{2\sqrt{r_{,}r_{,,,}}} \qquad (3)$$

wobei der Kürze halber gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned}(r_{,} + r_{,,,} + s)^{\frac{1}{2}} &= m\\ (r_{,} + r_{,,,} - s)^{\frac{1}{2}} &= n\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Das doppelte Zeichen wird erledigt, wenn man bedenkt, dass das positive Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung des Kometen kleiner als 180° ist ($f < 90°$), dass hingegen das negative Zeichen anzunehmen sein wird, wenn $f > 90°$ ist.

Die Gleichung (2) ergibt:

$$\frac{\sin f\sqrt{r_{,}r_{,,,}}}{\sqrt{q}} = \left(r_{,} + r_{,,,} - 2\cos f\sqrt{r_{,}r_{,,,}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ein Zweifel über das Zeichen, welches hier stets positiv gewählt werden muss, kann nicht obwalten, da $\sin f$ stets positiv sein muss, indem $f$ niemals grösser als 180° werden kann. Führt man nun den für $\cos f$ (3) gefundenen Werth ein, und bedenkt, dass gesetzt werden kann nach (4):

$$r_{,} + r_{,,,} = \tfrac{1}{2}(m^2 + n^2)$$

so wird

$$\frac{\sin f \sqrt{r_, r_{,,,}}}{\sqrt{q}} = \{\tfrac{1}{2}(m^2 + n^2) \mp mn\}^{\frac{1}{2}}$$

oder ebenfalls

$$\frac{\sin f \sqrt{2 r_, r_{,,,}}}{\sqrt{q}} = m \mp n.$$

Geht man nun wieder auf die Gleichung (1) zurück, so wird mit Rücksicht auf die bisherigen Entwicklungen:

$$k(t_{,,,} - t_,) = \cos f (m \mp n) \sqrt{r_, r_{,,,}} + \tfrac{1}{6}(m \mp n)^3 = \pm \tfrac{1}{2} mn (m \mp n) + \tfrac{1}{6}(m \mp n)^3$$

daraus folgt:

$$6k(t_{,,,} - t_,) = m^3 \mp n^3 = (r_, + r_{,,,} + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_, + r_{,,,} - s)^{\frac{3}{2}} \qquad (5)$$

Es gilt das obere Zeichen, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere Zeichen, wenn dieselbe grösser als 180° ist. Bei ersten Bahnbestimmungen hat demnach das obere Zeichen allein eine praktische Bedeutung.

Die Gleichung (5) ist unter dem Namen des Lambert'schen Theorem's bekannt, ist aber zuerst von Euler aufgestellt worden; Lambert hat diese Form erweitert auf Ellipsen und Hyperbeln, indem er den eben aufgestellten Ausdrücken noch weitere Glieder hinzufügte, die mit den negativen Potenzen von $a$ (der halben grossen Achse) multiplicirt erscheinen, also für die Parabel verschwinden. Die Gleichung (5) enthält die Grössen $r_, r_{,,,}$ und $s$, die nun als Funktionen von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ darzustellen sind. Es wird sofort

$$r_,^2 = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2$$
$$r^2_{,,,} = x^2_{,,,} + y^2_{,,,} + z^2_{,,,}$$
$$s^2 = (x_{,,,} - x_,)^2 + (y_{,,,} - y_,)^2 + (z_{,,,} - z_,)^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} r_,^2 &= (\xi_, - X_,)^2 + (\eta_, - Y_,)^2 + \zeta_,^2 \\ r^2_{,,,} &= (\xi_{,,,} - X_{,,,})^2 + (\eta_{,,,} - Y_{,,,})^2 + \zeta^2_{,,,} \\ s^2 &= \{(\xi_{,,,} - X_{,,,}) - (\xi_, - X_,)\}^2 + \{(\eta_{,,,} - Y_{,,,}) - (\eta_, - Y_,)\}^2 + (\zeta_{,,,} - \zeta_,)^2 \end{aligned}\right\} (6).$$

in welchen Ausdrücken wieder die polaren Coordinaten eingeführt werden müssen. Man sieht daraus sofort, dass die drei in der Euler'schen Gleichung vorkommenden Grössen als Funktionen von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ dargestellt werden können. Ohne zunächst auf die Hilfsmittel einzugehen, welche sich darbieten, um diese Rechnung möglichst einfach ausführen zu können, genügt die Bemerkung, dass die eben aufgestellten Gleichungen in Verbindung mit der im vorigen Paragraph ermittelten Relation

$$\varrho_{,,,} = m + M\varrho_,$$

die beiden Unbekannten $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ bestimmen, also das Problem vorläufig als gelöst erscheint, wofern die Grössen $m$ und $M$ bekannt sind.

## §. 4. Transformation der Euler'schen Gleichung.

Die Euler'sche Gleichung in der soeben aufgestellten Form ist besonders in der Anwendung bei ersten Bahnbestimmungen, wo $s$ nothwendig klein ist, wenig bequem und sicher, da $6k(t_{,,,} - t_,)$ aus der Differenz zweier nahe gleich grosser Werthe

bestimmt werden muss. Encke (Berliner astron. Jahrbuch 1833) hat eine sehr zweckmässige Umstellung dieser Formel vorgeschlagen. Setzt man nämlich

$$\frac{s}{r_{,} + r_{,,,}} = \sin\gamma$$

so kann die Euler'sche Gleichung geschrieben werden, wenn mit $t$ die Zwischenzeit: $(t_{,,,} - t_{,})$ bezeichnet wird

$$\frac{6\,kt}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} = (1 + \sin\gamma)^{\frac{3}{2}} \mp (1 - \sin\gamma)^{\frac{3}{2}}$$

$\sin\gamma$ wird der Natur des Problems nach stets positiv sein und man wird desshalb stets $\gamma < 90^0$ annehmen können. Es ist aber

$$(\cos\tfrac{1}{2}\gamma \pm \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2 = 1 \pm \sin\gamma$$

Da die Bedingung $\gamma < 90^0$ besteht, so ist im Ausdrucke

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma \pm \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \pm\sqrt{1 \pm \sin\gamma}$$

nur das obere positive Zeichen der Wurzel zu berücksichtigen, und man hat

$$\frac{6\,kt}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} = (\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^3 \mp (\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^3 \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung kann, sobald für $r_{,}$ und $r_{,,,}$ bestimmte Werthe angenommen sind, $\gamma$ ermittelt werden, und man hat dann

$$s = (r_{,} + r_{,,,})\sin\gamma$$

so dass die Sehne für eine bestimmte Annahme über $r_{,} + r_{,,,}$ nach der Euler'schen Gleichung bestimmt ist. Die Aufsuchung des Winkels $\gamma$ gestattet aber noch wesentliche die Rechnung erleichternde Transformationen. Ich nehme zuerst in dem Ausdrucke (1) das obere Zeichen vor; man erhält dann

$$\frac{6\,kt}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} = 6\sin\tfrac{1}{2}\gamma - 4\sin\tfrac{1}{2}\gamma^3$$

oder

$$\frac{6\,kt}{2^{\frac{3}{2}}\,(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} = 3\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}}\right)^3$$

Da $\gamma$ niemals grösser als $90^0$ angenommen wird, so ist im äussersten Falle:

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also ist es stets erlaubt zu setzen

$$\frac{6\,kt}{2^{\frac{3}{2}}\,(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} = \sin\theta \quad (3)$$

da aber bekanntlich ist

$$\sin 3\,\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$$

so folgt unmittelbar:

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{3}\theta\,\sqrt{2} \quad (4)$$

Die Gleichungen lassen nur eine Auflösung zu, da $\theta$ kleiner als $90^0$ angenommen werden muss; denn es ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{also:} \quad \sin\tfrac{1}{3}\theta \leqq \tfrac{1}{2}$$

Ich betrachte nun in der Gleichung (1) den zweiten Fall, wo das Zeichen positiv ist. — Man erhält

$$\frac{6kt}{2^{\frac{3}{2}}(r_, + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} = 3\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}}\right)^3$$

Man wird zu setzen haben

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{2}$$

Der Werth von $\cos\frac{1}{2}\gamma$ ist innerhalb der Grenzen 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eingeschlossen, also

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

daraus wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta \geqq \tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{1}{2}\theta \geqq 30^\circ.$$

Aus dem Grenzwerth $\cos\frac{1}{2}\gamma = 1$ ergibt sich aber

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tfrac{1}{2}\theta \leqq 45^\circ$$

d. h. $\theta$ ist innerhalb der Grenzen 90° und 135° eingeschlossen.

Vergleicht man die eben gewonnenen Resultate mit denjenigen, welche der erste Fall (negatives Zeichen) darbot, so sieht man auf den ersten Blick, dass, sobald

$$\sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ist, nur eine Lösung möglich ist, die dem ersten Falle entspricht, ist aber

$$\sin\theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

so geben beide Fälle eine entsprechende, aber verschiedene Lösung, je nachdem man für $\theta$ den Werth im ersten oder zweiten Quadranten annimmt.

Ich nehme nun wieder den ersten für das vorliegende Problem wichtigeren Fall vor. Die Gleichung (2) lässt sich zunächst umsetzen in:

$$s = (r_, + r_{,,,}) \,.\, 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{1 - \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma}$$

oder auch nach (4)

$$s = (r_, + r_{,,,}) \,.\, 2^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\cos\tfrac{3}{2}\theta}$$

Nimmt man nun für die Summe der Radienvektoren aus (3) den entsprechenden Werth, so findet sich zunächst

$$(r_, + r_{,,,}) = \frac{6kt}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_, + r_{,,,}}}\operatorname{cosec}\theta$$

und man erhält schliesslich

$$s = \frac{2kt}{\sqrt{r_, + r_{,,,}}} \cdot \frac{3\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta}\sqrt{\cos\tfrac{3}{2}\theta} = \frac{2kt}{\sqrt{r_, + r_{,,,}}}\,\mu \qquad (5)$$

Bei ersten Bahnbestimmungen wird $\theta$ eine kleine Grösse sein, also $\mu$ nahe der Einheit gleich werden und es wird sich desshalb $\log\mu$ in eine Tafel bringen lassen, welcher Logarithmus sich in dem vorliegenden Falle in Rücksicht auf den Winkel $\theta$ nur sehr langsam ändert. Encke hat nun eine Tafel berechnet, die ich als Tafel VIII im Anhange aufgenommen habe, welche mit dem Argument

$$\eta = \frac{2kt}{(r_, + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} \qquad \log 2k = 8.5366114$$

sofort den Werth von $\log\mu$ angibt. Die Tafel erstreckt sich für das Argument $\eta$ bis 0.540 und es wird selten der Fall eintreten, dass bei ersten Bahnbestimmungen die Grenzen dieser Tafel überschritten werden; geschieht diess, so wird man ohne Nach-

theil die Euler'sche Gleichung in ihrer unveränderten Form anwenden können. — Die Berechnung der Sehne nach Encke's Umformung stellt sich wie folgt: Ist ein Werth für $(r_{,} + r_{,,,})$ angenommen, so berechnet man zunächst das Argument $\eta$, mit diesem nimmt man aus Tafel VIII den $\log \mu$ und bestimmt dann die Sehne nach (5).

Der Weg, den man nun zur Lösung der Aufgabe einschlagen kann, wird sich aus dem bisherigen in folgender Weise ergeben. Man macht eine bestimmte Annahme über $\varrho_{,}$ und rechnet daraus nach:

$$\varrho_{,,,} = m + M\varrho_{,}$$

die Distanz des Kometen zur Zeit der dritten Beobachtung $(\varrho_{,,,})$. Aus $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ wird sich $r_{,}$, $r_{,,,}$ und $s$ finden lassen, wie diess am Schlusse des §. 3 (6) in den allgemeinsten Umrissen gezeigt wurde. Aus den so ermittelten Werthen für $r_{,}$ und $r_{,,,}$ berechnet man nach der eben gezeigten Methode den Werth von $s$, welcher mit dem früher aus den Distanzen direkt gefundenen Werth für dieselbe Grösse stimmen muss, sobald über $\varrho_{,}$ die richtige Annahme gemacht ist. Treten jedoch, wie diess im Allgemeinen stets stattfinden wird, Differenzen zwischen diesen beiden Werthen auf, so wird man $\varrho_{,}$ so lange variiren, bis die Uebereinstimmung hergestellt ist. Diese allgemeine Uebersicht der Methode der Lösung mag vorläufig genügen, um sich ein richtiges Bild von derselben zu machen.

Ich werde nun noch eine interessante Eigenschaft des Winkels $\gamma$ vornehmen. Die Formel (1) des §. 3 kann verwandelt werden in

$$\frac{\text{Sect}}{\triangle} = 1 + \tfrac{1}{3}\,\frac{\sin f^2 \sqrt{r_{,} r_{,,,}}}{q \cos f}$$

da gesetzt werden darf

$$\tfrac{1}{2}\,[r_{,} r_{,,,}] = \triangle = \tfrac{1}{2}\, r_{,} r_{,,,} \sin 2f = r_{,} r_{,,,} \sin f \cos f.$$

Mit Rücksicht auf die in demselben Paragraphen ausgeführten Transformationen und unter der Annahme, dass ist:

$$2f < 180^0$$

wird sich finden:

$$\frac{\sin f^2 \sqrt{r_{,} r_{,,,}}}{q} = \frac{(m-n)^2}{2\sqrt{r_{,} r_{,,,}}} \qquad \cos f = \frac{mn}{2\sqrt{r_{,} r_{,,,}}}$$

Es ist dem zu Folge:

$$\frac{\text{Sect}}{\triangle} = 1 + \tfrac{1}{3}\,\frac{(m-n)^2}{mn}$$

Da aber gefunden wurde

$$s = (r_{,} + r_{,,,}) \sin \gamma$$

so wird mit Rücksicht darauf, dass $\gamma < 90^0$ ist, auch geschrieben werden können:

$$m = \sqrt{r_{,} + r_{,,,}}\,.\,\sqrt{1 + \sin\gamma} = \sqrt{r_{,} + r_{,,,}}\,\{\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma\}$$

$$n = \sqrt{r_{,} + r_{,,,}}\,.\,\sqrt{1 - \sin\gamma} = \sqrt{r_{,} + r_{,,,}}\,\{\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma\}$$

woraus folgt:

$$(m-n)^2 = 4\,(r_{,} + r_{,,,}) \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

$$mn = (r_{,} + r_{,,,}) \cos\gamma.$$

Man erhält durch Einsetzung dieser Werthe sogleich:

$$\frac{\text{Sect}}{\triangle} = 1 + \tfrac{4}{3}\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma} = \frac{1 + 2\sec\gamma}{3}$$

Dieser höchst elegante Ausdruck zur Berechnung des Verhältnisses des Sektors zum Dreieck wird angewendet werden können, sobald $r_,$, $r_{,,,}$ und die Zwischenzeit bekannt sind, denn man kann, wie oben gezeigt wurde, mit dem Argumente $\eta$, welches von den drei eben genannten Grössen abhängig ist, ohne Schwierigkeit $\gamma$ berechnen.

## §. 5. Darstellung von $r_,$, $r_{,,,}$ und $s$ als Funktionen von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$.

Wenn es sich darum handelt, $r_,$, $r_{,,,}$ und $s$ als Funktionen von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ darzustellen, so ist es ganz wesentlich zu entscheiden, welche Methode der Bahnbestimmung man wählt. Wählt man, wie diess wol meistens geschieht, Olbers' Methode der Bahnbestimmung, so lässt sich, wie später gezeigt wird, die in §. 2 (pag. 99) aufgestellte Relation auf die Form bringen:

$$\varrho_{,,,} = M\varrho_,$$

wobei $M$ für den gegebenen Fall konstant ist. Ist Olbers' Methode nicht anwendbar oder will man, um in einem speciellen Falle genauer zu rechnen, die zweite unten vorgeschlagene Methode befolgen, so wird die Relation

$$\varrho_{,,,} = m + M\varrho_,$$

vorerst durch das Vorhandensein einer neuen Grösse ($m$) komplicirt, und ausserdem werden, wie sich diess später herausstellt, $m$ und $M$ selbst Funktionen von $r_,$ und $r_{,,,}$, sind also innerhalb der Versuche selbst variabel. Die Anordnung und Ableitung der Formeln wird demnach in Berücksichtigung dieser Umstände in zweifacher Weise vorgenommen werden müssen.

Ich nehme vorerst den praktisch wichtigeren Fall vor, wo $M$ als konstant und $m$ der Null gleich betrachtet werden darf. Führt man in den Gleichungen (6) des §. 3 (pag. 101) zunächst die polaren Coordinaten ein, so wird man sofort erhalten

$$r_,^2 = \varrho_,^2 + R_,^2 - 2\varrho_, R_, \cos(\lambda_, - L_,) \cos\beta_,$$

$$r^2_{,,,} = \varrho^2_{,,,} + R^2_{,,,} - 2\varrho_{,,,} R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \cos\beta_{,,,}$$

Der Ausdruck für $s^2$ lässt sich auf ähnliche Formen nach Einsetzung einiger Hilfsgrössen hinführen. Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \xi_{,,,} - \xi_, &= \varrho_, h \cos\zeta \cos H \\ \eta_{,,,} - \eta_, &= \varrho_, h \cos\zeta \sin H \\ \zeta_{,,,} - \zeta_, &= \varrho_, h \sin\zeta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} X_{,,,} - X_, &= g \cos G \\ Y_{,,,} - Y_, &= g \sin G \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so wird sofort

$$s^2 = \varrho_,^2 h^2 + g^2 - 2h\varrho_, g \cos\zeta \cos(G - H)$$

Die Berechnung und Auffindung dieser Grössen hat keine Schwierigkeit. Bedenkt man, dass gesetzt wurde in dem vorliegenden Falle:

$$\varrho_{,,,} = M\varrho_,$$

so wird durch Einführung der Polarkoordinaten in (1) erhalten, wenn man alle Längen von einem Punkte aus zählt, dessen Länge $\lambda_{,,,}$ ist:

$$\left.\begin{aligned} M\cos\beta_{,,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})\cos\beta_{,} &= h\cos\zeta\cos(H - \lambda_{,,,}) \\ \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})\cos\beta_{,} &= h\cos\zeta\sin(H - \lambda_{,,,}) \\ M\sin\beta_{,,,} - \sin\beta_{,} &= h\sin\zeta \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Formeln zur Berechnung der Hilfsgrössen in (2) werden am einfachsten erhalten, wenn man die Längen alle von $L_{,}$ aus zählt. Es wird dann

$$\left.\begin{aligned} R_{,,,}\cos(L_{,,,} - L_{,}) - R_{,} &= g\cos(G - L_{,}) \\ R_{,,,}\sin(L_{,,,} - L_{,}) &= g\sin(G - L_{,}) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Setzt man nun der Reihe nach in den Formeln für $r_{,}^2$, $r_{,,,}^2$ und $s^2$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda_{,} - L_{,})\cos\beta_{,} &= \cos\psi_{,} \\ \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})\cos\beta_{,,,} &= \cos\psi_{,,,} \\ \cos(G - H)\cos\zeta &= \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

so wird geschrieben werden können

$$r_{,}^2 = (\varrho_{,} - R_{,}\cos\psi_{,})^2 + R_{,}^2\sin\psi_{,}^2$$
$$r^2_{,,,} = (M\varrho_{,} - R_{,,,}\cos\psi_{,,,})^2 + R_{,,,}^2\sin\psi^2_{,,,}$$
$$s^2 = (\varrho_{,}h - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin\varphi^2$$

Setzt man nun weiter

$$\left.\begin{aligned} R_{,}\cos\psi_{,} &= f_{,} & \frac{R_{,,,}\cos\psi_{,,,}}{M} &= f_{,,,} \\ R_{,}\sin\psi_{,} &= B_{,} & \frac{R_{,,,}\sin\psi_{,,,}}{M} &= B_{,,,} \\ \frac{g\cos\varphi}{h} &= \gamma & \frac{g\sin\varphi}{h} &= A \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und für jeden Versuch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho_{,} - f_{,}}{B_{,}} &= \operatorname{tg}\theta_{,} \\ \frac{\varrho_{,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}} &= \operatorname{tg}\theta_{,,,} \\ \frac{\varrho_{,} - \gamma}{A} &= \operatorname{tg}\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} r_{,} &= (R_{,}\sin\psi_{,})\sec\theta_{,} \\ r_{,,,} &= (R_{,,,}\sin\psi_{,,,})\sec\theta_{,,,} \\ s &= (g\sin\varphi)\sec\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Unbekannte $\varrho_{,}$ erscheint erst in den Formeln (7) und (8), es können demnach die Ausdrücke (3) — (6) für ein gegebenes $M$ ein für allemal berechnet werden und sind von jeder Hypothese über $\varrho_{,}$ frei.

Ist die zweite Form für die Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ gewählt, nämlich

$$\varrho_{,,,} = m + M\varrho_{,}$$

so werden, wie diess später gezeigt werden wird, $m$ und $M$ selbst Funktionen von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$, wofern man im Resultate eine genügende Genauigkeit erhalten will; dann sind die Formeln nicht mehr so einfach, lassen sich aber trotzdem noch in recht bequeme Ausdrücke verwandeln. Für $r_{,}$ und $r_{,,,}$ ergibt sich, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda_{,} - L_{,})\cos\beta_{,} &= \cos\psi_{,} & R_{,}\cos\psi_{,} &= f_{,} & R_{,}\sin\psi_{,} &= B_{,} \\ \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})\cos\beta_{,,,} &= \cos\psi_{,,,} & R_{,,,}\cos\psi_{,,,} &= f_{,,,} & R_{,,,}\sin\psi_{,,,} &= B_{,,,} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ähnlich wie früher

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\varrho_{,} - f_{,}}{B_{,}} = \operatorname{tg}\theta_{,} & \frac{\varrho_{,,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} \\ r_{,} = B_{,}\sec\theta_{,} & r_{,,,} = B_{,,,}\sec\theta_{,,,} \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Berechnung von $s^2$ muss aber in anderer Weise geschehen. Führt man in der Formel (6) des §. 3 (pag. 101), nachdem man die Quadrirung ausgeführt hat, die Polarkoordinaten ein, so wird erhalten

$$\begin{aligned} s^2 = \varrho_{,}^2 + \varrho^2_{,,,} + R_{,}^2 + R^2_{,,,} & - 2\varrho_{,}\cos\beta_{,}\{R_{,}\cos(\lambda_{,} - L_{,}) - R_{,,,}\cos(\lambda_{,} - L_{,,,})\} \\ & - 2\varrho_{,,,}\cos\beta_{,,,}\{R_{,,,}\cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) - R_{,}\cos(\lambda_{,,,} - L_{,})\} \\ & - 2\varrho_{,}\varrho_{,,,}\{\cos\beta_{,}\cos\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) + \sin\beta_{,}\sin\beta_{,,,}\} \\ & - 2R_{,}R_{,,,}\cos(L_{,,,} - L_{,}) \end{aligned}$$

um diese Formeln für die Rechnung bequemer zu gestalten, ergibt sich leicht die folgende Transformation:

$$\left.\begin{aligned} s^2 = (\varrho_{,,,} - \varrho_{,})^2 & + [(R_{,,,} - R_{,})^2 + 4R_{,}R_{,,,}\sin^2\tfrac{1}{2}(L_{,,,} - L_{,})] \\ & + 2\varrho_{,}\cos\beta_{,}[R_{,,,}\cos(\lambda_{,} - L_{,,,}) - R_{,}\cos(\lambda_{,} - L_{,})] \\ & + 2\varrho_{,,,}\cos\beta_{,,,}[R_{,}\cos(\lambda_{,,,} - L_{,}) - R_{,,,}\cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})] \\ & + 4\varrho_{,}\varrho_{,,,}[\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta_{,,,} - \beta_{,}) + \cos\beta_{,}\cos\beta_{,}\sin^2\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,,})] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Um diese Formeln kürzer schreiben zu können, setze ich die konstanten Koefficienten gewissen Buchstaben gleich, deren Bedeutung sofort ersichtlich wird, wenn man die folgende Form mit (11) vergleicht:

$$s^2 = A + B\varrho_{,} + C\varrho_{,,,} + D\varrho_{,}\varrho_{,,,} + (\varrho_{,,,} - \varrho_{,})^2$$

Diese Formel gestaltet sich für die praktische Anwendung etwas bequemer, wenn man noch setzt:

$$\frac{B + C}{D} = E$$

Es wird dann

$$s^2 = A + D(E + \varrho_{,,,})\varrho_{,} + (\varrho_{,,,} - \varrho_{,})\{C + (\varrho_{,,,} - \varrho_{,})\} \quad (12)$$

eine in der Anwendung sehr bequeme Form, da man die Zahlenwerthe von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ ohnediess kennen muss, also die Bildung von $(E + \varrho_{,,,})$ und $(\varrho_{,} - \varrho_{,,,})$ fast gar keine Mühe verursacht.

Wenn man die bisher erlangten Formeln überblickt, so ist es klar, dass die Darstellung von $r_{,}$, $r_{,,,}$ und $s$ als Funktion von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ erreicht ist und zwar in einer sehr bequemen und kurzen Weise; man könnte das Problem als gelöst betrachten, wenn nicht die bisherigen Entwicklungen die Grössen $n$ und $n''$ als bekannt voraussetzen würden. Die Ermittlung dieser Werthe werde ich jetzt vornehmen.

## §. 6. Ersetzung der Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten.

Es ist auch nach pag. 45, wenn man die Massen des Himmelskörpers der Null gleich setzt:

$$\left.\begin{aligned} \int_{v_{,}}^{v_{,,}} r^2\,dv &= k(t_{,,} - t_{,})\sqrt{p} = \tau_{,,,}\sqrt{p} \\ \int_{v_{,}}^{v_{,,,}} r^2\,dv &= k(t_{,,,} - t_{,})\sqrt{p} = \tau_{,,}\sqrt{p} \\ \int_{v_{,,}}^{v_{,,,}} r^2\,dv &= k(t_{,,,} - t_{,,})\sqrt{p} = \tau_{,}\sqrt{p} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Andererseits ist nach §. 1 des vorliegenden Abschnittes, wenn man die $xy$-Ebene des Coordinatensystems mit der Bahnebene zusammenfallen lässt

$$\left.\begin{aligned} [r_{\prime}\, r_{\prime\prime}] &= x_{\prime}\, y_{\prime\prime} - x_{\prime\prime}\, y_{\prime} \\ [r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] &= x_{\prime}\, y_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime\prime}\, y_{\prime} \\ [r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] &= x_{\prime\prime}\, y_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime\prime}\, y_{\prime\prime} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Stellt man nun zunächst $x_{\prime}\, y_{\prime}$ und $x_{\prime\prime\prime}\, y_{\prime\prime\prime}$ als Funktionen von $x_{\prime\prime}$ und $y_{\prime\prime}$ und den Zwischenzeiten dar, so wird nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\left.\begin{aligned} x_{\prime} &= x_{\prime\prime} - \frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau}\,\tau_{\prime\prime\prime} + \frac{d^2x_{\prime\prime}}{d\tau^2}\cdot\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2}{1.2} - \frac{d^3x_{\prime\prime}}{d\tau^3}\cdot\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^3}{1.2.3} + \frac{d^4x_{\prime\prime}}{d\tau^4}\cdot\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ y_{\prime} &= y_{\prime\prime} - \frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau}\,\tau_{\prime\prime\prime} + \frac{d^2y_{\prime\prime}}{d\tau^2}\cdot\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2}{1.2} - \frac{d^3y_{\prime\prime}}{d\tau^3}\cdot\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^3}{1.2.3} + \frac{d^4y_{\prime\prime}}{d\tau^4}\cdot\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ x_{\prime\prime\prime} &= x_{\prime\prime} + \frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau}\,\tau_{\prime} + \frac{d^2x_{\prime\prime}}{d\tau^2}\cdot\frac{\tau_{\prime}^2}{1.2} + \frac{d^3x_{\prime\prime}}{d\tau^3}\cdot\frac{\tau_{\prime}^3}{1.2.3} + \frac{d^4x_{\prime\prime}}{d\tau^4}\cdot\frac{\tau_{\prime}^4}{1.2.3.4} + \ldots \\ y_{\prime\prime\prime} &= y_{\prime\prime} + \frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau}\,\tau_{\prime} + \frac{d^2y_{\prime\prime}}{d\tau^2}\cdot\frac{\tau_{\prime}^2}{1.2} + \frac{d^3y_{\prime\prime}}{d\tau^3}\cdot\frac{\tau_{\prime}^3}{1.2.3} + \frac{d^4y_{\prime\prime}}{d\tau^4}\cdot\frac{\tau_{\prime}^4}{1.2.3.4} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diese eben angesetzten Ausdrücke in (2) substituirt ergeben die Dreiecksflächen als Funktionen der Zwischenzeiten und der Derivate von $x_{\prime\prime}$ und $y_{\prime\prime}$, die vorläufig nicht näher bekannt sind. Ich schalte hier die Bemerkung ein, dass offenbar ist

$$d\tau = k\,dt$$

Es ist aber nach pag. 40 die Masse des Himmelskörpers, dessen Bahn bestimmt werden soll, der Null gleich gesetzt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\,\frac{x}{r^3} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\,\frac{y}{r^3}$$

Ersetzt man nun $dt$ durch $d\tau$ und führt die hier geltenden speciellen Werthe ein, so wird

$$\frac{d^2x_{\prime\prime}}{d\tau^2} = -\frac{x_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}^3} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y_{\prime\prime}}{d\tau^2} = -\frac{y_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}^3}$$

daraus leitet sich sofort ab

$$\begin{aligned} \frac{d^3x_{\prime\prime}}{d\tau^3} &= 3\,\frac{x_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} - \frac{1}{r_{\prime\prime}^3}\,\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau} \\ \frac{d^3y_{\prime\prime}}{d\tau^3} &= 3\,\frac{y_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} - \frac{1}{r_{\prime\prime}^3}\,\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} \end{aligned}$$

und durch weitere Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{d^4x_{\prime\prime}}{d\tau^4} &= x_{\prime\prime}\left\{\frac{1}{r_{\prime\prime}^6} - \frac{12}{r_{\prime\prime}^5}\left(\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\right)^2 + \frac{3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{d^2r_{\prime\prime}}{d\tau^2}\right\} + \frac{6}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\,\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau} \\ \frac{d^4y_{\prime\prime}}{d\tau^4} &= y_{\prime\prime}\left\{\frac{1}{r_{\prime\prime}^6} - \frac{12}{r_{\prime\prime}^5}\left(\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\right)^2 + \frac{3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{d^2r_{\prime\prime}}{d\tau^2}\right\} + \frac{6}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\,\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} \end{aligned}$$

Man kann demnach setzen:

$$\left.\begin{aligned} x_{\prime} &= a_{\prime}\,x_{\prime\prime} - b_{\prime}\,\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau} \\ y_{\prime} &= a_{\prime}\,y_{\prime\prime} - b_{\prime}\,\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} \\ x_{\prime\prime\prime} &= a_{\prime\prime\prime}\,x_{\prime\prime} + b_{\prime\prime\prime}\,\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau} \\ y_{\prime\prime\prime} &= a_{\prime\prime\prime}\,y_{\prime\prime} + b_{\prime\prime\prime}\,\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

in welchen Ausdrücken der Kürze halber gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
a_{\prime} &= 1 - \tfrac{1}{2}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} - \tfrac{1}{2}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} + \left\{\frac{1}{r_{\prime\prime}^6} - \frac{12}{r_{\prime\prime}^5}\left(\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\right)^2 + \frac{3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{d^2r_{\prime\prime}}{d\tau^2}\right\}\frac{\tau^4_{\prime\prime\prime}}{24}\ldots \\
b_{\prime} &= \tau_{\prime\prime\prime} - \tfrac{1}{6}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^3}{r_{\prime\prime}^3} - \tfrac{1}{4}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\ldots \\
a_{\prime\prime\prime} &= 1 - \tfrac{1}{2}\frac{\tau_{\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{2}\frac{\tau_{\prime}^3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} + \left\{\frac{1}{r_{\prime\prime}^6} - \frac{12}{r_{\prime\prime}^5}\left(\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\right)^2 + \frac{3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{d^2r_{\prime\prime}}{d\tau^2}\right\}\frac{\tau_{\prime}^4}{24}\ldots \\
b_{\prime\prime\prime} &= \tau_{\prime} - \tfrac{1}{6}\frac{\tau_{\prime}^3}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\tau_{\prime}^4}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Substituirt man nun die Werthe aus (4) in (2), so wird erhalten:

$$[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}] = b_{\prime}\left\{x_{\prime\prime}\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} - y_{\prime\prime}\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau}\right\}$$

$$[r_{\prime\prime} r_{\prime\prime\prime}] = b_{\prime\prime\prime}\left\{x_{\prime\prime}\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} - y_{\prime\prime}\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau}\right\}$$

$$[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] = \{a_{\prime}\, b_{\prime\prime\prime} + a_{\prime\prime\prime}\, b_{\prime}\}\left\{x_{\prime\prime}\frac{dy_{\prime\prime}}{d\tau} - y_{\prime\prime}\frac{dx_{\prime\prime}}{d\tau}\right\}$$

Es ist aber bekanntlich

$$x\,dy - y\,dx = r^2 dv = k\sqrt{p}\,dt$$

demnach auch

$$[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}] = b_{\prime}\sqrt{p}$$

$$[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] = b_{\prime\prime\prime}\sqrt{p}$$

$$[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] = (a_{\prime}\, b_{\prime\prime\prime} + a_{\prime\prime\prime}\, b_{\prime})\sqrt{p}$$

Der Coefficient: $(a_{\prime}\, b_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}\, b_{\prime\prime\prime})$ ist auch nach steigenden Potenzen der Zwischenzeiten anzuordnen; es ist aber, wenn man bei den Gliedern vierter Ordnung stehen bleibt und bedenkt, dass ist:

$$\tau_{\prime} + \tau_{\prime\prime\prime} = \tau_{\prime\prime}$$

der Werth dieses Coefficienten:

$$(a_{\prime}\, b_{\prime\prime\prime} + a_{\prime\prime\prime}\, b_{\prime}) = \tau_{\prime\prime}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\tau_{\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\tau_{\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^4}(\tau_{\prime} - \tau_{\prime\prime\prime})\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\ldots\right\}$$

Man hat daher für die doppelten Dreiecksflächen die Reihen:

$$\left.\begin{aligned}
[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}] &= \tau_{\prime\prime\prime}\sqrt{p}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} - \tfrac{1}{4}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}^3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} + \ldots\right\} \\
[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] &= \tau_{\prime}\sqrt{p}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\tau_{\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\tau_{\prime}^3}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} + \ldots\right\} \\
[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}] &= \tau_{\prime\prime}\sqrt{p}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\tau_{\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\tau_{\prime\prime}^2(\tau - \tau_{\prime\prime\prime})}{r_{\prime\prime}^4}\,\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}\ldots\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Da, wie schon früher bemerkt wurde, nur die Verhältnisse der Dreiecksflächen gebraucht werden, so verschwindet der Parameter aus den obigen Ausdrücken, und es lassen sich in der That die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten ersetzen; die höheren Potenzen der letzteren erscheinen theilweise mit Coefficienten multiplicirt, die vor Eruirung der Elemente unbekannt sind, demnach entweder ganz fortgelassen werden müssen oder wenigstens der Hauptsache nach durch geeignete Hilfsmittel bei der Auflösung der in diesem Probleme stets auftretenden höheren Gleichung eingeführt werden können. Es gelingt bei völlig unbekannten Bahnen bei der ersten Auflösung (Hypothese) nur die Glieder zweiter oder höchstens die dritter Ordnung mitzunehmen; dieser Umstand bedingt es, dass man sich bei ersten Bahnbestim-

mungen auf mässige heliocentrische Bewegungen des Himmelskörpers beschränken muss, damit die vorerst weggelassenen Glieder höherer Ordnung nicht allzu nachtheilig einwirken; nicht die Kürze der Zwischenzeiten ist allein massgebend, da die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne $(r_{\prime\prime})$ ganz wesentlich in Betracht kommt; wie man sieht ist die Bezeichnung, dass die Reihen konvergiren, weil dieselben nach steigenden Potenzen der Zwischenzeiten angeordnet sind, die klein vorausgesetzt werden, uneigentlich; es kann bei Kometen, die der Sonne sehr nahe stehen, eine Zwischenzeit von wenig Tagen die Konvergenz der obigen Reihen, weil $r_{\prime\prime}$ sehr klein wird, in Frage stellen, während bei dem Planeten Neptun Zwischenzeiten von Jahren noch an der Konvergenz der obigen Reihen nichts mindern werden.

Bei der Lösung des vorgesetzten Problems (Bahnbestimmungen) sind verschiedene Verhältnisse zwischen den Dreiecksflächen nöthig, die man ohne Schwierigkeit aus den Formeln (6) ableiten kann durch entsprechende Division. Man wird berechnen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \left\{ 1 - \tfrac{1}{6} \frac{\tau_{\prime}^2 - \tau_{\prime\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4} \frac{\tau_{\prime}^3 + \tau_{\prime\prime\prime}^3}{r_{\prime\prime}^4} \frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} \ldots \right\} \\
\frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \left\{ 1 - \tfrac{1}{6} \frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4} \frac{\tau_{\prime}(\tau_{\prime}\tau_{\prime\prime} - \tau_{\prime\prime\prime}^2)}{r_{\prime\prime}^4} \frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} \ldots \right\}
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{6} \frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} - \tfrac{1}{4} \frac{\tau_{\prime}(\tau_{\prime}^2 + \tau' \tau_{\prime\prime\prime} - \tau_{\prime\prime\prime}^2)}{r_{\prime\prime}^4} \frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} \ldots \right\} \\
\frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{6} \frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} + \tfrac{1}{4} \frac{\tau_{\prime\prime\prime}(\tau_{\prime\prime\prime}^2 + \tau_{\prime}\tau_{\prime\prime\prime} - \tau_{\prime}^2)}{r_{\prime\prime}^4} \frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} \ldots \right\} \\
\frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime}} \left\{ 1 - \tfrac{1}{6} \frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} - \tfrac{1}{4} \frac{\tau_{\prime\prime\prime}.(\tau_{\prime\prime}\tau_{\prime\prime\prime} - \tau_{\prime}^2)}{r_{\prime\prime}^4} \frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} \ldots \right\} \\
\frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]}{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_{\prime}} \left\{ 1 - \tfrac{1}{6} \frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} - \tfrac{1}{4} \frac{\tau_{\prime}^3 + \tau_{\prime\prime\prime}^3}{r_{\prime\prime}^4} \frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} \ldots \right\}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Für die Gleichungen (7) werden noch andere Formen nöthig werden, es treten nämlich bei der Auflösung des Kometenproblems vorerst nur die Grössen $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime\prime}$ auf, man wird aber setzen können:

$$r_{\prime\prime} = \tfrac{1}{2}(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}) - \tfrac{1}{2} \frac{\tau_{\prime} - \tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime}} (r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime})$$

ohne dass in $r_{\prime\prime}$ daraus ein grösserer Fehler als zweiter Ordnung entsteht; substituirt man demnach diesen Werth für $r_{\prime\prime}^3$ und $r_{\prime\prime}^4$ in den Reihen ein, so wird alles richtig erhalten bis auf Grössen vierter Ordnung, die ohnehin vernachlässigt sind; für $\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}$, welches nur im Gliede dritter Ordnung erscheint, wird es genügen zu setzen:

$$\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} = \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{\tau_{\prime\prime}}$$

ohne ebenfalls grössere Fehler als vierter Ordnung zu begehen. Nach Ausführung der eben angezeigten Substitutionen und einiger leichten Reduktionen wird man finden anstatt der Gleichungen (7):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} + \tfrac{4}{3} \frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} + 4\,\tau_{\prime}^2 \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^4} \ldots \\
\frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} &= \frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} + \tfrac{4}{3} \frac{\tau_{\prime\prime\prime}^2 - \tau_{\prime\prime}^2}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} + 4\,\tau_{\prime}\tau_{\prime\prime\prime} \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^4} \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die Ansicht dieser Gleichungen gibt zu erkennen, dass bei Gleichheit der Zwischenzeiten

$$\tau_{,} = \tau_{,,,} = \tfrac{1}{2}\tau_{,,}$$

in der ersten Reihe das Glied zweiter Ordnung verschwindet; diesen Umstand kann man sich zu Nutze machen bei der Auswahl der Beobachtungen; man kann aber hier bemerken, dass die Glieder zweiter Ordnung in der ersten Reihe stets sehr klein werden müssen, wenn nur annäherungsweise der Bedingung $\tau_{,} = \tau_{,,,}$ genügt wird, und demnach wird dieses Glied meist numerisch höherer Ordnung. Weniger günstig gestalten sich die Verhältnisse für die zweite Reihe; bei keiner Wahl der Zwischenzeiten ist es möglich die Glieder zweiter Ordnung zum Verschwinden zu bringen und dieselben vernachlässigen, wäre gleich der Annahme, dass der Komet sich in einer Geraden fortbewegt. Man besitzt aber ein Hilfsmittel, welches die Olbers'sche Methode bedingt, um sich von diesem ungünstigen Umstande frei zu machen, und diesen Fall will ich nun vornehmen.

Die Fundamentalgleichung (pag. 99) enthält die Verhältnisse: $\frac{n}{n''}$ und $\frac{1}{n''}$ wovon das erstere identisch ist mit: $\frac{[r_{,,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]}$, das letztere mit: $\frac{[r_{,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]}$. Das Verhältniss $\frac{1}{n''}$ kommt nur einmal mit dem Coefficienten

$$\odot_{,,} = R_{,,} \sin (L_{,,} - \Pi)$$

multiplicirt vor, in welchem Ausdrucke $\Pi$ ein willkührlicher Winkel ist. Setzt man demnach

$$L_{,,} = \Pi$$

und bestimmt dem zu Folge $J$ nach

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg} \beta_{,,}}{\sin (\lambda_{,,} - L_{,,})}$$

wo $J$ die Neigung des die mittlere Beobachtung schneidenden grössten Kreises gegen die Ekliptik vorstellt, so wird durch diese Annahme sofort der Coefficient: $\odot_{,,}$ der Null gleich, und hiermit verschwindet das Verhältniss: $\frac{[r_{,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]}$ aus der Fundamentalgleichung und es bleibt nur übrig das Verhältniss der beiden kleinen Dreiecke, welches bei günstiger Vertheilung der Beobachtungen, wie oben gezeigt wurde, bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive genau bestimmt werden kann, ohne Kenntniss des Werthes $r_{,,}$. Sind aber die Zwischenzeiten nur ganz beiläufig einander gleich, so werden doch immer die Glieder zweiter Ordnung so klein bleiben, dass man dieselben ohne Gefahr für die Genauigkeit des Resultates übergehen kann. Fasst man Olbers' Methode demnach als speciellen Fall der allgemeinen auf, so ist in jener die Wahl des grössten Kreises so getroffen, dass derselbe durch den mittleren Sonnenort und Kometenort hindurchgelegt erscheint. Olbers kleidet das Resultat der ersten Reihe in (9) in die Worte, dass der mittlere Radiusvector die Chorde zwischen dem ersten und dritten Kometenorte im Verhältniss der Zwischenzeiten schneide. Dass diese Annahme identisch mit der sei, dass sich die Dreiecksflächen wie die Zwischenzeiten verhalten, sieht man sofort ein, wenn

man vom ersten und dritten Kometenorte die Perpendikel ($h_{,}$ und $h_{,,,}$) auf den mittleren Radiusvector $r_{,,}$ fällt, dann ist

$$[r_{,} r_{,,}] = r_{,,} h_{,}$$
$$[r_{,} r_{,,,}] = r_{,,} h_{,,,}$$

Seien die Abschnitte der Chorde $s_{,}$ und $s_{,,,}$ und schliesse die Chorde mit $r_{,,}$ den Winkel $i$ ein, so ist:

$$h_{,} = s_{,} \sin i$$
$$h_{,,,} = s_{,,,} \sin i$$

also

$$\frac{[r_{,,} r_{,,,}]}{[r_{,} r_{,,}]} = \frac{h_{,,,}}{h_{,}} = \frac{s_{,,,}}{s_{,}}$$

womit die Identität der Annahmen erwiesen ist. Diese Olbers'sche Annahme über die Lage des grössten Kreises gestattet aber noch eine wesentliche Vereinfachung der Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$, ohne in den meisten Fällen der Genauigkeit weiter Eintrag zu thun, und Olbers hat diese ebenfalls eingeführt mit den Worten, dass der mittlere Radiusvector der Erde die Sehne zwischen dem ersten und dritten Erdorte im Verhältnisse der Zwischenzeiten schneidet; ich will diese Bedingung ebenfalls in die Fundamentalgleichung einführen. Da sich die Erde ebenfalls nahe in einer Ebene bewegt (die Breiten der Sonne kann man, wie bekannt, durch geeignete Methoden streng eliminiren), die durch den Sonnenmittelpunkt geht, so besteht die Relation

$$\frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,}]} \odot_{,} - \frac{[R_{,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,}]} \odot_{,,} + \odot_{,,,} = 0$$

wobei die in den eckigen Klammern stehenden Werthe dieselbe symbolische Bedeutung haben, wie die analogen Bezeichnungen der Dreiecksflächen zwischen den Kometenorten, auf die Erdorte übertragen. Nun wird aber durch die Annahme: $L_{,,} = \Pi$

$$\odot_{,,} = 0$$

demnach besteht die Relation

$$\frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,}]} \odot_{,} + \odot_{,,,} = 0$$

Da sich nun die Erde, wenn man von den Störungen absieht, ebenfalls in einem Kegelschnitte bewegt, und demnach sich analoge Reihen nach dem Muster von (9) aufstellen lassen für dieselbe, so wird man annehmen dürfen:

$$\frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,}]} = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} \frac{\tau_{,,,}^2 - \tau_{,}^2}{(R_{,}+R_{,,,})^3} + \ldots \right\}$$

oder, wenn man wie früher annimmt, dass das Glied zweiter Ordnung vermöge seiner Zusammensetzung numerisch höherer Ordnung wird (Gleichheit der Zwischenzeiten), so wird es ebenfalls gestattet sein, zu setzen:

$$\frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,}]} = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}}$$

wodurch erhalten wird:

$$\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}} \odot_{,} + \odot_{,,,} = 0$$

Ich setze nun die Fundamentalgleichung (pag. 99) hier an, wie sich dieselbe gestaltet, wenn man $\odot_{\prime\prime} = 0$ und $\frac{n}{n''} = \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}}$ setzt, es wird so:

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = \frac{\sin J}{\delta_{\prime\prime\prime}} \left\{ \odot_{\prime} \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} + \odot_{\prime\prime\prime} \right\} + \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \frac{\delta_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}} \varrho_{\prime}$$

oder mit Rücksicht auf die eben entwickelten Ausdrücke

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \frac{\delta_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}} \varrho_{\prime} = M\varrho_{\prime} \qquad (10)$$

wodurch die Form erlangt ist, auf welche Olbers das Verhältniss der Distanzen zurückgeführt hat. Man kann bemerken, dass die zweite von Olbers eingeführte Vernachlässigung im Allgemeinen dadurch scheinbar vergrössert wird, dass der Werth für: $\delta_{\prime\prime\prime}$ mit dem dieses Glied dividirt erscheint, bei ersten Bahnbestimmungen fast nothwendig eine Grösse von der Ordnung der Zwischenzeiten ist ($\delta_{\prime\prime\prime}$ ist der Sinus des Perpendikels vom dritten Kometenort auf den gewählten grössten Kreis). Man darf aber hierbei nicht vergessen, dass in diesem Falle auch $\odot_{\prime}$ und $\odot_{\prime\prime\prime}$ erster Ordnung werden, da nun ist:

$$\odot_{\prime} = R_{\prime} \sin (L_{\prime} - L_{\prime\prime})$$
$$\odot_{\prime\prime\prime} = R_{\prime\prime\prime} \sin (L_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime})$$

wodurch der eben gemachte Einwurf gehoben wird. Andererseits erscheinen die Glieder zweiter Ordnung in diesen Ausdrücken selbst bei ungleichen Zwischenzeiten meist wesentlich dadurch verkleinert, dass in vielen Fällen $r$ nahe gleich $R$ ist.

Macht man von den bis jetzt eingeführten Vereinfachungen keinen Gebrauch, sondern begnügt sich die in (9) aufgestellten Werthe in die Fundamentalgleichung einzuführen und setzt der Kürze halber:

$$\frac{\sin J}{\delta_{\prime\prime\prime}} \left\{ \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \odot_{\prime} - \frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \odot_{\prime\prime} + \odot_{\prime\prime\prime} \right\} = G$$
$$\tfrac{1}{3} \frac{\sin J}{\delta_{\prime\prime\prime}} \left\{ (\tau_{\prime\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2) \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \odot_{\prime} + (\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime\prime\prime}^2) \frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \odot_{\prime\prime} \right\} = F$$
$$4 \frac{\sin J}{\delta_{\prime\prime\prime}} \{ \tau_{\prime}^2 \odot_{\prime} - \tau_{\prime} \tau_{\prime\prime\prime} \odot_{\prime\prime} \} = H$$
$$\tfrac{1}{3} (\tau_{\prime\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2) = f$$
$$4 \tau_{\prime} \tau_{\prime\prime\prime} = h$$

so verwandelt sich diese in:

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = G + \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \left[ F + H \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \right] + \frac{\delta_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}} \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \left[ 1 + \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \left( f + h \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \right) \right] \varrho_{\prime}$$

in welcher Gleichung gesetzt werden muss:

$$m = G + \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \left[ F + H \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \right]$$
$$M = \frac{\delta_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}} \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \left[ 1 + \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \left( f + h \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \right) \right]$$

um die Form

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = m + M\varrho_{\prime}$$

zu erhalten. Wie man sieht sind nun $m$ und $M$ selbst Funktionen von $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime\prime}$, demnach auch Funktionen von $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$, und es wird daher die Auflösung der Gleichung etwas mühsamer als nach Olbers' Methode, ohne dass jedoch die Arbeit

sehr beschwerlich und zeitraubend würde. Man hätte aber kaum Veranlassung Olbers' elegante Methode zu verlassen und die viel schwerfälligere zweite Form zu wählen, wenn nicht eben die specielle Wahl von $\Pi$, welche die erstere Methode bedingt, bisweilen eine Bahnbestimmung unmöglich macht, in Fällen, wo eine solche theoretisch durchführbar ist. Ich will diess jetzt näher beleuchten. Der eben erwähnte Fall kann aus zwei wesentlich verschiedenen Ursachen eintreten. Die erstere ist eine sehr beschränkte und dürfte selten vorkommen. Es ist nämlich möglich, dass nur drei Beobachtungen eines Kometen gelungen sind oder zur Rechnung verwendet werden können, und überdiess eine dieser Beobachtungen unvollständig ist, so dass in der That 5 Bestimmungsstücke, die ausreichend wären, vorhanden sind, während nach Olbers' Methode eine Bestimmung unmöglich wird. Die eben vorgetragene Methode wird das verlangte sofort leisten, wenn auch der erschwerende Umstand eintritt, dass die unvollständige Beobachtung nicht die mittlere ist (vergl. pag. 97). Der Natur der Sache nach muss bei der unvollständigen Beobachtung entweder die Rectascension oder Deklination fehlen; im letzteren Falle ist es aber nöthig, eine ganz nahe Angabe über die Rectascension zu haben, was praktisch keiner Schwierigkeit unterliegt. Fehlt die Deklination so wird die Wahl des grössten Kreises sofort bestimmt sein, indem man den aufsteigenden Knoten dieses Kreises in Bezug auf den Aequator $\Pi_\alpha = \alpha_{\prime\prime}$ setzt und die Neigung ($J_\alpha$) mit $90^\circ$ annimmt. Fehlt die genaue Angabe der Rectascension, so wird man setzen $J_\alpha = \delta$ und $\Pi_\alpha = \alpha_{\prime\prime} - 90^\circ$, wo im letzteren Falle nur ein ganz roher Näherungswerth von $\alpha_{\prime\prime}$ bekannt zu sein braucht. Diesen so bestimmten grössten Kreis wird man auf die Ekliptik übertragen (vergl. pag. 11) durch die folgenden Formeln, in denen $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik vorstellt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\Pi + \sigma)\sin\tfrac{1}{2}J = \sin\tfrac{1}{2}(J_\alpha + \varepsilon)\sin\tfrac{1}{2}\Pi_\alpha$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\Pi + \sigma)\sin\tfrac{1}{2}J = \sin\tfrac{1}{2}(J_\alpha - \varepsilon)\cos\tfrac{1}{2}\Pi_\alpha$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\Pi - \sigma)\cos\tfrac{1}{2}J = \cos\tfrac{1}{2}(J_\alpha + \varepsilon)\sin\tfrac{1}{2}\Pi_\alpha$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\Pi - \sigma)\cos\tfrac{1}{2}J = \cos\tfrac{1}{2}(J_\alpha - \varepsilon)\cos\tfrac{1}{2}\Pi_\alpha$$

und hiermit sind die Grössen $\Pi$ und $J$ bekannt.

Eine andere Ursache, die Olbers' Methode unbrauchbar macht, und in der That nicht so selten vorkommt, ist in folgendem Umstande zu suchen. Die Ausdrücke $\mathfrak{F}_{\prime}$ und $\mathfrak{F}_{\prime\prime\prime}$ sind ebenfalls Funktionen von $J$ und $\Pi$ und setzt man vorläufig über $J$ und $\Pi$ gar nichts fest, ausser der bekannten Relation, die nothwendig erfüllt sein muss:

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime} - \Pi)}$$

so wird man stets $J$ und $\Pi$ so wählen können, dass entweder $\mathfrak{F}_{\prime}$ oder $\mathfrak{F}_{\prime\prime\prime}$ der Null gleich wird. Es wird für diese Bedingung (vergl. pag. 98) sein entweder

$$\sin\beta_{\prime}\cos J = \sin(\lambda_{\prime} - \Pi)\cos\beta_{\prime}\sin J$$

oder

$$\sin\beta_{\prime\prime\prime}\cos J = \sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - \Pi)\cos\beta_{\prime\prime\prime}\sin J$$

Es ist immerhin möglich, dass beide Relationen gleichzeitig Geltung haben und man findet dann in diesem besonderen Falle:

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime}}{\sin(\lambda_{\prime} - \Pi)} = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - \Pi)}$$

Hat man über $\Pi$ keine besonderen Bestimmungen getroffen, so wird man im Allgemeinen stets $\Pi$ so wählen können, dass die eben aufgestellten Relationen nicht stattfinden, ist aber, wie in Olbers' Methode $\Pi$ durch die Annahme

$$\Pi = L_{\prime\prime}$$

völlig bestimmt, so ist in der That der Fall möglich, dass mindestens näherungsweise die Relationen bestehen:

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime}}{\sin(\lambda_{\prime} - L_{\prime\prime})} = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime} - L_{\prime\prime})} = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime})}$$

wodurch der Coefficient von $\varrho_{\prime}$ $(M)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhält; eine Bahnbestimmung ist dann nach Olbers' Methode unthunlich. Die eben aufgestellten Gleichungen zeigen auch die hier eintretenden Verhältnisse; liegt nämlich der erste und dritte Kometenort in den durch den mittleren Sonnen- und Kometenort gelegten grössten Kreis, so tritt dieser Fall ein. Praktisch tritt diese Unmöglichkeit der Anwendung der Olbers'schen Methode ein, wenn diesen Bedingungen nur ganz beiläufig genügt wird, indem dann kleine Beobachtungsfehler einen überaus grossen Einfluss auf die Bestimmung des Verhältnisses: $\frac{\delta_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}}$ nehmen. Diese Betrachtungen geben einen Fingerzeig, wie man bei der Wahl des grössten Kreises vorzugehen hat, um von den Beobachtungsfehlern den möglichst geringen Nachtheil zu erfahren, welche Diskussion ich auf den folgenden Paragraph verschiebe. Ich bemerke nur noch hier, dass ich vorläufig von der Bequemlichkeit der anzuwendenden Ausdrücke absehe, sondern nur der eben aufgestellten Forderung genüge; denn es ist sofort klar, dass unter Annahme der Olbers'schen Näherungen die numerische Ausführung wesentlich erleichtert wird.

## §. 7. Wahl des grössten Kreises.

Bei der Auswahl des grössten Kreises, der für die genaue Bestimmung der Elemente der geeignetste ist, wird es genügen, ganz beiläufig die Lage dieses Kreises zu ermitteln, indem die Bestimmung der Elemente nicht wesentlich ungenauer ausfällt, wenn nur der verlangten Bedingung genähert genügt wird; es ist jedoch klar, dass die früher erwähnte Bedingung

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime} - \Pi)}$$

unter allen Umständen völlig scharf erfüllt werden muss, da diese Relation die Bestimmung in das Problem einführt, dass der gewählte grösste Kreis durch die mittlere Beobachtung hindurchgelegt erscheint. Ich werde diese Bedingung durch eine geeignete Transformation in das Problem einführen, indem ich eine neue völlig willkührliche Grösse aufstelle, nämlich den Winkel $(i)$, den der zu wählende grösste Kreis am mittleren Kometenorte mit dem Breitenkreise bildet. Für denselben lassen sich sofort die folgenden Relationen aufstellen:

$$\begin{aligned} \sin J \cos(\lambda_{\prime\prime} - \Pi) &= \cos i \\ \sin J \sin(\lambda_{\prime\prime} - \Pi) &= \sin i \sin\beta_{\prime\prime} \\ \cos J &= \sin i \cos\beta_{\prime\prime} \end{aligned}$$

man kann nun in der Fundamentalgleichung schreiben:

$$\sin J \odot_{,} = R_{,} \sin J \sin\{(L_{,} - \lambda_{,,}) + (\lambda_{,,} - \Pi)\} = R_{,} \sin(L_{,} - \lambda_{,,}) \cos i + R_{,} \cos(L_{,} - \lambda_{,,}) \sin\beta_{,,} \sin i$$

$$\sin J \odot_{,,} = R_{,,} \sin J \sin\{(L_{,,} - \lambda_{,,}) + (\lambda_{,,} - \Pi)\} = R_{,,} \sin(L_{,,} - \lambda_{,,}) \cos i + R_{,,} \cos(L_{,,} - \lambda_{,,}) \sin\beta_{,,} \sin i$$

$$\sin J \odot_{,,,} = R_{,,,} \sin J \sin\{(L_{,,,} - \lambda_{,,}) + (\lambda_{,,} - \Pi)\} = R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \lambda_{,,,}) \cos i + R_{,,,} \cos(L_{,,,} - \lambda_{,,}) \sin\beta_{,,} \sin i$$

$$\mathcal{S}_{,} = \sin\beta_{,} \cos J - \sin\{(\lambda_{,} - \lambda_{,,}) + (\lambda_{,,} - \Pi)\} \cos\beta_{,} \sin J =$$
$$= \{\sin\beta_{,} \cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,} \sin\beta_{,,}\} \sin i - \sin(\lambda_{,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,} \cos i$$

$$\mathcal{S}_{,,,} = -\sin\beta_{,,,} \cos J + \sin\{(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) + (\lambda_{,,} - \Pi)\} \cos\beta_{,,,} \sin J =$$
$$= \{\cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} \sin\beta_{,,} - \sin\beta_{,,,} \cos\beta_{,,}\} \sin i + \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} \cos i$$

Ich setzte der Kürze halber

$$nR_{,} \sin(L_{,} - \lambda_{,,}) - R_{,,} \sin(L_{,,} - \lambda_{,,}) + n'' R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \lambda_{,,}) = f \sin F$$
$$\sin\beta_{,,} \{nR_{,} \cos(L_{,} - \lambda_{,,}) - R_{,,} \cos(L_{,,} - \lambda_{,,}) + n'' R_{,,,} \cos(L_{,,,} - \lambda_{,,})\} = f \cos F$$
$$\sin\beta_{,} \cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \sin\beta_{,,} = \sin \varDelta_{,,,} \cos w_{,}$$
$$\sin(\lambda_{,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \qquad = \sin \varDelta_{,,,} \sin w_{,}$$
$$\sin\beta_{,,,} \cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} \sin\beta_{,,} = \sin \varDelta_{,} \cos w_{,,,}$$
$$\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} \qquad = \sin \varDelta_{,} \sin w_{,,,}$$

Es ist hierbei offenbar $\varDelta_{,,,}$ die scheinbare Distanz des ersten und zweiten Ortes und $\varDelta_{,}$ die des zweiten und dritten Ortes, $w_{,}$ ist der Winkel den $\varDelta_{,,,}$ mit dem mittleren Breitenkreise, $w_{,,,}$ der Winkel den $\varDelta_{,}$ mit demselben Breitenkreise einschliesst. Es wird nun die Fundamentalgleichung geschrieben werden können:

$$\varrho_{,,,} n'' \sin \varDelta_{,} \sin(w_{,,,} - i) = f \sin(F + i) + \varrho_{,} n \sin \varDelta_{,,,} \sin(w_{,} + i)$$

in welcher Gleichung nun $i$ ein völlig willkührlicher Winkel ist, während die übrigen Grössen mit Ausnahme von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ als bekannt betrachtet werden dürfen, wenn die Verhältnisse der Dreiecksflächen bekannt sind. Die gegenseitige Bestimmung von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ aus dieser Gleichung wird um so sicherer sein, je grösser die zugehörigen Coefficienten werden, denn die Struktur der Glieder zeigt, dass der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ nicht eintreten kann. Es wird demnach zu setzen sein:

$$\{n \sin \varDelta_{,,,} \sin(w_{,} + i)\}^2 + \{n'' \sin \varDelta_{,} \sin(w_{,,,} - i)\}^2 = \text{Maximum}.$$

Die Differentiation ergibt zunächst für die Auffindung dieser Bedingung:

$$n^2 \sin \varDelta_{,,,}^2 \sin 2(w_{,} + i) - n''^2 \sin \varDelta_{,}^2 \sin 2(w_{,,,} - i) = 0$$

woraus $i$ zu bestimmen ist. Zunächst wird man aber bemerken, dass die Grössen $n$ und $n''$ vor Auflösung des Problems nicht genau bekannt sind; die obigen Reihenentwicklungen (pag. 110) geben:

$$\frac{n}{n''} = \frac{[r_{,,} r_{,,,}]}{[r_{,} r_{,,}]} = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}} \left\{1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_{,}^2 - \tau_{,,,}^2}{r_{,,}^3} + \ldots\right\}$$

bei Gleichheit der Zwischenzeiten werden die Glieder zweiter Ordnung der Null gleich: im vorliegenden Falle, wo es sich bloss um eine Näherung handelt, wird man dieselben selbst bei ungleichen Zeitintervallen übergehen dürfen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\tau_{,} \sin \varDelta_{,,,}}{\tau_{,,,} \sin \varDelta_{,}} = g$$

so wird

$$g^2 \sin 2(w_{,} + i) - \sin 2(w_{,,,} - i) = 0$$

woraus man sofort findet zur Bestimmung von $i$

$$\operatorname{tg} 2i = \frac{\sin 2w_{,,,} - g^2 \sin 2w_{,}}{g^2 \cos 2w_{,} + \cos 2w_{,,,}}$$

Die Zweideutigkeit, die in der Bestimmung durch die Tangente liegt, ist dadurch zu erklären, dass die durchgeführte Bestimmungsart ebenfalls für die Bedingung des Minimum gilt; der eine Werth gehört also zum Maximum, der andere zum Minimum. Die Entscheidung, welchen Werth man zu nehmen hat, wird nicht schwer und meist auf den ersten Blick zu erhalten sein; sollte je ein Zweifel entstehen, so wird die Rückkehr zur Gleichung

$$g^2 \sin (w_{,} + i)^2 + \sin (w_{,,,} - i)^2 = \text{Maximum}$$

und die Substitution der gefundenen Werthe für $i$ sofort den zu wählenden Winkel finden lassen. Es wäre gewiss dieses eben angegebene Verfahren zur Bestimmung von $i$ im Allgemeinen wenig empfehlenswerth, da aus der Anwendung derselben eine nicht unbeträchtliche Mehrarbeit in der Rechnung entsteht; ist aber die Bewegung des Kometen nicht allzu unregelmässig und abweichend von einem grössten Kreise, so wird sich leicht eine hinreichend genaue Näherung für $i$ beschaffen lassen. Nennt man den Winkel, den der auf der scheinbaren Bewegungsrichtung des Kometen senkrechte grösste Kreis mit dem Breitenkreise einschliesst: $\gamma$, so wird näherungsweise sein:

$$w_{,} = 90^0 - \gamma$$
$$w_{,,,} = 90^0 + \gamma$$

und bei nicht zu unregelmässiger geocentrischer Bewegung

$$g = 1$$

Es wird dann

$$\operatorname{tg} 2i = \operatorname{tg} 2\gamma$$

und für

$$i = \gamma \qquad \text{das Maximum}$$
$$i = \gamma - 90^0 \text{ das Minimum}$$

Die Bestimmung des grössten Kreises ist so getroffen, dass derselbe senkrecht auf der scheinbaren Bewegung des Kometen steht, eine Wahl, die a priori viel für sich hat. Ist ein bestimmter Werth für $i$ angenommen, so bestimmt sich daraus $J$ und $\Pi$ nach

$$\left.\begin{aligned} \sin (\lambda_{,,} - \Pi) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \beta_{,,} \\ \cos (\lambda_{,,} - \Pi) \operatorname{tg} J &= \operatorname{cotg} i \sec \beta_{,,} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei $J$ stets kleiner als $90^0$ angenommen werden kann. Für $\operatorname{cotg} i$ wird man, wenn es gestattet ist, die eben angedeuteten Näherungen einzuführen, setzen dürfen mit meist ausreichender Genauigkeit

$$\operatorname{cotg} i = -\frac{\lambda_{,,,} - \lambda_{,}}{\beta_{,,,} - \beta_{,}} \cos \beta_{,,}$$

und man hat demnach zur unmittelbaren Bestimmung von $J$ und $\Pi$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin (\lambda_{,,} - \Pi) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \beta_{,,} \\ \cos (\lambda_{,,} - \Pi) \operatorname{tg} J &= -\frac{\lambda_{,,,} - \lambda_{,}}{\beta_{,,,} - \beta_{,}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

welche Form ich für erste Bahnbestimmungen stets vorschlagen möchte, wenn nicht

ausserordentliche Verhältnisse die Rückkehr auf die strengen Formeln gerathen erscheinen lassen. Da es meist nur auf eine beiläufige Bestimmung von $i$ ankommt, so könnte man auch mit Zuziehung eines Globus leicht diesen Werth auf konstruktivem Weg sich verschaffen. Will man strenger vorgehen, was in den seltensten Fällen nöthig sein wird, so wird man zu berechnen haben:

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_{,}\cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,}-\lambda_{,})\cos\beta_{,}\sin\beta_{,,} &= \sin\Delta_{,,,}\cos w, \\ \sin(\lambda_{,,}-\lambda_{,})\cos\beta_{,} &= \sin\Delta_{,,,}\sin w, \\ \sin\beta_{,,,}\cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,,,}\sin\beta_{,,} &= \sin\Delta_{,}\cos w_{,,,} \\ \sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,,,} &= \sin\Delta_{,}\sin w_{,,,} \\ g = \frac{T_{,,,}-T_{,,}}{T_{,,}-T_{,}}\cdot\frac{\sin\Delta_{,,,}}{\sin\Delta_{,}} & \\ \operatorname{tg} 2i = \frac{\sin 2w_{,,,} - g^2\sin 2w_{,}}{\cos 2w_{,,,} + g^2\cos 2w_{,}} & \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Der Quadrant, in dem $2i$ zu nehmen ist, bestimmt sich daraus, dass der Ausdruck

$$g^2 \sin(w+i)^2 + \sin(w_{,,,}-i)^2$$

ein Maximum wird. Ist $i$ festgesetzt, so ermittelt man aus (1) die Werthe für $J$ und $\Pi$. Von der hier getroffenen Bestimmung werde ich bei derBahnbestimmung aus vier Orten wieder Gebrauch machen.

## §. 8. Ueber die durch vorstehende Methoden erlangte Genauigkeit.

Clausen hat zuerst nachgewiesen (Bulletin de la classe phys. math. de l'academie de St. Petersbourg X Bd. 1te Serie pag. 175), dass die Genauigkeit, mit der die Relation zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ durch die Ersetzung der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten erhalten wird, nicht selbst das Mass ist für die Genauigkeit der Werthe $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$. Ich nehme an, dass mit den genäherten Werthen von $m$ und $M$, $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ so bestimmt seien, dass der Zwischenzeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung völlig genügt wird. Sind nun die Korrektionen von diesen Grössen $m$ und $M$, um die strengen Werthe zu erlangen, $dm$ und $dM$, und sind die Aenderungen, die die Zwischenzeit durch Aenderungen von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ erfährt, bestimmt durch

$$\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right) d\varrho_{,} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right) d\varrho_{,,,}$$

so wird, da nach Einsetzung der strengen Werthe für $m$ und $M$, $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ so abgeändert werden müssen, dass wieder der Zwischenzeit genügt wird, sein müssen

$$\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right) d\varrho_{,} + \left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right) d\varrho_{,,,} = 0$$

Man erhält aber nach pag. 99:

$$d\varrho_{,,,} = dm + \varrho_{,} dM + M d\varrho_{,}$$

Substituirt man diesen Werth in obiger Gleichung und löst nach $d\varrho_{,}$ auf, so findet sich

$$d\varrho_{,} = -\frac{\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right)(dm + \varrho_{,} dM)}{\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right) + M\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right)} \qquad (1)$$

Nun lässt sich unschwer der Nachweis liefern, dass der Nenner um eine Ord-

nung höher ist, als der Koefficient $\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right)$, demnach erscheinen die Fehler von $m$ und $M$ ($dm$ und $dM$) in den Elementen um eine Ordnung vergrössert; für $dm$ wird diess um so mehr der Fall sein, da die Grösse $\mathfrak{J}_{,,,}$ bei ersten Bahnbestimmungen in der Regel klein ist. Ich gehe nun daran, den Nachweis für die eben aufgestellte Behauptung durchzuführen. Vor Allem ist es wichtig, die Ordnung von $\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right)$ und $\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right)$ festzustellen. Die Gleichung (5) §. 4 (pag. 103)

$$s = \frac{2kt}{\sqrt{r_{,} + r_{,,,}}}\,\mu$$

lehrt, dass $s$ gleicher Ordnung mit $kt$ ist, mithin von der ersten Ordnung; da aber $s$ von der Form

$$s^2 = a + b\varrho + c\varrho^2$$

ist, so folgt unmittelbar, dass $\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right)$ und $\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right)$ nullter Ordnung sind. Die eben angeführten Ausdrücke könnte man nach Potenzen der Zeiten entwickeln und würde so erhalten:

$$\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right) = a_{,} + b_{,}\tau + c_{,}\tau^2 + \ldots.$$
$$\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right) = a_{,,,} + b_{,,,}\tau + c_{,,,}\tau^2 + \ldots.$$

Ebenso könnte man entwickeln

$$M = 1 + \beta_{,,}\tau + \gamma_{,,}\tau^2 + \ldots$$

Das Anfangsglied der Reihe für $M$ muss nothwendig der Einheit gleich sein, da für unendlich kleine Zwischenzeiten $\varrho_{,} = \varrho_{,,,}$ wird. Für denselben Fall (unendlich kleine Zwischenzeit) muss aber offenbar sein

$$a_{,} = - a_{,,,}$$

und es wird die Form erhalten

$$\left(\frac{dT}{d\varrho_{,}}\right) + M\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right) = \gamma\tau + \delta\tau^2 + \ldots,$$

so dass der Nenner des Ausdruckes (1) in der That erster Ordnung ist, während $\left(\frac{dT}{d\varrho_{,,,}}\right)$ von der nullten Ordnung ist. Es sind demnach die Elemente des Kometen mit um eine Ordnung grösseren Fehlern behaftet, als die Werthe $m$ und $M$.

Diese Betrachtungen geben nun eine Uebersicht der Genauigkeit der eben vorgetragenen Methoden. Olbers' Methode bestimmt die Grösse $M$ bis auf Grössen zweiter Ordnung genau; bei Gleichheit der Zwischenzeiten, die man stets anstreben soll, wenn es das Beobachtungsmaterial gestattet, werden nur Grössen dritter Ordnung weggelassen; man kann demnach im Allgemeinen behaupten, dass bei Olbers' Methode $M$ bis auf Grössen dritter Ordnung richtig bestimmt ist, da man meistens die Auswahl der Beobachtungen wird so treffen können, dass die vorhandenen Glieder zweiter Ordnung numerisch Gliedern höherer Ordnungen gleich geachtet werden können. $m$, welches von Olbers der Null gleich gesetzt wird, kann, so weit dasselbe von dem Verhältnisse der Dreiecksflächen abhängig ist, ohne grössere Fehler, als dieselben bislang in $M$ zugelassen wurden, in der That als Null angenommen werden. Die Division mit $\mathfrak{J}_{,,,}$ kann aber unter Umständen sehr nachtheilig einwirken, wenn zufällig $\mathfrak{J}_{,,,}$ sehr klein wird (langsame geocentrische Bewegung), oder wenn der Ausnahmsfall nahe eintre-

tend ist; die Ordnung dieses Fehlers wird aber im Allgemeinen dadurch nicht geändert, da von Olbers $\Pi = L_{\prime\prime}$ gesetzt wurde (vrgl. pag. 113); demnach wird der Koefficient $\frac{\odot_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}}$ nullter Ordnung, da in diesem Falle $\odot_{\prime}$ (ebenso $\odot_{\prime\prime\prime}$) ebenfalls erster Ordnung ist; vermöge der oft raschen geocentrischen Bewegung der Kometen wird aber sogar der Koefficient: $\frac{\odot}{\delta_{\prime\prime\prime}}$ klein sein. Es vereinigen sich aber noch andere begünstigende Umstände, die die Voraussetzung

$$m = 0$$

der Wahrheit näher bringen. Da die meisten Kometen im Augenblicke der Entdeckung aus leicht begreiflichen praktischen Gründen nahe in der Entfernung 1 von der Sonne stehen, so werden die bei ungleichen Zwischenzeiten vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung in $m$ numerisch wesentlich verkleinert; denn bedenkt man, dass völlig streng gesetzt werden kann, wenn man die Sonnenbreiten eliminirt (pag. 112)

$$\frac{[R_{\prime\prime}\, R_{\prime\prime\prime}]}{[R_{\prime}\, R_{\prime\prime}]}\, \odot_{\prime} + \odot_{\prime\prime\prime} = 0$$

und subtrahirt diesen Ausdruck von $m$ und entwickelt nach Potenzen der Zwischenzeiten, so findet sich

$$m = \tfrac{1}{3}\, \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}}\, (\tau^2_{\prime\prime\prime} - \tau_{\prime}^2) \left\{ \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} - \frac{1}{(R_{\prime} + R_{\prime\prime\prime})^3} \right\} + \ldots$$

so dass auch in $m$ die Glieder zweiter Ordnung verschwinden, wenn $r = R$ wird. Diess ist auch der Grund, wesshalb es bisweilen vortheilhaft sein kann, in $M$ statt des Verhältnisses der Zeiten das Verhältniss der Dreiecksflächen zwischen den Erdorten einzuführen; doch ist dieser Vortheil nicht erheblich und keineswegs mit Sicherheit anzuwenden. Man sieht leicht aus dem vorstehenden Ausdrucke, dass, sobald $r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime} < \sqrt[3]{2}\,(R_{\prime} + R_{\prime\prime\prime})$ ist, man durch Einführung dieser Transformation an Näherung gewinnt, dagegen verliert, sobald $r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime} > \sqrt[3]{2}\,(R_{\prime} + R_{\prime\prime\prime})$ ist. Da aber bei Kometen oft zur Entdeckungszeit $r > \sqrt[3]{2}$ ist, so ist es nicht rathsam und zweckmässig, eine Abänderung wegen diesem Umstand einzuführen.

Hat man aber die Wahl des grössten Kreises nicht nach dem Olbers'schen Prinzip gewählt, so werden im Allgemeinen die Koefficienten von der Form $\frac{\odot}{\delta_{\prime\prime\prime}}$ von von der Ordnung : — 1; demnach gehen die Fehler in diesem Falle in den Verhältnissen der Dreiecksflächen um zwei Ordnungen vergrössert auf die Elemente über, würde man demnach für die Verhältnisse der Dreiecksflächen in diesem Falle die Zwischenzeiten allein substituiren, wie es Encke bei dem Ausnahmefall (Berliner Jahrbuch 1833) und Klinkerfues bei der Behandlung des Kometenproblems thun. so wird man im Allgemeinen ein Konvergenz nicht erreichen und es ist nur der Zufällig keit, dass Kometen meist in der Erdnähe ($\delta_{\prime\prime\prime}$ also ziemlich bedeutend und $r$ nahe gleich $R$) entdeckt werden, zu verdanken, dass diese Methoden zum Ziele führen. Die eben hervorgehobenen Umstände einerseits und der Eintritt des Ausnahmefalles andererseits hat mich veranlasst eine allgemeine Methode zu versuchen, und ich habe im Obigen die Resultate, die sich mir darboten, vorgetragen, ohne dass ich der Meinung bin, irgendwie Olbers' Methode verbessert zu haben, sondern nur die Anwen-

dung meiner Formeln auf die bezeichneten Fälle beschränkt wissen möchte. In meiner Methode sind die Verhältnisse der Dreiecksflächen bis auf Grössen vierter Ordnung richtig bestimmt, $M$ ist demnach ebenso genau ermittelt, während $m$ wol um eine Ordnung ungenauer sein kann, wenn die scheinbare Bewegung des Kometen klein ist; jedenfalls werden die erlangten Werthe sehr brauchbare Näherungen abgeben, da selbst wenn $\mathcal{J}_{,,,}$ eine Grösse erster Ordnung ist, die Elemente des Kometen bis auf Grössen zweiter Ordnung genau erhalten werden; in der Regel wird jedoch die Annäherung numerisch viel grösser sein, da die scheinbare geocentrische Bewegung der Kometen meist viel beträchtlicher ist, als die heliocentrische.

## §. 9. Uebersicht der Formeln zur Berechnung von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ nebst Beispiel.

In den vorausgehenden Paragraphen sind die theoretischen Grundlagen enthalten, um aus drei Beobachtungen des Kometen $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ zu ermitteln. Sind einmal diese beiden Grössen gefunden, so stellt sich die Berechnung der Elemente aus denselben auf sehr einfache Weise; diess werde ich jedoch später zeigen. Wie es die Darstellung des Problems mit sich bringt, sind die Formeln keineswegs so zusammengestellt, dass der Gang der Rechnung, wie derselbe zweckmässig anzuordnen ist, deutlich hervortreten würde. Ich werde desshalb in diesem Paragraph die Formeln so zusammenstellen, wie dieselben in der Ausführung sich zweckmässig an einander reihen, und die Bemerkungen hinzufügen, die sich bei der Anwendung als nutzbringend erweisen können. Im Anhange gebe ich eine gedrängte Uebersicht der Formeln zur Berechnung einer Kometenbahn nach Olbers' Methode. Die Formeln in die Uebersicht aufzunehmen, die sich für meine Methode ergeben, halte ich nicht für nöthig, da dieselben zu selten Anwendung finden und im Falle des Gebrauches leicht der weiter unten folgenden hier aufgenommenen Zusammenstellung entlehnt werden können.

Vorerst setze ich voraus, dass nach den Vorschriften des ersten Theiles (pag. 36, 88, 89), die Beobachtungen für die Rechnung vorbereitet sind, je nachdem man völlig scharf rechnen will oder sich mit einer gewissen Annäherung begnügt. Im Allgemeinen dürfte es bei den ersten Entwürfen parabolischer Elemente ausreichend sein, die Aberration, Parallaxe und die Sonnenbreite wegzulassen und alles auf das wahre Aequinoctium der Mitte der Zeit zu beziehen. Die sorgfältige Rechnung mit fünfstelligen Tafeln ist völlig ausreichend, doch dürfte Anfängern die Anwendung sechstelliger Tafeln zu empfehlen sein. Die Daten der Beobachtung sind:

| | Beobachtgszeit. | Beob.-Länge. | Beob.-Breite. | Sonnenlänge. | Entfg. der ☉ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Beobchtg. | $T_,$ | $\lambda_,$ | $\beta_,$ | $L_,$ | $R_,$ |
| 2. „ | $T_{,,}$ | $\lambda_{,,}$ | $\beta_{,,}$ | $L_{,,}$ | $R_{,,}$ |
| 3. „ | $T_{,,,}$ | $\lambda_{,,,}$ | $\beta_{,,,}$ | $L_{,,,}$ | $R_{,,,}$ |

Zu suchen ist $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$, die Abstände des Kometen von der Erde zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung.

Vor Beginn der weiteren Rechnungen wird zu entscheiden sein, welche der zwei eben vorgetragenen Methoden man wählen wird; Olbers' Methode wird etwa dann zu verlassen sein, wenn der nach den obigen Vorschriften günstigst bestimmte grösste Kreis mit dem durch den zweiten Kometen- und Sonnenort gelegten Kreis einen grösseren Winkel als 60° einschliesst, ohne Rücksicht auf die Zählweise, oder allgemeiner wenn ist:

$$\sin (i - i_0) > \pm \tfrac{1}{2}$$

wo $i$ der Winkel zwischen dem günstigst gewählten Kreise und dem Breitenkreise der mittleren Beobachtung ist, während $i_0$ derselbe Winkel ist, den der von Olbers gewählte Kreis bildet. Ein kleiner Vorversuch wird in dieser Beziehung leiten können. Da $i$ und $i_0$ stets kleiner als 180° angenommen werden können, so ist die Bestimmung dieses Winkels durch die Tangente unzweideutig. Es ist aber

$$\operatorname{tg} i = -\frac{\beta_{\prime\prime\prime} - \beta_\prime}{\lambda_{\prime\prime\prime} - \lambda_\prime} \sec \beta_{\prime\prime}$$

$$\operatorname{tg} i_0 = \operatorname{tg} (\lambda_{\prime\prime} - L_{\prime\prime}) \operatorname{cosec} \beta_{\prime\prime}$$

woraus dann die obige Bedingung leicht ermittelt wird.

Vorerst werde ich die Formeln für die bei Weitem wichtigere Olbers'sche Methode vornehmen.

Vorerst wird die Lage des grössten Kreises und $M$ zu ermitteln sein. Hiefür ist:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} J &= \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime} - L_{\prime\prime})} \\
M &= \frac{T_{\prime\prime\prime} - T_{\prime\prime}}{T_{\prime\prime} - T_\prime} \cdot \frac{\sin\beta_\prime - \sin(\lambda_\prime - L_{\prime\prime})\cos\beta_\prime \operatorname{tg} J}{\sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime})\cos\beta_{\prime\prime\prime}\operatorname{tg} J - \sin\beta_{\prime\prime\prime}} \\
&\text{oder} \\
M &= \frac{T_{\prime\prime\prime} - T_{\prime\prime}}{T_{\prime\prime} - T_\prime} \cdot \frac{\sin\beta_\prime \operatorname{cotg} J - \sin(\lambda_\prime - L_{\prime\prime})\cos\beta_\prime}{\sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime})\cos\beta_{\prime\prime\prime} - \sin\beta_{\prime\prime\prime}\operatorname{cotg} J}
\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Die erstere Form für $M$ wird man anwenden, wenn $\operatorname{tg} J < \pm 1$ ist, die zweite, wenn $\operatorname{tg} J > \pm 1$ wird.

Jetzt beginnen die Rechnungen um $s$, $r_\prime$ und $r_{\prime\prime\prime}$ als Funktionen von $\varrho_\prime$ darzustellen.

$$\left.\begin{aligned}
R_{\prime\prime\prime}\cos(L_{\prime\prime\prime} - L_\prime) - R_\prime &= g\cos(G - L_\prime) \\
R_{\prime\prime\prime}\sin(L_{\prime\prime\prime} - L_\prime) &= g\sin(G - L_\prime) \\
&g \text{ stets positiv} \\
\cos(\lambda_\prime - L_\prime)\cos\beta_\prime &= \cos\psi_\prime \\
\cos(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime})\cos\beta_{\prime\prime\prime} &= \cos\psi_{\prime\prime\prime} \\
R_\prime \cos\psi_\prime &= f_\prime \\
R_\prime \sin\psi_\prime &= B_\prime \\
\frac{R_{\prime\prime\prime}\cos\psi_{\prime\prime\prime}}{M} &= f_{\prime\prime\prime} \\
\frac{R_{\prime\prime\prime}\sin\psi_{\prime\prime\prime}}{M} &= B_{\prime\prime\prime}
\end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Die bisher erlangten Hilfsgrössen sind entweder völlig frei von der Annahme über $M$ oder werden, wie die zwei letzten Grössen, bei einer Aenderung von $M$ sehr einfach korrigirt. Die gegebenen Formeln können aber unter Umständen in der An-

wendung misslich werden. Falls nämlich die Bestimmung von sin $\psi_{,}$ und sin $\psi_{,,,}$ aus cos $\psi_{,}$ und cos $\psi_{,,,}$ zu unsicher wird, muss man etwas andere Rechnungsvorschriften zur Bestimmung von sin $\psi_{,}$ und sin $\psi_{,,,}$ befolgen. Geht man auf die geometrische Bedeutung der Winkel $\psi_{,}$ und $\psi_{,,,}$ zurück, so wird man sofort einsehen, dass $\psi$ der Winkel am Erdorte ist in dem Dreieck zwischen Komet, Erde und Sonne, also der scheinbare geocentrische Abstand des Sonnencentrums vom Kometen. Man wird daraus leicht ableiten, dass $\psi$ stets kleiner als $180^\circ$ angenommen werden kann und dass eine Unsicherheit nur entstehen kann in der Bestimmung von sin $\psi$ nach cos $\psi$, wenn der Komet nahe in Opposition oder Konjunktion mit der Sonne ist. Betrachtet man das sphärische Dreieck zwischen dem Kometen, dem Sonnenorte und dem Einschnitte des Breitenkreises des Kometen in die Ekliptik, so leitet man leicht, wenn man den Winkel an der Sonne in diesem sphärischen rechtwinkligen Dreieck mit $P$ bezeichnet, ab für den ersten und dritten Ort:

$$\left.\begin{array}{ll}\cos\psi_{,} = \cos\beta_{,}\cos(\lambda_{,}-L_{,}) & \cos\psi_{,,,} = \cos\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-L_{,,,}) \\ \sin\psi_{,}\cos P_{,} = \cos\beta_{,}\sin(\lambda_{,}-L_{,}) & \sin\psi_{,,,}\cos P_{,,,} = \cos\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,,,}-L_{,,,}) \\ \sin\psi_{,}\sin P_{,} = \sin\beta_{,} & \sin\psi_{,,,}\sin P_{,,,} = \sin\beta_{,,,}\end{array}\right\} \quad (II_b)$$

Die beiden letzten Gleichungen in jeder Gruppe werden unter allen Umständen eine sichere Bestimmung von sin $\psi_{,}$ und sin $\psi_{,,,}$ gestatten; dieser Sinus ist stets positiv anzunehmen. Wie man sieht, macht die Berechnung von sin $\psi$ und cos $\psi$ nach den Formeln $II_b$ wenig Mühe und wird wol zu empfehlen sein, wenn man Alles genau haben will.

Jetzt schliesse ich die Berechnung derjenigen Hilfsgrössen an, die zur Berechnung der Sehne dienen. Man wird haben

$$\left.\begin{array}{r}M\cos\beta_{,,,} - \cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\cos\beta_{,} = h\cos\zeta\cos(H-\lambda_{,,,}) \\ \sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\cos\beta_{,} = h\cos\zeta\sin(H-\lambda_{,,,}) \\ M\sin\beta_{,,,} - \sin\beta_{,} = h\sin\zeta \\ h \text{ stets positiv} \\ \cos\zeta\cos(G-H) = \cos\varphi \\ \frac{g}{h}\cos\varphi = \gamma \\ \frac{g}{h}\sin\varphi = A\end{array}\right\} \quad (III)$$

Auch hier kann der Fall eintreten, dass die Bestimmung von sin $\varphi$ (stets positiv) aus cos $\varphi$ unsicher wird; man kann aber auch hier diese Schwierigkeit wegschaffen. Ich will zu dem Ende die Bedeutung der Grössen $g$, $G$, $h$, $\zeta$ und $H$ näher erläutern. Es war bei der Ableitung gesetzt worden

$$X_{,,,} - X_{,} = g\cos G$$
$$Y_{,,,} - Y_{,} = g\sin G$$

Es ist demnach $g$ und $G$ nichts Anderes als die Entfernung und die Länge des dritten Sonnenortes vom ersten aus gesehen oder die Entfernung und die Länge des ersten Erdortes vom dritten aus. Schreibe ich nun die Differenz der heliocentrischen Coordinaten des Kometen mit Hilfe der eingeführten Hilfswinkel um, so wird man durch eine einfache Umsetzung erhalten

$$(x_{,,,} + g \cos G) - x_{,} = \varrho_{,} h \cos \zeta \cos H$$
$$(y_{,,,} + g \sin G) - y_{,} = \varrho_{,} h \cos \zeta \sin H$$
$$z_{,,,} - z_{,} = \varrho_{,} h \sin \zeta$$

Von einem Punkte, dessen Coordinaten $(x_{,,,} + g \cos G)$, $(y_{,,,} + g \sin G)$ und $z_{,,,}$ sind, erscheint demnach der dritte Kometenort in einer Länge von $(G + 180^0)$ und in der Breite o. Der erste Kometenort aber erscheint von diesem Punkte aus gesehen in der Länge: $(180^0 + H)$ und in der Breite: $-\zeta$. Die Seiten des ebenen Dreieckes zwischen den zwei Kometenorten und diesem fingirten Ort sind $s$, $g$ und $(\varrho_{,} h)$. Man sieht jetzt ohne Schwierigkeit ein, dass $\varphi$ der Winkel am fingirten Orte in diesem Dreiecke ist, daher stets kleiner als $180^0$ anzunehmen ist; bildet man nun analog, wie früher, das sphärische rechtwinklige Dreieck, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \zeta \cos (G - H) \\ \sin \varphi \cos w &= \cos \zeta \sin (G - H) \\ \sin \varphi \sin w &= \sin \zeta \end{aligned}\right\} III_b$$

Da $\sin \varphi$ stets positiv angenommen werden kann, so wird die Bestimmung von $\sin \varphi$ aus den beiden letzten Gleichungen keine Schwierigkeit machen und die nähere Bestimmung und Deutung von $w$ ist überflüssig, wiewol dieselbe leicht genug zu finden ist. Ist $\cos \varphi$ überhaupt der Einheit nahe, so wird man mit Vortheil die eben entwickelten Formeln $(III_b)$ zur Bestimmung von $\sin \varphi$ anwenden können.

Die bisher erlangten Werthe sind frei von jeder Hypothese über $\varrho_{,}$. Die Versuche zur Bestimmung von $\varrho_{,}$ können auf verschiedene Weise durchgeführt werden; ein Näherungswerth lässt sich im Allgemeinen nicht angeben; es ist aber von Olbers vorgeschlagen worden, im ersten Versuche $r_{,} + r_{,,,} = 2$ zu setzen in Berücksichtigung des Umstandes, dass die meisten Kometen in der Nähe der Erde aufgefunden werden. Macht man von dieser nicht ganz unsicheren Näherung Gebrauch, so stellt sich die Rechnung wie folgt. Zuerst wird berechnet

$$\left.\begin{aligned} 2k\,(T_{,,,} - T_{,}) &= \tau \\ \log 2k &= 8.5366114 \end{aligned}\right\} A$$

Nun ist nach obigem zunächst $s = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\mu$ und setzt man, was gewiss erlaubt ist, ohne sich von der Wahrheit allzu sehr zu entfernen, $\mu = 1$, so wird

$$\cos \vartheta = \frac{g \sin \varphi}{\tau} \sqrt{2} \qquad (B)$$

und daraus der Näherungswerth

$$(\varrho_{,}) = A \operatorname{tg} \vartheta + \gamma \qquad (C)$$

Mit diesem Werthe $(\varrho_{,})$ berechnet man $r_{,}$ und $r_{,,,}$ nach

$$\left.\begin{aligned} \frac{(\varrho_{,}) - f_{,}}{B_{,}} &= \operatorname{tg} \theta_{,} \qquad & r_{,} &= R_{,} \sin \psi_{,} \sec \theta_{,} \\ \frac{(\varrho_{,}) - f_{,,,}}{B_{,,,}} &= \operatorname{tg} \theta_{,,,} \qquad & r_{,,,} &= R_{,,,} \sin \psi_{,,,} \sec \theta_{,,,} \end{aligned}\right\} (D)$$

und erhält so neue, im Allgemeinen wesentlich genauere Werthe von $r_{,}$ und $r_{,,,}$. Bei dem nächsten Versuche kann man allenfalls $\mu$ schon mitnehmen. Man erhält den Werth von $\log \mu$ aus Tafel *VIII* mit dem Argumente $\eta$.

Es ist aber:

$$\eta = \frac{\tau}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} \qquad (E)$$

und weiter

$$\cos \vartheta = \frac{g \sin \varphi}{\tau} \; \frac{\sqrt{r_{,} + r_{,,,}}}{\mu} \qquad (F)$$

Die Rechnung wird nun innerhalb der Formeln $C$, $D$, $E$, $F$, so lange fortgeführt, bis keine weitere Aenderung der Grössen eintritt. Die Konvergenz dieser Annäherungen ist im Allgemeinen nicht sehr bedeutend. Hat man aber einmal zwei Versuche durchgeführt, so erhält man leicht einen sehr genauen Werth für $(r_{,} + r_{,,,})$. Die Aenderung des Werthes $(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{1}{2}}$. $\mu$ von einem Versuche zum anderen, ist eine Funktion des Abstandes des angenommenen Werthes von dem wahren Werthe. Setzt man diese linear voraus und bezeichnet die drei Näherungen der Reihe nach mit $w_1$, $w_2$ und $w_3$ und mit $w$ den wahren Werth und schreibt der Kürze halber

$$w_2 - w_1 = a_{,}$$
$$w_3 - w_2 = a_{,,}$$

so ist, wenn durch $x$ der Differentialquotient vorgestellt ist, der hier in Betracht kommt, und innerhalb der Versuchsgrenzen konstant angenommen wird:

$$a_{,} = x\,(w_1 - w)$$
$$a_{,,} = x\,(w_2 - w)$$

bestimmt man dadurch $w$, so wird nach der Elimination von $x$:

$$w = \frac{a_{,}\,w_2 - a_{,,}\,w_1}{a_{,} - a_{,,}}$$

Da $w_3$ offenbar der der Wahrheit nächste Werth ist, so wird es zweckmässig sein, $w$ als korrigirten Werth von $w_3$ darzustellen. Es ist aber nach dem Schema:

$$w_2 = w_3 - a_{,,}$$
$$w_1 = w_3 - (a_{,,} + a_{,})$$

demnach wird:

$$w = w_3 + \frac{a_{,,}^2}{a_{,} - a_{,,}}$$

Diese letztere Relation wird nur dann Anwendung finden, wenn in der That ohne Sprung nach dem Rechnungsschema vorgegangen wurde, hat man aber willkührliche Aenderungen vorgenommen, so wird man die erste Rechnungsform nämlich

$$w = \frac{a_{,}\,w_2 - a_{,,}\,w_1}{a_{,} - a_{,,}}$$

annehmen müssen.

Wenn man die vorstehende Anordnung der Rechnung nicht benutzen will, so führt ebenfalls das ganz einfache Verfahren durch Versuche über den Werth von $\varrho$, beinahe stets ebenso rasch zum Ziel; es wird sogar das letztere Verfahren den Vorzug

verdienen. In den ersten rohen Versuchen, die etwa mit vierstelligen Tafeln durchgeführt werden können, wird man zuerst setzen:

$$\frac{\tau}{\sqrt{2R_, \sin\psi_,}} = m$$

Nun macht man zwei Annahmen über $\varrho_,$, etwa 0.5 und 1.0, vermuthet man dass der Komet der Erde sehr nahe steht, wird man 0.1 und 0.5 wählen; mit diesen Annahmen berechnet man vierstellig:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{(\varrho_,)-f_,}{B_,} = \operatorname{tg}\theta_, & s_1 = g \sin\varphi \sec\vartheta \\ \frac{(\varrho_,)-\gamma}{A} = \operatorname{tg}\vartheta & s_2 = m\sqrt{\cos\theta_,} \end{array}\right\} \quad (a)$$

Jetzt wird schon ein ziemlich sicherer Schluss auf den Werth von $\varrho_,$ gestattet sein; sei die Differenz der Werthe $s_1$ und $s_2$ im ersten Versuche $d_,$, im zweiten $d_{,,}$ so wird der neue Werth von $\varrho_,$, den man zu den genaueren folgenden Versuchen anzuwenden haben wird, bestimmt durch:

$$\varrho_, = (\varrho_,)_2 + \frac{(\varrho_,)_2 - (\varrho_,)_1}{\frac{d_,}{d_{,,}} - 1} \qquad (b)$$

wobei $(\varrho_,)_1$ und $(\varrho_,)_2$ die angenommenen Werthe des ersten und zweiten Versuches bezeichnen. Von hier ab wird man die Rechnung nun völlig streng durchführen nach:

$$\left.\begin{array}{ll} 2k\,(T_{,,,} - T_,) = \tau & \log 2k = 8.5366114 \\ \frac{\varrho_, - f_,}{B_,} = \operatorname{tg}\theta_, & r_, = R_, \sin\psi_, \sec\theta_, \\ \frac{\varrho_, - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} & r_{,,,} = R_{,,,} \sin\psi_{,,,} \sec\theta_{,,,} \\ \frac{\varrho_, - \gamma}{A} = \operatorname{tg}\vartheta & s_1 = g \sin\varphi \sec\vartheta \\ \eta = \frac{\tau}{(r_, + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} & s_2 = \frac{\tau\mu}{(r_, + r_{,,,})^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\} \quad (c)$$

$\mu$ wird nach $\eta$ mit Hilfe der Tafel VIII bestimmt.

Die Differenz der Werthe $s_1$ und $s_2$ muss durch Aenderung von $\varrho_,$ weggeschafft werden, und über das Mass der Aenderung werden die schon vorhandenen Versuche eine sichere Leitung geben; man kann aber mit geringer Mühe die noch nothwendige Korrektion richtig erhalten bis auf Grössen zweiter Ordnung exclusive. Ist der Werth von $\varrho_,$ nicht zu fehlerhaft, was nicht zu befürchten steht, wenn man den Formeln $(a)$ nahe genügt hat durch das Interpolationsverfahren $(b)$, so wird der zweite genau durchgeführte Versuch das vorgestreckte Ziel meist erreichen lassen. Es wird sein müssen:

$$(s_1 + ds_1) - (s_2 + ds_2) = 0$$

oder

$$s_1 - s_2 = ds_2 - ds_1$$

Setzt man die Aenderungen von $\mu$ der Null gleich, so wird zunächst:

$$ds_2 = -\frac{\eta\mu}{2}\,(dr_, + dr_{,,,})$$

Es ist aber weiter:

$$dr_{,} = \sin\theta_{,}\ d\varrho_{,}$$
$$dr_{,,,} = M \sin\theta_{,,,}\ d\varrho_{,}$$

man hat daher:

$$ds_2 = -\ \frac{\eta\mu}{2}\left\{\sin\theta_{,} + M\sin\theta_{,,,}\right\} d\varrho_{,}$$

Es findet sich nun auch:

$$ds_1 = h \sin\vartheta\ d\varrho_{,}$$

woraus sich nach der Substitution in der obigen Bedingungsgleichung ergibt für die Korrection des angenommenen Werthes von $\varrho_{,}$:

$$d\varrho_{,} = \frac{s_2 - s_1}{\frac{1}{2}\eta\mu\ (\sin\theta_{,} + M\sin\theta_{,,,}) + h\sin\vartheta}. \qquad (d)$$

Da man $\cos\theta$ und $\operatorname{tg}\theta$ durch die vorausgehenden Rechnungen kennt, so wird man setzen $\sin\theta = \operatorname{tg}\theta\cos\theta$. Ist man sehr weit von der Wahrheit entfernt und treten dann die vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung ohnehin sehr merkbar hervor, so wird man bei nicht zu grossen Zwischenzeiten ($\eta$ wird klein) näherungsweise setzen dürfen:

$$d\varrho_{,} \doteq \frac{s_2 - s_1}{h\sin\vartheta}.$$

Mit dem nach (*d*) verbesserten Werth der Distanz berechnet man nochmals die Formeln (*c*). Sollte eine abermalige Aenderung nöthig werden, so wird der durch (*d*) berechnete Differentialquotient in der Regel unverändert beibehalten werden können.

Ist nun $\varrho_{,}$ nach irgend einer dieser oder anderer Methoden bestimmt, so wird sogleich erhalten:

$$\varrho_{,,,} = M\varrho_{,} \qquad \text{(IV)}$$

Aus $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ können, wie später gezeigt wird, die Elemente berechnet werden. Ich werde ehe ich an die Zusammenstellung der Formeln gehe, die bei meiner Methode anzuwenden wären, ein vollständiges Rechenbeispiel für die eben vorgetragenen Formeln geben und entnehme dasselbe dem Kometen III 1867. Die Beobachtungen die ich gewählt habe sind:

| Beobachtungsort | | | | Ortszeit | α ☊ | δ ☊ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wien (Josefstadt) | 1867 | Oct. | 1 | $11^h\ 24^m\ 37^s$ | $10^h\ 37^m\ 30^s 56$ | $+50°\ 16'\ 48''6$ |
| | » | » | 3 | 7 36 45 | 11 1 7.15 | +49 22 25.8 |
| | » | » | 6 | 7 31 55 | 11 39 52.97 | +47 5 48.6 |

Ich verfahre nun mit diesen Beobachtungen so, wie es bei ersten Bestimmungen einer Kometenbahn völlig ausreichend ist, nämlich ich vernachlässige die kleinen Korrektionen und setze einfach die scheinbare Rectascension und Deklination des Kometen mit der scheinbaren Schiefe der Ekliptik in scheinbare Längen und Breiten um, und verwende die so erhaltenen Werthe ohne weitere Korrektionen für die Bestimmung der Elemente, indem ich diese als für das wahre Aequinoctium der Mitte der Zeiten geltend annehme.

Die Zeitangaben werden in Berliner Zeit verwandelt und in Decimaltheilen des Tages angesetzt, die zu den Beobachtungen gehörigen Sonnenorte werden dem Berliner Jahrbuch entnommen und müssen ebenfalls auf das wahre Aequinoctium bezogen werden. Das Berliner Jahrbuch gibt bis zum Jahre 1867 die Sonnenorte bezogen auf das wahre Aequinoctium, von 1868 an aber auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfangs. Im ersteren Falle ist weiter keine Correction anzubringen, im zweiten Falle muss die Präcession und Nutation zu den Sonnenlängen hinzugelegt werden oder man bringt die Kometenorte auf dasselbe mittlere Aequinoctium. Die Verwandlung in Länge und Breite geschieht nach den Formeln auf pag. 13. Es ist für die Mitte der Zeiten die wahre Schiefe der Ekliptik:

$$\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 14''4$$

Die Rechnung stellt sich wie folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 159° 22′ 38″4 | 165° 16′ 47″2 | 174° 58′ 14″5 |
| $\delta$ | + 50° 16′ 48″6 | + 49° 22′ 25″8 | + 47° 5′ 48″6 |
| tg $\vartheta$ | 0.080 503 | 0.066 565 | 0.031 816 |
| sin $\alpha$ | 9.546 804 | 9.405 003 | 8.942 827 |
| tg $N$ | 0.533 699 | 0.661 562 | 1.088 989 |
| $N$ | 73° 41′ 22″4 | 77° 42′ 8″8 | 85° 20′ 32″1 |
| $N-\varepsilon$ | 50 14 8.0 | 54 14 54.4 | 61 53 17.7 |
| cos $(N-\varepsilon)$ | 9.805 931 | 9.766 615 | 9.673 199 |
| sec $N$ | 0.551 538 | 0.671 643 | 1.090 425 |
| tg $\alpha$ | $9_n$575 565 | $9_n$419 497 | $8_n$944 503 |
| tg $\lambda$ | $9_n$933 034 | $9_n$857 755 | $9_n$708 127 |
| tg $(N-\varepsilon)$ | 0.079 815 | 0.142 705 | 0.272 285 |
| sin $\lambda$ | 9.813 430 | 9.766 917 | 9.657 810 |
| tg $\beta$ | 9.893 245 | 9.909 622 | 9.930 095 |

Man erhält demnach für die weitere Rechnung die folgenden Zahlen:

| $T$ | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | log $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 1867 Oct. 1.46721 | 139° 24′ 0″ | + 38° 1′ 40″ | 188° 15′ 34″ | 0.00021 |
| 3.30897 | 144 13 11 | + 39 4 51 | 190 4 27 | 9.99997 |
| 6.30561 | 152 56 55 | + 40 24 31 | 193 1 49 | 9.99959 |

Die Richtigkeit dieser Werthe muss möglichst geprüft werden, da dieselben die Grundlagen für die weitere Rechnung bilden. Von hier ab wird die Rechnung zweckmässig fünfstellig geführt und da ich mich der Gernerth'schen Tafeln bediente, die in den trigonometrischen Funktionen von 10″ zu 10″ fortschreiten, so habe ich als letzte Stelle in den Bogengrössen die Bogensekunde angesetzt.

Vor Allem muss jetzt untersucht werden, ob im gegebenen Falle Olbers' Methode mit Vortheil anwendbar ist, ich finde:

$$i = 167^\circ 3$$
$$i_0 = 121^\circ 5$$

Die Bahnbestimmung nach **Olbers'** Methode ist demnach nicht sehr günstig, doch werden die Beobachtungsfehler noch nicht einen allzu nachtheiligen Einfluss haben. Zuerst wurden die Formeln I (pag. 122) angewendet und da $J > 45^\circ$ ist, so wählte ich die daselbst angesetzte zweite Form. Es findet sich so:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\beta_{,}$ | 9.78961 | $\sin(\lambda_{,} - L_{,,})$ | $9_n88849$ |
| $\cos\beta_{,}$ | 9.89637 | $\sin(\lambda_{,} - L_{,,})\cos\beta_{,}$ | $9_n78486$ |
| $\sin\beta_{,,,}$ | 9.81173 | $\sin\beta_{,}\operatorname{cotg}J$ | $9_n73585$ |
| $\cos\beta_{,,,}$ | 9.88164 | log *Subt.* | 0.92276 |
| $\lambda_{,} - L_{,,}$ | $-50^\circ\,40'\,27''$ | log Zähl. | 8.81309 |
| $\lambda_{,,} - L_{,,}$ | $-45\;\;51\;\;16$ | $\sin(\lambda_{,,,} - L_{,,})$ | $9_n78073$ |
| $\lambda_{,,,} - L_{,,}$ | $-37\;\;\;7\;\;32$ | $\sin(\lambda_{,,,} - L_{,,})\cos\beta_{,,,}$ | $9_n66237$ |
| $T_{,,,} - T_{,,}$ | 2.99664 | $\sin\beta_{,,,}\operatorname{cotg}J$ | $9_n75797$ |
| $T_{,,} - T_{,}$ | 1.84176 | log *Subt.* | 0.60865 |
| $\log(T_{,,,} - T_{,,})$ | 0.47664 | log Nenner | 9.05372 |
| $\log(T_{,,} - T_{,})$ | 0.26523 | $\log\frac{\text{Zähl.}}{\text{Nenn.}}$ | 9.75937 |
| $\sin(\lambda_{,,} - L_{,,})$ | $9_n85586$ | $\log(\tau_{,} : \tau_{,,,})$ | 9.21141 |
| $\operatorname{tg}J$ | $0_n05376$ | $\log M$ | 9.97078 |

Der Komet steht demnach zur Zeit der dritten Beobachtung der Erde näher als zur Zeit der ersten Beobachtung. Ich gebe nun die Berechnung der Formeln der zweiten Gruppe. Ich habe gefunden nach II. (pag. 122):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $L_{,,,} - L_{,}$ | $4^\circ\,46'\,15''$ | $\cos(\lambda_{,} - L_{,})$ | 9.81817 |
| $\lambda_{,} - L_{,}$ | $-48\;\;51\;\;34$ | $\cos\psi_{,}$ | 9.71454 |
| $\lambda_{,,,} - L_{,,,}$ | $-40\;\;\;4\;\;54$ | $\sin\psi_{,}$ | 9.93208 |
| $\sin(L_{,,,} - L_{,})$ | 8.91997 | $\log f_{,}$ | 9.71475 |
| $\cos(L_{,,,} - L_{,})$ | 9.99849 | $f_{,}$ | $+0.51850$ |
| $R_{,,,}\cos(L_{,,,} - L_{,})$ | 9.99808 | $\log B_{,}$ | 9.93229 |
| log *Subt.* | 2.30835 | $\cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})$ | 9.88373 |
| $g\cos(G - L_{,})$ | $7_n68973$ | $\cos\psi_{,,,}$ | 9.76537 |
| cos / sin | 9.99925 | $\sin\psi_{,,,}$ | 9.90996 |
| $g\sin(G - L_{,})$ | 8.91956 | $R_{,,,}\cos\psi_{,,,}$ | 9.76496 |
| $\operatorname{cotg}(G - L_{,})$ | $8_n77017$ | $\log f_{,,,}$ | 9.79418 |
| $G - L_{,}$ | $93^\circ\,22'\,16''$ | $f_{,,,}$ | $+0.62256$ |
| $G$ | $281^\circ\,37'\,50''$ | $R_{,,,}\sin\psi_{,,,}$ | 9.90955 |
| $\log g$ | 8.92031 | $\log B_{,,,}$ | 9.93877 |

Nun kann an die Berechnung der Hilfsgrössen geschritten werden, die die Berechnung von $s$ und $\varrho_{,}$ erleichtern. Ich habe die Rechnung wie folgt gestellt und gefunden (III pag. 123):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda_{,,,} - \lambda_{,}$ | 13° 31′ 55″ | $h \cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,})$ | $8_n73207$ |
| $\cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})$ | 9.98778 | cos / sin | 9.98215 |
| $\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})$ | 9.36919 | $h \cos\zeta \sin(H - \lambda_{,,,})$ | 9.26556 |
| $M \cos\beta_{,,,}$ | 9.85242 | $h \sin\zeta$ | $7_n99955$ |
| $\cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,}$ | 9.88415 | $\cos\zeta$ | 9.99941 |
| log *Subt.* | 1.12035 | $h \cos\zeta$ | 9.28341 |
| $M \sin\beta_{,,,}$ | 9.78251 | $\operatorname{cotg}(H - \lambda_{,,,})$ | $9_n46651$ |
| log *Subt.* | 1.78296 | $H - \lambda_{,,,}$ | 106° 19′ 4″ |
| $(g:h)$ | 9.63631 | $H$ | 259 15 59 |
| $\sin\varphi$ | 9.58380 | $G - H$ | 22 21 51 |
| $\log\gamma$ | 9.60176 | $\lg h$ | 9.28400 |
| $\gamma$ | + 0.39973 | $\cos(G - H)$ | 9.96604 |
| $\log A$ | 9.22011 | $\cos\varphi$ | 9.96545 |

Die versuchsweise Ermittlung von $\varrho_{,}$ kann nun beginnen; ich werde diese Bestimmung von $\varrho_{,}$ nach beiden oben vorgeschlagenen Methoden (pag. 124) durchführen, die erstere Methode führt im gegebenen Falle sehr rasch zum Ziele, da zufällig die Entfernung des Kometen von der Sonne sehr nahe der Einheit gleich ist und es konnte desshalb nach dem ersten Versuche sogleich die schärfere Rechnung beginnen. Zuerst wurde der Werth $\frac{\tau}{g \sin\varphi}$ berechnet.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T_{,,,} - T_{,}$ | 4.83840 | $\log\tau$ | 9.22132 |
| $\log(T_{,,} - T_{,})$ | 0.68471 | $\log g \sin\varphi$ | 8.50411 |
| $\log 2k$ | 8.53661 | $\lg(\tau : g \sin\varphi)$ | 9.28279 |

| Versuch | I. | II. | III. |
|---|---|---|---|
| $\log(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{1}{2}}\mu$ | 0.15051 | 0.13432 | 0.13649 |
| $\cos\vartheta$ | 9.4333 | 9.41711 | 9.41928 |
| $\operatorname{tg}\vartheta$ | 0.5501 | 0.56753 | 0.56520 |
| $\lg A \operatorname{tg}\vartheta$ | 9.7702 | 9.78764 | 9.78531 |
| $A \operatorname{tg}\vartheta$ | + 0.5891 | + 0.61326 | + 0.60997 |
| $(\varrho_{,})$ | + 0.9888 | + 1.01299 | + 1.00970 |
| $\varrho_{,} - f_{,}$ | + 0.4703 | + 0.49449 | + 0.49120 |
| $\varrho_{,} - f_{,,,}$ | + 0.3662 | + 0.39043 | + 0.38714 |
| $\lg(\varrho_{,} - f_{,})$ | 9.6724 | 9.69416 | 9.69126 |
| $\lg(\varrho_{,,,} - f_{,,,})$ | 9.5637 | 9.59154 | 9.58787 |
| $\operatorname{tg}\theta_{,}$ | 9.7401 | 9.76187 | 9.75897 |
| $\operatorname{tg}\theta_{,,,}$ | 9.6249 | 9.65277 | 9.64910 |
| $\cos\theta_{,}$ | 9.9427 | 9.93742 | 9.93815 |
| $\cos\theta_{,,,}$ | 9.9645 | 9.96003 | 9.96065 |
| $\log r_{,}$ | 9.9896 | 9.99487 | 9.99414 |
| $\log r_{,,,}$ | 9.9450 | 9.94952 | 9.94890 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| log *Add.* | 0.2793 | 0.27895 | 0.27900 |
| $\log (r_{,} + r_{,,,})$ | 0.2689 | 0.27382 | 0.27314 |
| $\frac{1}{2} \log (r_{,} + r_{,,,})$ | 0.1344 | 0.13691 | 0.13657 |
| $\frac{3}{2} \log (r_{,} + r_{,,,})$ | 0.4033 | | |
| $\lg \eta$ | 8.8180 | | |
| $\eta$ | 0.0658 | | |
| $\log \mu$ | 0.00008 | | |
| $\log (r_{,} + r_{,,,})^{\frac{1}{2}} \mu$ | 0.13432 | 0.13683*) | 0.13649 |

Ich führe nun die Versuche nach der zweiten Methode (pag. 126) durch:

Vorversuche

$\log m = 9.1047$

| | | |
|---|---|---|
| $\varrho_{,}$ | 0.5000 | 1.0000 |
| $\varrho_{,} - f_{,}$ | − 0.0185 | + 0.4815 |
| $\varrho_{,} - \gamma$ | + 0.1003 | + 0.6003 |
| $\log (\varrho_{,} - f_{,})$ | $8_n2672$ | 9.6825 |
| $\log (\varrho_{,} - \gamma)$ | 9.0013 | 9.7784 |
| $\operatorname{tg} \theta_{,}$ | $8_n3349$ | 9.7502 |
| $\operatorname{tg} \vartheta$ | 9.7812 | 0.5583 |
| $\cos \theta_{,}$ | 9.9999 | 9.9403 |
| $\cos \vartheta$ | 9.9324 | 9.4257 |
| $\sqrt{\cos \theta_{,}}$ | 9.9999 | 9.9701 |
| $\lg s_2$ | 9.1046 | 9.0748 |
| $\lg s_1$ | 8.5717 | 9.0784 |
| Diff. | − 0.5329 | + 36 |

Diese Vorversuche zeigen, dass $\varrho_{,}$ ganz in der Nähe von dem Werthe 1 ist; die Uebereinstimmung von $s_1$ und $s_2$ ist in der That im zweiten Versuche so nahe, dass durch die Einführung der Näherungsformeln grössere Fehler zu befürchten stehen. Ich interpolire nun aus diesen zwei Versuchen $\varrho_{,}$ auf zwei Decimalen genau, es wird $\varrho_{,} = 1.00$ und damit beginne ich die genauere Berechnung der Versuche.

---

*) Da jetzt durch die Versuche I und II die drei Näherungswerthe 0.15051, 0.13432 und 0.13683 ermittelt sind, so würde es nicht zweckmässig sein die Rechnung nach dem gegebenen Schema fortzuführen, um so mehr wenn die erlangte Annäherung geringer wäre. Ich werde das oben gegebene Interpolationsverfahren (pag. 125) anwenden. Es ist:

$$w_1 = 0.15051 \qquad a_1 = -1619$$
$$w_2 = 0.13432 \qquad a_{,,} = +\ 251$$
$$w_3 = 0.13683 \qquad dw_3 = -\ 34$$

demnach ist der Werth für den dritten und, da der Schlusswerth von $(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{1}{2}} \mu$ mit dem Anfangswerthe völlig stimmt, letzten Versuch 0.13649. Man hat daher für die Rechnung der Elemente:

$$\log \varrho_{,} = 0.00419$$
$$\log \varrho_{,,,} = 9.97497$$

| Versuch | I. | II. |
|---|---|---|
| $\varrho_,$ | 1.00000 | 1.00972 |
| $\varrho_, - f_,$ | 0.48150 | 0.49122 |
| $\varrho_, - f_{,,,}$ | 0.37744 | 0.38716 |
| $\varrho_, - \gamma$ | 0.60027 | 0.60999 |
| $\log(\varrho_, - f_,)$ | 9.68260 | 9.69128 |
| $\log(\varrho_{,,,} - f_{,,,})$ | 9.57685 | 9.58789 |
| $\log(\varrho_, - \gamma)$ | 9.77835 | 9.78532 |
| $\mathrm{tg}\,\theta_,$ | 9.75031 | 9.75899 |
| $\mathrm{tg}\,\theta_{,,,}$ | 9.63808 | 9.64912 |
| $\mathrm{tg}\,\vartheta$ | 0.55824 | 0.56521 |
| $\cos\theta_,$ | 9.94026 | 9.93814 |
| $\cos\theta_{,,,}$ | 9.96243 | 9.96064 |
| $\cos\vartheta$ | 9.42576 | 9.41927 |
| $\lg s_,$ | 9.07835 | 9.08484 |
| $\lg r_,$ | 9.99203 | 9.99415 |
| $\lg r_{,,,}$ | 9.94712 | 9.94891 |
| $\log \mathit{Add.}$ | 0.27916 | 0.27900 |
| $\lg(r_, + r_{,,,})$ | 0.27119 | 0.27315 |
| $\frac{1}{2}\lg(r_, + r_{,,,})$ | 0.13559 | 0.13657,5 |
| $\frac{3}{2}\lg(r_, + r_{,,,})$ | 0.40678 | |
| $\lg\eta$ | 8.81454 | |
| $\eta$ | 0.06524 | |
| $\log\mu$ | 0.00008 | |
| $\log\mu\tau$ | 9.22140 | |
| $\lg s_2$ | 9.08581 | 9.08482.5 |
| $s_2$ | 0.121846 | 0.121570 |
| $s_1$ | 0.119770 | 0.121574 |
| $s_2 - s_1$ | + 0.002076*) | — 0.000004 |

**Die im zweiten Versuche gefundene Differenz zwischen $s_2$ und $s_1$ ist so klein, dass man dieselbe nicht weiter zu berücksichtigen braucht, und die rasche Annäherung zeigt die durch das obige Verfahren erlangte Genauigkeit; will man jedoch diese Differenz wegschaffen so wird mit Hilfe des Werthes $n$ gefunden:**

$$d\varrho_, = -0.00002$$

*) Für den zweiten Versuch würde nach ($d$) (pag. 127) der Werth für $\frac{s_2 - s_1}{d\varrho_,} = n$ berechnet, und hierfür gefunden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\vartheta$ | 9.9840 | $\log I$ | 8.4497 |
| $\sin\theta_{,,,}$ | 9.6005 | $h \sin\vartheta$ | 9.2680 |
| $\sin\theta_,$ | 9.6906 | $\log \mathit{Add.}$ | 0.0614 |
| $M\sin\theta_{,,,}$ | 9.5713 | $\log n$ | 9.3294 |
| $\log \mathit{Add.}$ | 9.2455 | $\lg(s_2 - s_1)$ | 7.3172 |
| $\log \mathit{Summe}$ | 9.9361 | $\lg d\varrho_,$ | 7.9878 |
| $\lg \eta u : 2$ | 8.5136 | $d\varrho_,$ | + 0.00972 |

und demnach:

$$\varrho_, = 1.00970$$
$$\log \varrho_, = 0.00419$$
$$\log \varrho_{,,,} = 9.97497$$

in völliger Uebereinstimmnng mit den nach der ersteren Methode erlangten Werthen.

Zeigt die anfängliche Untersuchung der Winkel $i$ und $i_0$, dass Olbers' Methode nicht mit Vortheil anwendbar ist, so wird man zweckmässig das folgende Verfahren einschlagen. Man berechnet vorerst die Lage des zu wählenden grössten Kreises nach:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} J \sin(\lambda_{,,} - \Pi) &= \operatorname{tg} \beta_{,,} \\ \operatorname{tg} J \cos(\lambda_{,,} - \Pi) &= -\frac{\lambda_{,,,} - \lambda_,}{\beta_{,,,} - \beta_,} \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

$\operatorname{tg} J$ kann positiv genommen werden. Für den zweiten Näherungsausdruck kann, wenn es nothwendig scheinen sollte (pag. 118) der genauere Ausdruck gesetzt werden; der ersten Gleichung muss völlig streng genügt werden. Die konstanten Glieder der Fundamentalgleichung berechnen sich nach:

$$\left.\begin{aligned} \odot_, &= R_, \sin(L_, - \Pi) \\ \odot_{,,} &= R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi) \\ \odot_{,,,} &= R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \Pi) \\ \mathcal{S}_, &= \sin\beta_, \cos J - \sin(\lambda_, - \Pi) \cos\beta_, \sin J \\ \mathcal{S}_{,,,} &= \sin(\lambda_{,,,} - \Pi) \cos\beta_{,,,} \sin J - \sin\beta_{,,,} \cos J \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Hieran schliesst sich die Berechnung der Hilfsgrössen, um $r_,$, $r_{,,,}$ und $s$ als Funktionen von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ darzustellen. Es finden hier die folgenden Formeln ihre Anwendung:

$$\left.\begin{aligned} A &= (R_{,,,} - R_,)^2 + 4 R_, R_{,,,} \sin^2 \tfrac{1}{2} (L_{,,,} - L_,) \\ B &= 2 \cos\beta_, \{R_{,,,} \cos(\lambda_, - L_{,,,}) - R_, \cos(\lambda_, - L_,)\} \\ C &= 2 \cos\beta_{,,,} \{R_, \cos(\lambda_{,,,} - L_,) - R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})\} \\ D &= 4 \{\sin^2 \tfrac{1}{2} (\beta_{,,,} - \beta_,) + \cos\beta_, \cos\beta_{,,,} \sin^2 \tfrac{1}{2} (\lambda_{,,,} - \lambda_,)\} \\ &\qquad \frac{B + C}{D} = E \\ \cos\beta_, \cos(\lambda_, - L_,) &= \cos\psi_, \qquad \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) = \cos\psi_{,,,} \\ R_, \sin\psi_, &= B_, \qquad\qquad R_{,,,} \sin\psi_{,,,} = B_{,,,} \\ R_, \cos\psi_, &= f_, \qquad\qquad R_{,,,} \cos\psi_{,,,} = f_{,,,} \end{aligned}\right\} \quad (III)$$

sollte die Bestimmung von $\sin\psi_,$ und $\sin\psi_{,,,}$ aus der Cosinusfunktion zu unsicher sein, so wird man nehmen:

$$\sin\psi_,^2 = \cos\beta_,^2 \sin(\lambda_, - L_,)^2 + \sin\beta_,^2$$
$$\sin\psi^2_{,,,} = \cos\beta^2_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,})^2 + \sin\beta^2_{,,,}$$

Nun werden die Grössen ermittelt, die Funktionen der Zwischenzeiten sind; man hat zu berechnen:

$$\left.\begin{array}{ll}
(T_{,,} - T_{,})\,k = \tau_{,,,} & (T_{,,,} - T_{,,})\,k = \tau_{,} \\
(T_{,,,} - T_{,})\,k = \tau_{,,} & \log k = 8.235581 \\
\multicolumn{2}{l}{\frac{\sin J}{\delta_{,,,}}\left\{\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}}\odot_{,} - \frac{\tau_{,,}}{\tau_{,,,}}\odot_{,,} + \odot_{,,,}\right\} = G} \\
\multicolumn{2}{l}{\frac{1}{3}\,\frac{\sin J}{\delta_{,,,}}\left\{(\tau^2_{,,,} - \tau_{,}^2)\,\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}}\odot_{,} + (\tau_{,,}^2 - \tau^2_{,,,})\,\frac{\tau_{,,}}{\tau_{,,,}}\odot_{,,}\right\} = F} \\
\multicolumn{2}{l}{4\,\frac{\sin J}{\delta_{,,,}}\left\{\tau_{,}^2\odot_{,} - \tau_{,}\tau_{,,,}\odot_{,,}\right\} = H} \\
\multicolumn{2}{l}{\frac{1}{3}\,(\tau^2_{,,,} - \tau_{,}^2) = f} \\
\multicolumn{2}{l}{4\,\tau_{,}\tau_{,,,} = h}
\end{array}\right\}\quad (IV)$$

Die Relation zwischen $\varrho_{,,,}$ und $\varrho_{,}$ wird nun:

$$\varrho_{,,,} = G + \frac{1}{(r_{,} + r_{,,,})^3}\left\{F + H\,\frac{r_{,,,} - r_{,}}{r_{,} + r_{,,,}}\right\} + \frac{\delta_{,}}{\delta_{,,,}}\,\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}}\left\{1 + \frac{1}{(r_{,} + r_{,,,})^3}\left(f + h\,\frac{r_{,,,} - r_{,}}{r_{,} + r_{,,,}}\right)\right\}\varrho_{,} \quad (V)$$

Die Abhängigkeit von $r_{,}$, $r_{,,,}$ und $s$ von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ stellt sich dar durch:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{\varrho_{,} - f_{,}}{B_{,}} = \operatorname{tg}\theta_{,} & r_{,} = B_{,}\sec\theta_{,} = (\varrho_{,} - f_{,})\operatorname{cosec}\theta_{,} \\
\frac{\varrho_{,,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} & r_{,,,} = B_{,,,}\sec\theta_{,,,} = (\varrho_{,,,} - f_{,,,})\operatorname{cosec}\theta_{,,,} \\
\multicolumn{2}{l}{s_1^2 = A + (E + \varrho_{,,,})\,D\varrho_{,} + (\varrho_{,,,} - \varrho_{,})\,(C + \varrho_{,,,} - \varrho_{,})}
\end{array}\right\}\quad (VI)$$

Ausserdem ist zu suchen:

$$s_2 = \frac{2\,\tau_{,,}}{\sqrt{r_{,} + r_{,,,}}}\,\mu \qquad (VII)$$

$\mu$ wird aus der Tafel VIII mit dem Argumente $\eta$ entlehnt. Es ist aber:

$$\eta = \frac{2\,\tau_{,,}}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}}$$

Die Gleichungen $(V)$ $(VI)$ und $(VII)$ sind so durch Versuche aufzulösen, dass ein angenommener Werth von $\varrho_{,}$ der Bedingung genügt

$$s_1 = s_2$$

Die Versuche können auf die folgende Weise durchgeführt werden. Da sich mit Sicherheit über den Werth von $\varrho_{,}$ im Voraus nichts bestimmen lässt, so wird man je nach den Umständen zwei Werthe für $\varrho_{,}$ annehmen mit denen man die Rechnung beginnt. Lässt eine grosse geocentrische Bewegung des Kometen auf eine bedeutende Annäherung schliessen, so wird man etwa setzen $\varrho_{,}$ 0.1 und 0.5; gewöhnlich werden die Werthe 0.5 und 1.0 mit Vortheil angewendet werden. Bei den ersten Versuchen genügt eine drei- bis vierstellige Rechnung. Mit dem gewählten $\varrho_{,}$ berechnet man zuerst nach $(VI)$ den Radiusvector $r_{,}$ und setzt vorläufig in $(V)$, $H$, $f$*) und $h$ der Null gleich, so bestimmt sich $\varrho_{,,,}$ nach

$$\varrho_{,,,} = G + \frac{F}{8\,r_{,}^3} + \frac{\delta_{,}}{\delta_{,,,}}\,\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}}\,\varrho_{,}$$

Nach den übrigen Formeln in $(VI)$ berechnet man nun $r_{,,,}$ und $s_{,}$. Aus $r_{,}$ und $r_{,,,}$ bestimmt man nach $(VII)$: $s_2$ nachdem man vorerst $\mu = 1$ setzt; $s_1$ soll mit $s_2$ stimmen.

*) Ist eine der äusseren Beobachtungen unvollständig (pag. 97 und 114), so muss sofort beim ersten Versuche $f$ berücksichtigt werden, ähnlich so wie $F$ in Rechnung gezogen wird.

Nenne ich die Differenz dieser Werthe $(s_1 - s_2)$ für den ersten Versuch $d_,$, für den zweiten $d_{,,}$, so erhält man einen Näherungswerth von $\varrho_,$ nach

$$\varrho_, = (\varrho_,)_2 + \frac{(\varrho_,)_2 - (\varrho_,)_1}{\frac{d_,}{d_{,,}} - 1}$$

mit welchem Werthe die Rechnung wiederholt wird; aus den vorhandenen zwei Werthen von $\log (r_, + r_{,,,})$ interpolirt man linear die Werthe von $\log (r_, + r_{,,,})$ welche der neuen Annahme von $\varrho_,$ entsprechen und ermittelt jetzt Alles genauer. Man wird ansetzen

$$\varrho_{,,,} = G + \frac{F}{(r_, + r_{,,,})^3} + \frac{\mathfrak{S}_,}{\mathfrak{S}_{,,,}} \frac{\tau_,}{\tau_{,,,}} \left(1 + \frac{f}{(r_, + r_{,,,})^3}\right) \varrho_,$$

und berechnet, wie früher, $r_,$, $r_{,,,}$, $s_1$ und $s_2$; sollte man, wie man diess am Beginne dieses dritten Versuches sieht, der Wahrheit schon ziemlich nahe sein, so kann man den Werth von $\mu$ in Rechnung bringen. Die bereits vorhandenen Versuche werden nach Beendigung dieses dritten Versuches einen ziemlich sicheren Schluss (Interpolation) gestatten auf den wahren Werth von $\varrho_,$; für den vierten Versuch werden die Werthe von $(r_, + r_{,,,})$ ebenfalls wie früher durch lineare Interpolation bestimmt. Ist man der Wahrheit schon nahe gekommen, so kann man die Glieder dritter Ordnung jetzt schon mitnehmen, die in den späteren Hypothesen im Allgemeinen ungeändert beibehalten werden können, wenn nicht die angenommenen Werthe allzu fehlerhaft waren. Auf die angegebene Weise wird man so lange $\varrho_,$ abändern, bis die völlige Uebereinstimmung der Werthe $s_1$ und $s_2$ erreicht ist.

Um nun vorstehende Formeln ebenfalls durch ein Beispiel zu erläutern, nehme ich die drei oben gewählten Beobachtungen des Kometen III 1867 vor; wiewol Olbers' Methode in dem vorliegenden Falle gewiss mit Vortheil noch angewendet wird, so wähle ich dennoch dieses Beispiel, da einerseits eine Parallelrechnung die Vergleichung beider Methoden erleichtert und andererseits ich bei der Veröffentlichung der vorstehenden Methode (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LVII) ein Beispiel gerechnet habe, wo Olbers' Methode schon fast im Stiche lässt und eine ungewöhnliche Genauigkeit der Beobachtungen fordert um brauchbare Resultate zu liefern. Ich setze die Grundlagen der Rechnung nochmals hier an:

| | Berliner Zeit | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1867 Octob. | 1.46721 | 139° 24′ 0″ | + 38° 1′ 40″ | 188° 15′ 34″ | 0.00021 |
| | 3.30897 | 144 13 11 | + 39 4 51 | 190 4 27 | 9.99997 |
| | 6.30561 | 152 56 55 | + 40 24 31 | 193 1 49 | 9.99959 |

Ich berechne zuerst die Lage des grössten Kreises, der für die Bestimmung am günstigsten ist. Es findet sich nach $(I)$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda_{,,,} - \lambda_,$ | + 812′9 | $\text{tg}(\lambda_{,,} - \Pi)$ | $9_n15431$ |
| $\beta_{,,,} - \beta_,$ | + 142.8 | $\lambda_{,,} - \Pi$ | 171° 52′ 51″ |
| $\log(\lambda_{,,,} - \lambda_,)$ | 2.91004 | $\Pi$ | − 27° 39′ 40″ |
| $\log(\beta_{,,,} - \beta_,)$ | 2.15473 | | |
| $\text{tg} J \sin(\lambda_{,,} - \Pi)$ | 9.90962 | $\text{tg} J$ | 0.75969 |
| sin / cos | $9_n99562$ | $\sin J$ | 9.99353 |
| $\text{tg} J \cos(\lambda_{,,} - \Pi)$ | $0_n75531$ | $\cos J$ | 9.23384 |

Ich gehe nun zur Berechnung der Formeln (*II*) über und stelle die Rechnung wie folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\beta_{,}$ | 9.78961 | $\lambda_{,} - \Pi$ | 167° 3′ 40″ |
| $\cos\beta_{,}$ | 9.89637 | $\lambda_{,,,} - \Pi$ | 180 36 35 |
| $\sin\beta_{,,,}$ | 9.81173 | $\sin(\lambda_{,} - \Pi)$ | 9.35008 |
| $\cos\beta_{,,,}$ | 9.88164 | $\sin(\lambda_{,} - \Pi)\cos\beta_{,}$ | 9.24645 |
| $L_{,} - \Pi$ | 215° 55′ 14″ | $\lg II$ | 9.23998 |
| $L_{,,} - \Pi$ | 217 44 7 | $\lg I$ | 9.02345 |
| $L_{,,,} - \Pi$ | 220 41 29 | log *Subt.* | 0.18951 |
| $\sin(L_{,} - \Pi)$ | $9_n76839$ | $\lg \delta_{,}$ | $8_n83394$ |
| $\sin(L_{,,} - \Pi)$ | $9_n78676$ | $\sin(\lambda_{,,,} - \Pi)$ | $8_n02700$ |
| $\sin(L_{,,,} - \Pi)$ | $9_n81424$ | $\sin(\lambda_{,,,} - \Pi)\cos\beta_{,,,}$ | $7_n90864$ |
| $\log\odot_{,}$ | $9_n76860$ | $\lg I$ | $7_n90217$ |
| $\log\odot_{,,}$ | $9_n78673$ | $\lg II$ | 9.04557 |
| $\log\odot_{,,,}$ | $9_n81383$ | log *Add.* | 0.03015 |
| $\odot_{,,,}$ | —0.65137 | $\log\delta_{,,,}$ | $9_n07572$ |

Die Genauigkeitszunahme in dem Verhältnisse $\frac{\delta_{,}}{\delta_{,,,}}$ ist sehr merkbar, denn bei der Bestimmung nach Olbers' Methode werden diese Zahlen, wenn man beachtet dieselben homogen zu machen

$$\log\delta_{,} = 8.68780$$
$$\log\delta_{,,,} = 8.92843$$

Wie man sieht ist jedoch diese Genauigkeitszunahme noch nicht so bedeutend, dass die Nothwendigkeit hervortreten würde, Olbers' Rechnungsvorschriften zu verlassen, und man wird sich in der Praxis an die oben angesetzten Grenzen zu halten haben; man kann nur bemerken, dass in der That die Vergrösserung der Genauigkeit nahe dem Näherungsausdrucke

$$\frac{1}{\cos(i - i_0)}$$

entspricht.

Jetzt sind die Hilfsgrössen zu berechnen, welche die Darstellung von $r$, $r_{,,,}$ und $s$ als Funktionen von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ erleichtern. Ich habe gefunden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| log. *Subt.* | 2.845 | $\lambda_{,} - L_{,,,}$ | — 53° 37′ 49″ |
| $\log(R_{,,,} - R_{,})$ | 7.155 | $\lambda_{,} - L_{,}$ | — 48 51 34 |
| $2\log(R_{,,,} - R_{,})$ | 4.310 | $\lambda_{,,,} - L_{,}$ | — 35 18 39 |
| $(L_{,,,} - L_{,})$ | 4° 46′ 15″ | $\lambda_{,,,} - L_{,,,}$ | — 40 4 54 |
| $\frac{1}{2}(L_{,,,} - L_{,})$ | 2 23 7.5 | $\cos(\lambda_{,} - L_{,,,})$ | 9.77305 |
| $\sin\frac{1}{2}(L_{,,,} - L_{,})$ | 8.61932 | $\cos(\lambda_{,} - L_{,})$ | 9.81817 |
| $\sin\frac{1}{2}(L_{,,,} - L_{,})^2$ | 7.23864 | $\cos(\lambda_{,,,} - L_{,})$ | 9.91170 |
| $4R_{,}R_{,,,}$ | 0.60186 | $\cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})$ | 9.88373 |
| $\log II$ | 7.84050 | $R_{,,,}\cos(\lambda_{,} - L_{,,,})$ | 9.77264 |
| log *Add.* | 0.00013 | $R_{,}\cos(\lambda_{,} - L_{,})$ | 9.81838 |
| $\lg A$ | 7.84063 | lg *Subt.* | 0.95442 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.006928 | | $8_n81822$ |
| $\beta_{,,,} - \beta_,$ | 2° 22′ 51″ | $2 \cos \beta_,$ | 0.19740 |
| $\lambda_{,,,} - \lambda_,$ | 13 32 55 | $\lg B$ | $9_n01562$ |
| $\frac{1}{2}(\beta_{,,,} - \beta_,)$ | 1 11 25.5 | $R_, \cos(\lambda_{,,,} - L_,)$ | 9.91191 |
| $\frac{1}{2}(\lambda_{,,,} - \lambda_,)$ | 6 46 27.5 | $R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})$ | 9.88332 |
| $\sin^2 \frac{1}{2}(\lambda_{,,,} - \lambda_,)$ | 8.14 346 | log *Subt.* | 1.16720 |
| $\cos\beta_, \cos\beta_{,,,}$ | 9.77801 | | 8.71612 |
| $\lg H$ | 7.92147 | $2 \cos \beta_{,,,}$ | 0.18267 |
| $\sin^2 \frac{1}{2}(\beta_{,,,} - \beta_,)$ | 6.63510 | $\lg C$ | 8.89879 |
| lg *Add.* | 0.02190 | lg *Subt.* | 0.51051 |
| $\lg \frac{1}{4} D$ | 7.94337 | $\lg(B + C)$ | $8_n38828$ |
| $\lg D$ | 8.54543 | $\lg E$ | $9_n84285$ |
| $C$ | + 0.07921 | $E$ | − 0.69638 |
| $\cos \psi_,$ | 9.71454 | $\cos \psi_{,,,}$ | 9.76537 |
| $\sin \psi_,$ | 9.93208 | $\sin \psi_{,,,}$ | 9.90996 |
| $\lg B_,$ | 9.93229 | $\lg B_{,,,}$ | 9.90955 |
| $\lg f_,$ | 9.71475 | $\lg f_{,,,}$ | 9.76496 |
| $f_,$ | + 0.51850 | $f_{,,,}$ | + 0.58205 |

Nun sind zum Abschlusse der Vorbereitungsrechnungen noch die von den Zwischenzeiten abhängigen Grössen zu berechnen. Ich finde dieselben nach (IV)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T_{,,} - T_,$ | 1.84176 | $\log G \frac{\delta_{,,,}}{\sin J}$ | 7.1173 |
| $T_{,,,} - T_,$ | 4.83840 | $\sin J : \delta_{,,,}$ | $0_n91781$ |
| $T_{,,,} - T_{,,}$ | 2.99664 | $\log G$ | $8_n0351$ |
| $\lg(T_{,,} - T_,)$ | 0.26523 | $G$ | − 0.01084 |
| $\lg(T_{,,,} - T_,)$ | 0.68471 | $\lg I$ | 7.19843 |
| $\lg(T_{,,,} - T_{,,})$ | 0.47664 | $\lg II$ | $7_n97881$ |
| $\lg \tau_{,,,}$ | 8.50081 | lg *Sub.* | 0.07874 |
| $\lg \tau_{,,}$ | 8.92029 | | $7_n90007$ |
| $\lg \tau_,$ | 8.71222 | $\lg \frac{1}{3} \frac{\sin J}{\delta_{,,,}}$ | $1_n04275$ |
| $\lg \tau_, : \tau_{,,,}$ | 0.21141 | $\log F$ | 8.94282 |
| $\lg \tau_{,,} : \tau_{,,,}$ | 0.41948 | $F$ | + 0.08766 |
| $\lg \tau_,^2$ | 7.42444 | $\tau_, \tau_{,,,}$ | 7.21303 |
| $\lg \tau_{,,,}^2$ | 7.00162 | $\tau_,^2 \odot_,$ | $7_n19304$ |
| $\lg \tau_{,,}^2$ | 7.84058 | $\tau_, \tau_{,,,} \odot_{,,}$ | $6_n99976$ |
| lg *Subt.* | 0.20602 | lg *Sub.* | 0.25138 |
| lg *Subt.* | 0.06798 | | $6_n74838$ |
| $\lg(\tau_{,,,}^2 - \tau_,^2)$ | $7_n21842$ | $4 \sin J : \delta_{,,,}$ | $1_n51987$ |
| $\lg(\tau_{,,}^2 - \tau_{,,,}^2)$ | 7.77260 | $\lg II$ | 8.26825 |
| $\lg \frac{\tau_,}{\tau_{,,,}} \odot_,$ | $9_n98001$ | $\lg f$ | $7_n34336$ |
| $\lg \frac{\tau_{,,}}{\tau_{,,,}} \odot_{,,}$ | $0_n20621$ | $f$ | − 0.002205 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \odot_{\prime\prime}$ | $-0.95502$ | $\lg h$ | 7.81509 |
| $-\frac{\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime\prime}} \odot_{\prime\prime}$ | $+1.60770$ | $\lg \frac{\delta_{\prime}}{\delta_{\prime\prime\prime}}$ | 9.75822 |
| *Summe* | $+0.65268$ | $\lg M_0$ | 9.96963 |
| $G \frac{\sin \delta_{\prime\prime\prime}}{\sin J}$ | $+0.00131$ | $\lg \tau$ | 9.22132 |

Die Fundamentalgleichung stellt sich demnach wie folgt (die überstrichenen Zahlen sind Logarithmen):

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = -0.01084 + \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \left\{ + 0.08766 + \overline{8.2682} \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \right\}$$
$$+ \overline{9.96963} \left\{ 1 + \frac{1}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \left( -0.002205 + \overline{7.8151} \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \right) \right\} \varrho_{\prime}$$

Ich löse nun die Gleichungen auf und mache die Vorversuche mit den zwei Werthen 0.5 und 1.0, und setze vorläufig $\mu = 1$. Mit Rücksicht auf die in den Vorversuchen gestatteten Vereinfachungen erhalte ich

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varrho_{\prime}$ | 0.5000 | 1.0000 | $\log \sqrt{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}}$ | 0.1118 | 0.1355 |
| $\varrho_{\prime} - f_{\prime}$ | $-0.0185$ | $+0.4815$ | $\lg s_2$ | 9.1095 | 9.0850 |
| $\lg(\varrho_{\prime} - f_{\prime})$ | $8_n2672$ | 9.6825 | $E + \varrho_{\prime\prime\prime}$ | $-0.2127$ | $+0.2368$ |
| $\operatorname{tg} \theta_{\prime}$ | $8_n3349$ | 9.7502 | $\lg(E + \varrho_{\prime\prime\prime})$ | $9_n3278$ | 9.3743 |
| $\cos \theta_{\prime}$ | 9.9999 | 9.9403 | $\lg D\varrho_{\prime}$ | 8.2444 | 8.5454 |
| $\lg r_{\prime}$ | 9.9324 | 9.9920 | $\lg II$ | $7_n5722$ | 7.9197 |
| $\lg 2r_{\prime}$ | 0.2334 | 0.2930 | $\varrho_{\prime\prime\prime} - \varrho_{\prime}$ | $-0.0163$ | $-0.0668$ |
| $\lg 8r_{\prime}^3$ | 0.7002 | 0.8790 | $\varrho_{\prime\prime\prime} - \varrho_{\prime} + C$ | $+0.0629$ | $+0.0124$ |
| $\lg II$ | 8.2426 | 8.0638 | $\lg(\varrho_{\prime\prime\prime} - \varrho_{\prime} + C)$ | 8.7987 | 8.0934 |
| $II$ | $+0.0175$ | $+0.0116$ | $\lg(\varrho_{\prime\prime\prime} - \varrho_{\prime})$ | $8_n2122$ | $8_n8248$ |
| $I + II$ | $+0.0067$ | $+0.0008$ | $\lg III$ | $7_n0109$ | $6_n9182$ |
| $\lg III$ | 9.6686 | 9.9696 | $II$ | $-0.00373$ | $+0.00831$ |
| $III$ | $+0.4662$ | $+0.9324$ | $III$ | $-0.00103$ | $-0.00083$ |
| $\varrho_{\prime\prime\prime}$ | $+0.4837$ | $+0.9332$ | $II + III$ | $-0.00476$ | $+0.00748$ |
| $\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime}$ | $-0.0983$ | $+0.3512$ | $s_1^2$ | $+0.00217$ | $+0.01441$ |
| $\lg(\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime})$ | $8_n9926$ | 9.5455 | $\lg s_1^2$ | 7.3365 | 8.1587 |
| $\operatorname{tg} \theta_{\prime\prime\prime}$ | $9_n0831$ | 9.6360 | $\lg s_1$ | 8.6682 | 9.0793 |
| $\cos \theta_{\prime\prime\prime}$ | 9.9968 | 9.9627 | $s_1$ | $+0.0466$ | $+0.1200$ |
| $\lg r_{\prime\prime\prime}$ | 9.9127 | 9.9468 | $s_2$ | $+0.1287$ | $+0.1218$ |
| $\lg Add$ | 0.2913 | 0.2790 | $\Delta$ | $-821$ | $-18$ |
| $\lg(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})$ | 0.2237 | 0.2710 | | | |

Aus den Vorversuchen erschliesse ich sofort, dass der wahre Werth von $\varrho_{\prime}$ bei 1.01 liegt. Der Werth $(r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime})$ lässt sich mit hinlänglicher Sicherheit berechnen. Ich nehme für den ersten Versuch

$$\lg \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} = 8_n720 \qquad \lg \frac{1}{(r_{\prime\prime\prime} + r_{\prime})^3} = 9.1843$$

und finde durch eine leichte Nebenrechnung sofort

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = + 0.00241 + \overline{9.96946}\, \varrho_{\prime}$$

Nach Beendigung des ersten Versuches fand sich wieder, indem die Glieder dritter Ordnung ungeändert gelassen wurden

$$\lg (r_, + r_{,,,})^{-3} = \overline{9.1809}$$
$$\varrho_{,,,} = + 0.00231 + \overline{9.96946}\,\varrho_,$$

für den dritten und vierten Versuch ergab sich

$$\lg (r_, + r_{,,,})^{-3} = \overline{9.1813}$$
$$\varrho_{,,,} = + 0.00232 + \overline{9.96946}\,\varrho_,$$

Es ist ersichtlich, dass die Interpolation so lange keine scharfen Resultate liefert, so lange noch in den Werthen von *m* und *M* Aenderungen vorgenommen werden, und erst wenn diese völlig genau ermittelt sind, kann die lineare Interpolation mit Sicherheit stattfinden. Ich habe zur Ermittlung der nothwendigen Aenderungen stets die Werthe benutzt, die mir die vorausgehenden Versuche ergaben. Der im ersten Versuch ermittelte Werth von $\mu$ konnte für alle Versuche ungeändert beibehalten werden. Die Rechnung stellte sich bei den Versuchen wie folgt:

| Versuch | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| $\varrho_,$ | 1.0100 | 1.00844 | 1.00900 | 1.00881 |
| $\log \varrho_,$ | 0.00432 | 0.00365 | 0.00389 | 0.00381 |
| $\log \Pi$ | 9.97378 | 9.97311 | 9.97335 | 9.97327 |
| $\Pi$ | + 0.94142 | + 0.93996 | + 0.94048 | + 0.94030 |
| $\varrho_{,,,}$ | + 0.94383 | + 0.94227 | + 0.94280 | + 0.94262 |
| $\varrho_, - f_,$ | + 0.49150 | + 0.48994 | + 0.49050 | + 0.49031 |
| $\varrho_{,,,} - f_{,,,}$ | + 0.36178 | + 0.36022 | + 0.36075 | + 0.36057 |
| $\lg (\varrho_, - f_,)$ | 9.69152 | 9.69015 | 9.69064 | 9.69047 |
| $\lg (\varrho_{,,,} - f_{,,,})$ | 9.55845 | 9.55656 | 9.55721 | 9.55699 |
| $\operatorname{tg} \theta_,$ | 9.75923 | 9.75786 | 9.75835 | 9.75818 |
| $\operatorname{tg} \theta_{,,,}$ | 9.64890 | 9.64701 | 9.64766 | 9.64744 |
| $\cos \theta_,$ | 9.93808 | 9.93842 | 9.93830 | 9.93834 |
| $\cos \theta_{,,,}$ | 9.96067 | 9.96099 | 9.96088 | 9.96092 |
| $\log r_,$ | 9.99421 | 9.99387 | 9.99399 | 9.99395 |
| $\log r_{,,,}$ | 9.94888 | 9.94856 | 9.94867 | 9.94863 |
| $\log Add$ | 0.27896 | 0.27897 | 0.27896 | 0.27896 |
| $\lg (r_, + r_{,,,})$ | 0.27317 | 0.27284 | 0.27295 | 0.27291 |
| $\frac{1}{2} \lg (r_, + r_{,,,})$ | 0.13658 | 0.13642 | 0.13647 | 0.13645 |
| $\log \mu \tau$ | 9.22140 | 9.22140 | 9.22140 | 9.22140 |
| $\lg s_2$ | 9.08482 | 0.08498 | 9.08493 | 9.08495 |
| $E + \varrho_{,,,}$ | + 0.24745 | + 0.24589 | + 0.24642 | + 0.24624 |
| $\log (E + \varrho_{,,,})$ | 9.39349 | 9.39074 | 9.39168 | 9.39136 |
| $\log D \varrho_,$ | 8.54975 | 8.54908 | 8.54932 | 8.54924 |
| $\lg \Pi$ | 7.94324 | 7.93982 | 7.94100 | 7.94060 |
| $\varrho_{,,,} - \varrho_,$ | − 0.06617 | − 0.06617 | − 0.06620 | − 0.06619 |
| $\varrho_{,,,} - \varrho_, + C$ | + 0.01304 | + 0.01304 | + 0.01301 | + 0.01302 |
| $\log (\varrho_{,,,} - \varrho_, + C)$ | 8.11528 | 8.11528 | 8.11428 | 8.11461 |

| Versuch | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| $\log (\varrho_{,,,} - \varrho_{,})$ | $8_n82066$ | $8_n82066$ | $8_n82086$ | $8_n82079$ |
| $\log III$ | $6_n93594$ | $6_n93594$ | $6_n93514$ | $6_n93540$ |
| $II$ | + 0.008775 | + 0.008706 | + 0.008730 | + 0.008722 |
| $III$ | — 863 | — 863 | — 861 | — 862 |
| $II + III$ | + 0.007912 | + 0.007843 | + 0.007869 | + 0.007860 |
| $s_1^2$ | + 0.014840 | + 0.014771 | + 0.014797 | + 0.014788 |
| $\lg s_1^2$ | 8.17143 | 8.16941 | 8.17017 | 8.16991 |
| $\lg s_1$ | 9.08571 | 9.08470 | 9.08508 | 9.08495 |
| $\varDelta$ | + 89 | — 28 | + 15 | 0 |

Es ist demnach

$$\log \varrho_{,} = 0.00381$$
$$\log \varrho_{,,,} = 9.97434$$

Vergleicht man diese Logarithmen mit denjenigen, welche nach **Olbers'** Methode (pag. 133) erhalten wurden, so zeigen sich die folgenden Differenzen in Einheiten der letzten Decimale

$$d\log \varrho_{,} = + 38$$
$$d\log \varrho_{,,,} = + 63$$

Die Unterschiede sind nicht klein, und können entweder in Beobachtungsfehlern oder in einer Abweichung der Bahn von einer Parabel, oder endlich in der verschiedenen Annäherung, mit der die Verhältnisse der Dreiecksflächen in den verschiedenen Methoden ersetzt werden, ihre Erklärung finden; den eben jetzt erhaltenen Werthen wird man den Vorzug einräumen müssen, da dieselben so bestimmt sind, dass die Beobachtungsfehler den möglichst geringen nachtheiligen Einfluss ausüben; es ist wol immerhin möglich, dass zufällig die Beobachtungsfehler sich nach **Olbers'** Methode mehr eliminiren, als nach dem eben vorgetragenen Verfahren, doch diess ist eine Zufälligkeit, auf die man nicht rechnen darf, und es muss im Allgemeinen den letzten Werthen der Vorzug gegeben werden. Die später mit diesen Elementen vorgenommene Verbesserung bestätigt in der That die überwiegende Genauigkeit der nach der zweiten Methode erlangten Werthe. Es findet sich $\log \varrho_{,} = 0.00358$.

Es kann nun an die Bestimmung der Elemente geschritten werden, da eine Verbesserung der Verhältnisse der Dreiecksflächen nicht vorgenommen zu werden braucht, da diese bei den Verhältnissen, wie sie die Kometen meist bieten, selbst bei 10tägigem Zeitintervalle hinreichend genau durch die Zwischenzeiten dargestellt sind. Wollte man diese Verbesserungen aus irgend welchen Gründen vornehmen, so ist nur die Kenntniss von $r_{,,}$ erforderlich, um alles mit der hinreichenden Schärfe zu ermitteln, da, wie auf pag. 102, 104 gezeigt wurde, aus den begrenzenden Radienvektoren und der Zwischenzeit das Verhältniss: Sector zum Dreieck, in einer Parabel bestimmt werden kann. Es kann aber $r_{,,}$ streng nach den Grundsätzen der bisherigen Lösung des Problems ohne Kenntniss der Elemente bestimmt werden. Quadrirt man die Gleichungen (3) in §. 1 (pag. 96) und addirt, so wird zunächst

$$r_{,,}^2 = (n r_{,})^2 + (n'' r_{,,,})^2 + 2 n n'' (x_{,} x_{,,,} + y_{,} y_{,,,} + z_{,} z_{,,,})$$

wenn ich den Winkel zwischen dem ersten und dritten Radiusvector mit: $(u_{,,,} - u_{,})$ bezeichne, so wird sofort

$$r_{,,}^2 = (nr_{,})^2 + (n''r_{,,,})^2 + 2\,(nr_{,})\,(n''r_{,,,}) \cos\,(u_{,,,} - u_{,})$$

$\cos\,(u_{,,,} - u_{,})$ kann aber durch die jetzt bekannte Sehne $s$ und $r_{,}$ und $r_{,,,}$ berechnet werden, denn es ist

$$2\,r_{,}r_{,,,} \cos\,(u_{,,,} - u_{,}) = r_{,}^2 + r_{,,,}^2 - s^2$$

also

$$r_{,,}^2 = (n + n'')\,(n r_{,}^2 + n'' r_{,,,}^2) - nn''s^2$$

Die Berechnung von $n$ und $n''$ geschieht leicht nach den vorhandenen Grössen, denn es ist

$$\frac{1}{n''} = \frac{[r_{,}\,r_{,,,}]}{[r_{,}\,r_{,,}]} \qquad \frac{1}{n} = \frac{[r_{,}\,r_{,,,}]}{[r_{,,}\,r_{,,,}]} = \frac{\frac{[r_{,}\,r_{,,,}]}{[r_{,}\,r_{,,}]}}{\frac{[r_{,,}\,r_{,,,}]}{[r_{,}\,r_{,,}]}}$$

wobei die Verhältnisse: $\frac{[r_{,}\,r_{,,,}]}{[r_{,}\,r_{,,}]}$ und $\frac{[r_{,,}\,r_{,,,}]}{[r_{,}\,r_{,,}]}$ nach den Formeln 9 des §. 6 (pag. 110) berechnet werden können, was um so leichter geschieht, wenn man bedenkt, dass die in denselben enthaltenen Koefficienten in den bislang ausgeführten Rechnungen enthalten sind. Man wird selten oder nie Veranlassung haben, von diesen Formeln Gebrauch zu machen, da man zweckmässig auf eine andere Weise verfährt, wenn man eine grössere Genauigkeit erlangen will, welches Verfahren ich später auseinandersetzen werde.

## §. 10. Bestimmung der Elemente aus $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$.

Um möglichst unabhängig zu sein von allen bisherigen Rechnungen, wird es zweckmässig sein, aus $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ und aus den der Rechnung zu Grunde gelegten Kometen- und Sonnenorten die Elemente abzuleiten; es werden sich so im Verlaufe der Rechnung Proben ergeben, die über die Richtigkeit der anderweitigen Rechnungen keinen Zweifel übrig lassen. Ich habe die Formeln so gestellt, wie sich dieselben bei der Anwendung von Additions- und Subtractionslogarithmen bequem gestalten, und habe demnach die Einführung von Hilfswinkeln durchaus vermieden.

Zuerst leite ich die heliocentrischen Coordinaten des Kometen ab, die mit $r$, $l$ und $b$ bezeichnet sein sollen; es wird sich zunächst ergeben

$$\varrho \cos \lambda \cos \beta - R \cos L = r \cos b \cos l$$
$$\varrho \sin \lambda \cos \beta - R \sin L = r \cos b \sin l$$
$$\varrho \sin \beta = r \sin b$$

Zählt man nun für die Transformation des ersten Ortes die Längen vom Punkte $L_{,}$, für den dritten Ort von $L_{,,,}$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,}) \cos\beta_{,} - R_{,} &= r_{,} \cos b_{,} \cos(l_{,} - L_{,})\\
\varrho_{,} \sin(\lambda_{,} - L_{,}) \cos\beta_{,} &= r_{,} \cos b_{,} \sin(l_{,} - L_{,})\\
\varrho_{,} \sin\beta_{,} &= r_{,} \sin b_{,}\\
\varrho_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \cos\beta_{,,,} - R_{,,,} &= r_{,,,} \cos b_{,,,} \cos(l_{,,,} - L_{,,,})\\
\varrho_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \cos\beta_{,,,} &= r_{,,,} \cos b_{,,,} \sin(l_{,,,} - L_{,,,})\\
\varrho_{,,,} \sin\beta_{,,,} &= r_{,,,} \sin b_{,,,}
\end{aligned}\right\} I$$

Man wird $r_,$ und $r_{,,,}$ identisch mit den früher anderweitig gefundenen Werthen finden müssen; diese Probe ist aber nicht durchgreifend, indem sie nur die Richtigkeit der Hilfsgrössen prüft, durch die $r_,$ und $r_{,,,}$ als Funktionen von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ dargestellt wurden; sind die Winkel $b_,$, $b_{,,,}$, $(l_, - L_,)$ und $(l_{,,,} - L_{,,,})$ sehr klein oder nahe an $\pm 90^\circ$, so wird die Uebereinstimmung der Werthe von $r_,$ und $r_{,,,}$ auch nicht als eine verlässliche Prüfung für die eben ausgeführten Rechnungen gelten können. Es mag hier bemerkt werden, dass man nicht nöthig hat, die Winkel $b_,$ und $b_{,,,}$ aufzuschlagen, für die weiteren Rechnungen genügt die Kenntniss der ohnediess ermittelten Grössen $\operatorname{tg} b_,$ und $\operatorname{tg} b_{,,,}$. Man bestimmt also $r_,$, $r_{,,,}$, $l_,$, $l_{,,,}$, $\operatorname{tg} b_,$ und $\operatorname{tg} b_{,,,}$. Die Ansicht der Grössen $l$ ergibt sofort, ob die Neigung grösser oder kleiner als $90^\circ$ ist. Es ist

tg $i$ positiv wenn $(l_{,,,} - l_,)$ positiv ist
tg $i$ negativ ,, ,, negativ ,,

Mit Rücksicht auf das eben erwähnte kann sofort an die Bestimmung des Knotens und der Neigung geschritten werden. Legt man durch die beiden heliocentrischen Orte einen grössten Kreis und bezeichnet die Länge des Einschnittes dieses grössten Kreises in die Fundamentalebene mit dem Zeichen des aufsteigenden Knotens (☊) und zwar den Einschnitt, wo dieser Kreis in die Richtung der Bewegung des Kometen von der südlichen in die nördliche Hemisphäre tritt, und nennt den Winkel, den dieser grösste Kreis am aufsteigenden Knoten mit der Ekliptik bildet [ersterer in der Richtung der Kometenbewegung, letztere in der Richtung der Zodiakuszeichen] die Neigung ($i$) vergl. pag. 7, so ergibt sich leicht aus der Betrachtung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

$$\operatorname{tg} b_, = \operatorname{tg} i \sin (l_, - \Omega)$$
$$\operatorname{tg} b_{,,,} = \operatorname{tg} i \sin (l_{,,,} - \Omega)$$

Schreibt man nun statt: $(l_{,,,} - \Omega)$ den Werth: $(l_{,,,} - l_,) + (l_, - \Omega)$ so erhält man leicht

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin (l_, - \Omega) &= \operatorname{tg} b_, \\ \operatorname{tg} i \cos (l_, - \Omega) &= \frac{\operatorname{tg} b_{,,,} - \operatorname{tg} b_, \cos (l_{,,,} - l_,)}{\sin (l_{,,,} - l_,)} \end{aligned}\right\} \quad II$$

Ueber den Quadranten, in denen die zu bestimmenden Winkel zu nehmen sind, kann kein Zweifel obwalten, da das Zeichen von $\operatorname{tg} i$ durch das Zeichen der Differenz: $(l_{,,,} - l_,)$ bestimmt ist.

Nachdem ☊ und $i$ ermittelt ist, kann an die Berechnung der Abstände der Kometen vom Knoten (Argument der Breite) geschritten werden; diese Abstände, die ich mit $u_,$ und $u_{,,,}$ bezeichne, sind die Hypothenusen der früher betrachteten rechtwinkligen Dreiecke. Man hat demnach

$$\cos (l_, - \Omega) \cos b_, = \cos u_, \qquad \cos (l_{,,,} - \Omega) \cos b_{,,,} = \cos u_{,,,}$$
$$\frac{\sin (l_, - \Omega) \cos b_,}{\cos i} = \sin u_, \qquad \frac{\sin (l_{,,,} - \Omega) \cos b_{,,,}}{\cos i} = \sin u_{,,,}$$
$$\frac{\sin b_,}{\sin i} = \sin u_, \qquad \frac{\sin b_{,,,}}{\sin i} = \sin u_{,,,}$$

$\sin u$ wird, je nachdem $\operatorname{tg} i \lesseqgtr \pm 1$ ist, nach der zweiten oder dritten Form bestimmt In der Anwendung selbst wird man demnach setzen

$$\left.\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\operatorname{tg} i < \pm 1} \\ \operatorname{tg} u_{,} = \dfrac{\operatorname{tg}(l_{,} - \Omega)}{\cos i} & \operatorname{tg} u_{,,,} = \dfrac{\operatorname{tg}(l_{,,,} - \Omega)}{\cos i} \\ \multicolumn{2}{c}{\operatorname{tg} i > \pm 1} \\ \operatorname{tg} u_{,} = \dfrac{\operatorname{tg} b_{,}}{\cos(l_{,} - \Omega)\sin i} & \operatorname{tg} u_{,,,} = \dfrac{\operatorname{tg} b_{,,,}}{\cos(l_{,,,} - \Omega)\sin i} \end{array}\right\} III$$

der Quadrant in dem $u$ zu nehmen ist, wird leicht bestimmt, indem einerseits dem Zeichen der Tangente genügt werden muss und andererseits nach dem Obigen $\sin b$ mit $\sin u$ gleich bezeichnet ist.

Die Differenz der wahren Anomalien wird aber auch gleich sein: $u_{,,,} - u_{,}$. Hier findet eine gute Prüfung statt. Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma = \tfrac{1}{2}(r_{,} + r_{,,,} + s) \\ \text{so ist} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,}) = \sqrt{\dfrac{(\Sigma - r_{,})(\Sigma - r_{,,,})}{\Sigma(\Sigma - s)}} \end{array}\right\} IV$$

oder da $(u_{,,,} - u_{,})$ bei ersten Bahnbestimmungen nur sehr mässig sein kann, so wird es auch ausreichen diesen Winkel zu berechnen nach

$$\sin \tfrac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,}) = \sqrt{\frac{(\Sigma - r_{,})(\Sigma - r_{,,,})}{r_{,} r_{,,,}}}$$

Die hierbei anzuwendenden Werthe von $r_{,}$, $r_{,,,}$ und $s$ werden der Auflösung der Euler'schen Gleichung entnommen und die so gefundene Differenz der wahren Anomalien muss innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung mit der nach *III* gefundenen Differenz der Argumente der Breite stimmen. Kleine Differenzen, die innerhalb der eben erwähnten Grenzen liegen, können auf $u_{,}$ und $u_{,,,}$ gleichmässig vertheilt werden. Diese Probe prüft die Vorbereitungsrechnungen für $r_{,}$, $r_{,,,}$ und $s$.

Aus der Differenz der Anomalien und den Radienvektoren können die wahren Anomalien und der Perihelabstand gefunden werden. Es ist bekanntlich

$$\frac{\cos \frac{1}{2} v_{,}}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_{,}}}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} v_{,,,}}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_{,,,}}}$$

Setzt man nun für $\frac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,}) = f$, so wird

$$\tfrac{1}{2} v_{,,,} = f + \tfrac{1}{2} v_{,}$$

demnach findet man aus der zweiten Gleichung

$$\frac{\sin \frac{1}{2} v_{,}}{\sqrt{q}} = \left(\frac{\cos f}{\sqrt{r_{,}}} - \frac{1}{\sqrt{r_{,,,}}}\right) \operatorname{cosec} f$$

und es wird daher für die weitere Rechnung sein

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{q}} \cos \tfrac{1}{2} v_{,} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{,}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{q}} \sin \tfrac{1}{2} v_{,} = \dfrac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,})}{\sqrt{r_{,}}} - \dfrac{\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,})}{\sqrt{r_{,,,}}} \end{array}\right\} V$$

wodurch $v_{,}$ und $q$ bestimmt sind. Es ist aber auch

$$v_{,,,} = v_{,} + (u_{,,,} - u_{,})$$

und bezeichnet man mit $\omega$ den Abstand des Perihels vom Knoten und mit $\pi$ die Länge des Perihels, so wird sofort

$$\left.\begin{array}{l}\omega = u_{,} - v_{,} = u_{,,,} - v_{,,,} \\ \pi = \omega + \Omega\end{array}\right\} VI$$

Jetzt ist nur noch die Zeit des Perihels zu bestimmen. Bei der Entwicklung der Gesetze der parabolischen Bewegung (pag. 51) wurde der Gebrauch der in diesem Werke aufgenommenen Barker'schen Tafel (Tafel *V*) gezeigt. Entlehnt man nun mit den Argumenten $v_{,}$ und $v_{,,,}$ aus dieser Tafel die Werthe von $M$ (oder $\log M$), welche Werthe das Zeichen der wahren Anomalien haben, so wird die Perihelzeit erhalten nach

$$T = T_{,} - M_{,} q^{\frac{3}{2}} \qquad T = T_{,,,} - M_{,,,} q^{\frac{3}{2}} \quad \} \; VII$$

Die Uebereinstimmung der Werthe für $T$ prüft die Richtigkeit der Auflösung der Euler'schen Gleichung. Hiermit ist die Rechnung der Elemente abgeschlossen. Gewöhnlich prüft man zweckmässig die Richtigkeit der angewandten Beobachtungen damit, dass man aus den Elementen die Darstellung der mittleren Beobachtung sucht. Man rechnet zunächst $v_{,,}$ für die Zeit der zweiten Beobachtung mit Hilfe der Barker'schen Tafel, und dann

$$r_{,,} = q \sec^2 \tfrac{1}{2} v_{,,}$$
$$u_{,,} = v_{,,} + \omega$$

so wird (pag. 21)

$$\varrho_{,,} \cos \beta_{,,} \cos (\lambda_{,,} - \Omega) = r_{,,} \cos u_{,,} + R_{,,} \cos (L_{,,} - \Omega)$$
$$\varrho_{,,} \cos \beta_{,,} \sin (\lambda_{,,} - \Omega) = r_{,,} \sin u_{,,} \cos i + R_{,,} \sin (L_{,,} - \Omega)$$
$$\varrho_{,,} \sin \beta_{,,} = r_{,,} \sin u_{,,} \sin i$$

wobei die Uebereinstimmung der berechneten Werthe mit den beobachteten genügend befunden werden muss. Ist die Rechnung richtig geführt und sind die Zwischenzeiten nicht zu gross, so dass die Ersetzung der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten hinreichend verlässlich ist, so muss der berechnete Ort in dem gewählten grössten Kreise liegen, der als Bedingung für die mittlere Beobachtung eingeführt ist. Der Zweck einer solchen ersten Bahnbestimmung ist in der Regel die rasche Beischaffung einer Ephemeride, um leicht den Kometen weiter verfolgen zu können. Die Anleitung aus den Elementen die Ephemeride abzuleiten, findet sich auf pag. 17, 19 und 20.

Häufig ist es auch von Interesse, zu sehen, ob die ermittelten Elemente des Kometen mit bisher berechneten eine Aehnlichkeit zeigen, um in günstigen Fällen rasch einen sicheren Schluss auf die Umlaufszeit zu erhalten; ich habe zu diesem Ende als Tafel *XI* ein Verzeichniss der bisher berechneten Kometenelemente angelegt, angeordnet nach der Neigung der Bahn (dieses Element ist das konstanteste), und hierbei eine mir von Dr. Edmund Weiss freundlichst zur Disposition gestellte Zusammenstellung benutzt, in der alle Elemente auf das mittl. Aeq. 1850 bezogen erscheinen. Für den vorliegenden Zweck war es ausreichend, die Angaben der Elemente nur ganz beiläufig mitzutheilen. Die ersten sechs Kolumnen der Tafel *XI* bedürfen kaum einer Erklärung, nur die letzte mit *No.* überschriebene Kolumne muss erläutert werden. Die Nummern beziehen sich nämlich auf das bekannte Verzeichniss von Prof. J. G. Galle. Die in Klammern ( ) angesetzten Nummern finden sich nicht mehr in diesem Kataloge vor und würden gleichsam der fortgesetzten Reihe der Kometenelemente entsprechen.

Ich nehme nun zur Erläuterung das oben angefangene Beispiel wieder vor und wähle zur Bestimmung der Elemente die Werthe

$$\log \varrho_{,} = 0.00381$$
$$\log \varrho_{,,,} = 9.97434$$

Ich finde nun nach Formel *I*

$$l_{,} = 59^\circ 39' 50'' \qquad l_{,,,} = 58^\circ 48' 1''$$
$$\text{tg}\, b_{,} = 9.90936 \qquad \text{tg}\, b_{,,,} = 9.97653$$
$$\text{lg}\, r_{,} = 9.99395 \qquad \text{lg}\, r_{,,,} = 9.94864$$

Die Probe, dass lg$r_{,}$ und lg$r_{,,,}$ so gefunden werden muss, wie diess in den bisherigen Rechnungen geschah, stimmt völlig; da die Längen des Kometen abnehmen, so ist tg$i$ negativ und die Neigung zwischen 90° und 180° eingeschlossen. Weiter wird nach *II*

$$\Omega = 64^\circ 48' 33'' \qquad i = 96^\circ 18' 19''$$

und nach *III* wurde ermittelt

$$u_{,} = 39^\circ 20' 52'' \qquad u_{,,,} = 43^\circ 47' 2''$$

Die unter *IV* angesetzte Probe lässt finden

$$\tfrac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,}) = 2^\circ 13' 3''$$

Die Fehler, die sich jetzt zeigen und völlig innerhalb der Grenzen der Unsicherheit einer fünfstelligen logarithmischen Rechnung liegen, wurden gleichmässig auf die Argumente der Breite vertheilt und angenommen

$$u_{,} = 39^\circ 20' 54'' \qquad u_{,,,} = 43^\circ 47' 0''$$

Nach *V* erhält man

$$\log q = 9.52152 \qquad v_{,} = 54^\circ 30' 58''$$

damit berechnet sich die Länge des Perihels nach *VI*

$$\pi = 213^\circ 11' 23''$$

Die Perihelzeit wurde sowol aus $v_{,}$, als aus $v_{,,,}$ abgeleitet und nach *VII* gefunden

aus $v_{,}$ Nov. 7.0472

„ $v_{,,,}$ „ 7.0473

welche Uebereinstimmung grösser ist, als es erwartet werden kann. Die Elemente sind demnach zusammengestellt

$T =$ 1867 Nov. 7.04725 Berlin. Zeit.

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 213^\circ 11' 23'' \\ \Omega &= 64^\circ 48' 33'' \\ i &= 96^\circ 18' 19'' \end{aligned}\right\} \text{wahres Aeq. Octob. 4.}$$

$$\log q = 9.52152$$

Rechnet man nun die Darstellung der mittleren Beobachtung nach den oben angesetzten Formeln, so findet sich

$$d\lambda_{,,} \cos \beta_{,,} = +\, 8''$$
$$d\beta_{,,} = -\, 16''$$

was so genau, als es erwartet werden darf, mit dem angenommenen grössten Kreise stimmt.

Die Berechnung der Elemente habe ich nicht so ausführlich angesetzt, wie die ersten Theile der Rechnung, nämlich wie die Ermittlung der Grössen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$. Ich habe diesen ersten Theil der Rechnung hauptsächlich desshalb in extenso mitgetheilt,

damit man ersehen kann, welche Arbeit eine jede Methode verursacht. Setzt man die Beobachtungsdaten für die Rechnung vorbereitet voraus, so hat man nach **Olbers'** Methode 80 Zeilen zu berechnen, nach meiner Methode 147, so dass die entstandene Mehrarbeit noch nicht doppelt so gross ist. Man sieht demnach, dass in Rücksicht auf die durch meine Methode erlangte grössere Genauigkeit dieselbe praktisch mit Vortheil in den meisten Fällen anwendbar ist; doch erwähne ich nochmals ausdrücklich, dass ich die Anwendung derselben nur auf jene Fälle beschränken möchte, wo **Olbers'** Annahme nicht mit Vortheil brauchbar sich erweist. Das Kriterium hiefür ist oben angegeben und kann nach Ermessen auf andere Grenzen ausgedehnt werden; in dem erwähnten letzteren Falle ist meine Methode kürzer und sicherer, als die bislang bekannten Verfahrungsarten.

## §. 11. Erste Verbesserung der gefundenen Kometenelemente.

Wenn man nach den in §. 9 auseinandergesetzten Methoden die Elemente eines Kometen ermittelt hat, so kann sich aus dreifachen Gründen eine Differenz zwischen dem mittleren beobachteten und berechneten Kometenorte herausstellen. Der erste Grund ist darin zu suchen, dass die näherungsweisen Voraussetzungen über das Verhältniss der Dreiecksflächen nicht hinlänglich genau waren. Von diesem Nachtheile kann man sich durch Vervielfältigung der Hypothesen, etwa in der Form, wie sie am Schlusse des §. 9 (pag. 141) vorgeschlagen wurde, frei machen. Ein weiterer Grund ist das Vorhandensein einer Abweichung der Bahn von der Parabel; dieser Umstand muss vorläufig ausser Acht gelassen werden, indem die Bestimmung parabolischer Elemente vorgesetzt ist. Endlich der dritte Grund sind die Beobachtungsfehler. Da den äussersten Beobachtungen völlig streng genug gethan wird, so vereinigen sich die Fehler dieser Beobachtungen mit denen der mittleren, um eine nicht weiter wegzuschaffende Differenz hervorzubringen. Wie man sieht, sind die zwei zuletzt angeführten Gründe in ihrem Erfolge identisch, und man wird aus kleinen übrigbleibenden Fehlern nicht entscheiden können, welche Ursache wirksam ist, oder ob beide vorhanden sind. Man wird desshalb am zweckmässigsten für die erste Verbesserung eine solche Parabel wählen, die den äussersten Beobachtungen völlig genug thut und die mittlere Beobachtung, an deren Stelle übrigens auch mehre treten können, möglichst genau darstellt. Der letzteren Anforderung kann nur nach der Lösung des Problems genügt werden, und man kann keine Wahl des grössten Kreises treffen vor Eruirung der Elemente, welche diese Bedingung erfüllen würde; ich habe durch das oben auseinandergesetzte zweite Verfahren ein Hilfsmittel angegeben, wodurch die möglichst grösste Sicherheit erlangt wird. Da aber über die Richtung, in der durch die Beobachtung gefehlt wurde, nichts bekannt ist, so werden die oben erwähnten Vorschriften durchschnittlich die besten Resultate liefern, im speciellen Falle jedoch kann das Gegentheil eintreten. Es hat desshalb auch keinen hohen Werth mit einer gegebenen Wahl des grössten Kreises, die Verhältnisse der Dreiecksflächen möglichst scharf zu finden, da zwar

hiermit der erste Grund der Abweichung weggeschafft wird, die beiden andern Ursachen aber, die oft viel nachtheiliger wirken, keine genügende Berücksichtigung finden. Hiermit findet die Bemerkung, die am Schlusse des §. 9 (pag. 141) gemacht wurde, ihre Erledigung und gibt zugleich eine Andeutung, wie zweckmässig weiter vorgegangen werden kann.

Fünf Angaben sind nöthig, um die parabolischen Elemente zu bestimmen; durch die zwei äussersten Beobachtungen, denen völllig genügt werden soll, sind vier Bedingungen gegeben, und es ist desshalb nur noch eine unabhängige Relation in das Problem einzuführen. Es kann hierbei beachtet werden, dass, wenn bei Bahnverbesserungen weit entfernte Beobachtungen benutzt werden, es nicht nöthig ist, den äussersten völlig scharf zu genügen, sondern man kann zwei beliebige Beobachtungen hierzu wählen, man muss nur bei der Auswahl berücksichtigen, dass diese Beobachtungen nicht zu nahe liegen oder auch nicht einen heliocentrischen Bogen von nahe 180° umschliessen.

Die fünfte Bedingung kann nun sehr verschieden gewählt werden; mir scheint es am Zweckmässigsten zu sein und in fast allen Fällen sicher zum Ziele zu führen, wenn man als fünfte Bedingung das Verhältniss der Distanzen ($M_0$) hierfür annimmt. Es ist

$$M_0 = \frac{\varrho_{\prime\prime\prime}}{\varrho_\prime}$$

Die vorhandenen Elemente werden diese Grösse mit ziemlicher Annäherung finden lassen, worüber das weiter unten Folgende die nöthige Anweisung enthält. Man führt zuerst die Rechnung mit dem gefundenen Werthe von $M$ durch, ändert nachher den Werth von $M_0$ etwas ab in $M_1$ und führt mit diesem abgeänderten Werthe abermals die Rechnung durch. Man hat so zwei Elementensysteme sich verschafft, welche die zwei äussersten Beobachtungen völlig darstellen, während der dritten, oder wenn man mehre Beobachtungen wählt, den übrigen mehr minder gut genügt wird. Die Rechnung selbst aber gibt empirisch den Differentialquotienten zwischen der Aenderung des Ortes und der Grösse $M_0$. Nenne ich die Fehler (Beobachtung — Rechnung), welche das erste Elementen-System in Länge (reducirt auf den grössten Kreis) in der mittleren Beobachtung übrig lässt: $d\lambda_{\prime\prime} \cos \beta_{\prime\prime}$ und in der Breite $d\beta_{\prime\prime}$, die Fehler des zweiten Systems $\Delta\lambda_{\prime\prime} \cos \beta_{\prime\prime}$ und $\Delta\beta_{\prime\prime}$, so würden, wenn beiden Koordinaten genügt werden könnte und mit $x$ die Aenderung des Werthes von $M$ bezeichnet werden soll, der hierfür nöthig ist (in Einheiten der Differenz $[M_1 - M_0]$), die Bedingungsgleichungen sein

$$d\lambda_{\prime\prime} \cos \beta_{\prime\prime} = (d\lambda_{\prime\prime} - \Delta\lambda_{\prime\prime}) \cos \beta_{\prime\prime}\, x$$

$$d\beta_{\prime\prime} = (d\beta_{\prime\prime} - \Delta\beta_{\prime\prime})\, x$$

Im Allgemeinen wird beiden Bedingungen nicht genügt werden können; als wahrscheinlichsten Werth von $x$ findet sich nach der Methode der kleinsten Quadrate der Werth

$$x = \frac{d\lambda_{\prime\prime}\,(d\lambda_{\prime\prime} - \Delta\lambda_{\prime\prime}) \cos \beta_{\prime\prime}^2 + d\beta_{\prime\prime}\,(d\beta_{\prime\prime} - \Delta\beta_{\prime\prime})}{(d\lambda_{\prime\prime} - \Delta\lambda_{\prime\prime})^2 \cos \beta_{\prime\prime}^2 + (d\beta_{\prime\prime} - \Delta\beta_{\prime\prime})^2} \qquad (A)$$

und der wahrscheinlichste Werth von $M$ wird sein:

$$M = M_0 + (M_1 - M_0)\, x.$$

Ist der Werth von $x$ bestimmt, so wird man die wahrscheinlichsten Elemente wol am zweckmässigsten durch lineare Interpolation zwischen den beiden gefundenen Systemen erhalten, wenn die Aenderungen nicht zu gross sind. Es sei ein Element durch die erste Annahme über $M$ ($M_0$) gefunden worden $E_0$, in der zweiten Annahme $E_1$, dann wird der definitive Werth ($E$) sein

$$E = E_0 + (E_1 - E_0)\, x.$$

Sind die erforderlichen Aenderungen zu gross, so dass man mit Recht befürchten muss, dass die lineare Interpolation zwischen den Elementen ein zu ungenaues Resultat liefern würde, so wird es am zweckmässigsten sein, auf die oben angezeigte Weise den wahrscheinlichsten Werth von $M$ zu interpoliren und aus diesem $M$ neue Elemente zu berechnen, die sich gewiss den Beobachtungen schon sehr gut anschliessen werden; sollte diess nicht der Fall sein, so werden die vorhandenen Versuche völlig ausreichend sein, um einen sicheren Schluss auf die noch nöthigen Aenderungen zu ziehen; diese Nothwendigkeit wird aber sehr selten eintreten und man wird sich meist mit dem einmal interpolirten Werth von $M$ begnügen können. Das unten angegebene Verfahren zur Ermittlung von $M_0$ wird sogar meist so genau sein, dass, wenn nicht die äusserste Genauigkeit (Darstellung der Beobachtung nach der Methode der kleinsten Quadrate) gefordert wird, fast immer mit der ersten Hypothese eine ausreichende Annäherung erlangt wird und kein zweiter Versuch mit geändertem $M$ durchgeführt werden muss. Schlägt man den auch empfohlenen Weg der Variation einer Distanz ein, so wird, wenn nicht sehr genaue Elemente zufällig vorliegen, stets eine zweite Hypothese nöthig sein.

Es fragt sich nun, wie kann zweckmässig aus genäherten Elementen $M_0$ mit Sicherheit ermittelt werden? Mit Hilfe der genähert bekannten Distanzen wird man vorerst die Beobachtungen von der Parallaxe (pag. 32) befreien und hierauf die so erhaltenen geocentrischen scheinbaren Rectascensionen und Deklinationen mit der scheinbaren Schiefe in scheinbare Längen und Breiten (pag. 14) verwandeln. Dadurch, dass man von der Beobachtungszeit die Aberrationszeit abzieht, wird die Reduction für die Fixstern- und Planetenaberration ausgeführt und die Beobachtungen sind daher auf das wahre Aequinoctium reducirt, welche Coordinaten man durch Subtraction der Präcession (pag. 84) und Nutation auf ein bestimmtes fixes Aequinoctium (am besten auf den Jahresanfang) überführt. Wählt man das Aequinoctium des Jahresanfanges, so wird man zweckmässiger die geocentrischen Aequatorcoordinaten des Kometen mit Hilfe der Konstanten ($f$, $g$, $G$) die sich in den Ephemeriden finden, für Präcession und Nutation (pag. 89) korrigiren und diese mit Hilfe der mittleren Schiefe in Länge und Breite verwandeln. Die Sonnenorte entlehnt man mit den für Aberration verbesserten Zeiten aus den Ephemeriden und reducirt diese auf dasselbe Aequinoctium. Die Sonnenbreite kann fortgelassen werden oder kann auf höchst einfache Weise nach der bei der Parallaxe im Anhange (pag. 38) mitgetheilten Methode fortgeschafft werden.

Sind die Angaben der Beobachtungen so vorbereitet, so wird man an die Ermittlung des Verhältnisses der Distanzen schreiten können. Die Wahl des grössten Kreises, der durch die mittlere Beobachtung hindurchgelegt ist, wird nicht von wesent-

lichem Einflusse sein; doch um ganz sicher zu gehen, wird man vielleicht denselben durch die Bewegung des Kometen wie früher bestimmen können und setzen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} J \sin(\lambda_{\prime\prime} - \Pi) &= \operatorname{tg} \beta_{\prime\prime} \\ \operatorname{tg} J \cos(\lambda_{\prime\prime} - \Pi) &= -\frac{\lambda_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime}}{\beta_{\prime\prime\prime} - \beta_{\prime}} \end{aligned}\right\} I$$

und berechnet dann weiter mit grösster Genauigkeit

$$\left.\begin{aligned} \odot_{\prime} &= R_{\prime} \sin(L_{\prime} - \Pi) \\ \odot_{\prime\prime} &= R_{\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime} - \Pi) \\ \odot_{\prime\prime\prime} &= R_{\prime\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime\prime} - \Pi) \\ \mathcal{S}_{\prime} &= \sin\beta_{\prime} \cos J - \sin(\lambda_{\prime} - \Pi) \cos\beta_{\prime} \sin J \\ \mathcal{S}_{\prime\prime\prime} &= \sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - \Pi) \cos\beta_{\prime\prime\prime} \sin J - \sin\beta_{\prime\prime\prime} \cos J \end{aligned}\right\} II$$

Die Fundamentalgleichung zwischen $\varrho_{\prime\prime\prime}$ und $\varrho_{\prime}$ ist aber

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = \frac{\sin J}{\mathcal{S}_{\prime\prime\prime}} \left\{ \frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} \odot_{\prime} - \frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} \odot_{\prime\prime} + \odot_{\prime\prime\prime} \right\} + \frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} \frac{\mathcal{S}_{\prime}}{\mathcal{S}_{\prime\prime\prime}} \varrho_{\prime} \quad III$$

Um nun die noch unbekannten Verhältnisse der Dreiecksflächen aus den genähert bekannten Elementen zu bestimmen, empfehlen sich zwei Wege. Man berechnet aus den Elementen $r_{\prime}\, r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}$ und $v_{\prime}\, v_{\prime\prime}\, v_{\prime\prime\prime}$ und hat dann

$$\frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} = \frac{r_{\prime\prime\prime} \sin(v_{\prime\prime\prime} - v_{\prime\prime})}{r_{\prime} \sin(v_{\prime\prime} - v_{\prime})} \;;\; \frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} = \frac{r_{\prime\prime\prime} \sin(v_{\prime\prime\prime} - v_{\prime})}{r_{\prime\prime} \sin(v_{\prime\prime} - v_{\prime})} \quad IV$$

in welchen Ausdrücken man bestrebt sein muss, alles mit grösster Genauigkeit zu berechnen, indem sich die absoluten Fehler der Elemente in den Verhältnissen gegenseitig grossen Theils aufheben; wären etwa die Elemente nur vierstellig berechnet, so müssen für diese Form die den Elementen fehlenden Decimalen durch Nullen ergänzt werden; diese Formeln sind daher bei sehr kurzen Zwischenzeiten nicht sehr zu empfehlen, ist aber die heliocentrische Bewegung halbwegs gross, so verdienen dieselben vor den folgenden den Vorzug. Das zweite Verfahren ist von dem eben erwähnten Nachtheile frei, so lange nicht allzu grosse Zwischenzeiten in Anwendung kommen. Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{2}} (T_{\prime\prime} - T_{\prime})\, k &= \theta_{\prime\prime\prime} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} (T_{\prime\prime\prime} - T_{\prime})\, k &= \theta_{\prime\prime} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} (T_{\prime\prime\prime} - T_{\prime\prime})\, k &= \theta_{\prime} \end{aligned}\right\} (a)$$

wobei ist

$$\log \frac{3}{\sqrt{2}} k = 8.5621877$$

so wird zunächst

$$\frac{\theta_{\prime}}{\theta_{\prime\prime\prime}} = \frac{Sect_{\prime}}{Sect_{\prime\prime\prime}} \qquad \frac{\theta_{\prime\prime}}{\theta_{\prime\prime\prime}} = \frac{Sect_{\prime\prime}}{Sect_{\prime\prime\prime}}$$

oder auch

$$\left.\frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} = \frac{\theta_{\prime}}{\theta_{\prime\prime\prime}} \frac{\dfrac{Sect_{\prime\prime\prime}}{\Delta_{\prime\prime\prime}}}{\dfrac{Sect_{\prime}}{\Delta_{\prime}}} \qquad \frac{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\, r_{\prime\prime}]} = \frac{\theta_{\prime\prime}}{\theta_{\prime\prime\prime}} \frac{\dfrac{Sect_{\prime\prime\prime}}{\Delta_{\prime\prime\prime}}}{\dfrac{Sect_{\prime\prime}}{\Delta_{\prime\prime}}} \right\} (b)$$

Das Verhältniss: $\frac{Sect}{\Delta}$ kann hinlänglich genau berechnet werden mit Näherungs-

werthen der die Dreiecke begrenzenden Radienvectoren, so lange nicht die Zwischenzeiten zu gross sind; man hat hiefür nach pag. 102, 104

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta^0 &= \frac{\theta}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} \\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sin\tfrac{1}{2}\theta^0\sqrt{2} \\ \frac{Sect}{\triangle} &= \frac{1+2\sec\gamma}{3} \end{aligned}\right\}\ (c)$$

Die Berechnung der Verhältnisse der Dreiecksflächen für die Fundamentalgleichung ist demnach auf die Berechnung der Formeln $(a)$, $(c)$ und $(b)$ reducirt; man hat nur zu beachten, dass die Rechnung nach $(c)$ für die drei verschiedenen Kombinationen der Orte ausgeführt werden muss. Bei den Verhältnissen, wie dieselben durch die Kometen meist dargeboten werden, wird in der Regel die erstere Methode den Vorzug verdienen.

Sind auf die eine der eben vorgeschlagenen Weisen die Verhältnisse der Dreiecksflächen bekannt, so gibt die Substitution derselben in $III$ sofort die Form

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = m + M\varrho_{\prime}$$

wobei jetzt $m$ und $M$ völlig bekannte Grössen sind. $m$ ist nothwendig klein und man wird desshalb hinreichend sicher mit einem genäherten Werthe von $\varrho_{\prime}$ berechnen:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \frac{m}{\varrho_{\prime}} + M \\ \varrho_{\prime\prime\prime} &= M_0\varrho_{\prime} \end{aligned}\right\}\ V$$

Von hier ab wird die Rechnung mit diesem $M_0$ und dem abgeänderten Werth $M_1$ ganz nach den Formeln durchgeführt, die bei Olbers' Methode ihre Anwendung fanden.

Viel bequemer wird die gesammte Rechnung, wenn $\Pi = L_{\prime\prime}$ angenommen wird; man wird selten dadurch an Sicherheit verlieren. Die Formeln können in diesem Falle so gestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} J &= \frac{\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime}}{\sin(\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime})} \\ \odot_{\prime} &= R_{\prime}\sin(L_{\prime}-L_{\prime\prime}) \\ \odot_{\prime\prime\prime} &= R_{\prime\prime\prime}\sin(L_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime}) \\ \mathfrak{F}_{\prime} &= \sin\beta_{\prime}\cos J - \sin(\lambda_{\prime}-L_{\prime\prime})\cos\beta_{\prime}\sin J \\ \mathfrak{F}_{\prime\prime\prime} &= \sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime})\cos\beta_{\prime\prime\prime}\sin J - \sin\beta_{\prime\prime\prime}\cos J \end{aligned}\right\}\ (I)$$

Es ist dann nach den genäherten Elementen:

$$\frac{[r_{\prime\prime}\,r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\,r_{\prime\prime}]} = \frac{r_{\prime\prime\prime}\sin(v_{\prime\prime\prime}-v_{\prime\prime})}{r_{\prime}\sin(v_{\prime\prime}-v_{\prime})}\ \Big\}\ (II)$$

und schliesslich

$$M_0 = \frac{\sin J}{\varrho_{\prime}\mathfrak{F}_{\prime\prime\prime}}\left\{\frac{[r_{\prime\prime}\,r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\,r_{\prime\prime}]}\odot_{\prime} + \odot_{\prime\prime\prime}\right\} + \frac{[r_{\prime\prime}\,r_{\prime\prime\prime}]}{[r_{\prime}\,r_{\prime\prime}]}\frac{\mathfrak{F}_{\prime}}{\mathfrak{F}_{\prime\prime\prime}}\ \Big\}\ (III)$$

Wären die anfänglich gewählten Elemente sehr ungenau, so dass der Fehler in $M_0$ noch beträchtlich wäre, so wird man für $M_1$ mit Vortheil die eben vorgeschlagenen Formeln nochmals benützen; hätte man z. B. das zuletzt vorgeschlagene Rechnungsschema benutzt, so wird in den Formeln $(I)$ gar nichts zu ändern sein, $(II)$ wird leicht berechnet werden konnen, da durch die Berechnung des mittleren geocentrischen

Ortes $v_{\prime\prime}$ ohnediess schon ermittelt ist und so die Feststellung des Werthes $M_1$ fast gar keine Mühe macht. Es wird sich aber meist der Werth von $M_0$ schon genügend erweisen, wenn nur die Elemente halbwegs genau waren und der heliocentrische Bogen nicht zu gross ist.

Ich will vorstehende Vorschriften durch ein Beispiel erläutern. Ich wähle die folgenden Beobachtungen des Kometen *III.* 1867, von denen ich die naheliegenden Beobachtungen zu einem Normalorte vereinige.

| | | | Ort | Ortszeit | beob. *A. R.* | | beob. *Decl.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1867 | Octob. | 1 | Bonn | $10^h\ 1^m\ 14^s$ | $10^h\ 37^m\ 5^s89$ | + | $50°\ 17'\ 43''1$ |
| | » | 1 | Josefstadt | 11 24 37 | 10 37 30.56 | + | 50 16 48.6 |
| | » | 14 | » | 6 40 35 | 13 12 50.99 | + | 36 13 37.9 |
| | » | 27 | Athen | 6 37 38 | 14 46 21.94 | + | 10 53 44.6 |
| | » | 27 | Josefstadt | 6 14 16 | 14 46 22.67 | + | 10 53 4.8 |
| | » | 27 | Leipzig | 6 33 14 | 14 46 28.82 | + | 10 50 15.8 |
| | » | 27 | » | 6 41 32 | 14 46 31.43 | + | 10 49 28.5 |

Vorerst müssen die Beobachtungen von der Parallaxe befreit werden; diess geschieht nach den Formeln auf pag. (32), welche schon die Korrektionen mit dem Zeichen angeben, mit dem dieselben an die beobachteten Orte anzubringen sind. Die Distanzen für die drei Zeiten habe ich angenommen:

Oct. 1 $\log \varrho_{\prime} = 0.0038$
» 14 $\log \varrho_{\prime\prime} = 9.9553$
» 27 $\log \varrho_{\prime\prime\prime} = 0.0170$

Verwandelt man überall die Ortszeit in Berliner Zeit, so findet sich darnach:

| | | | Berliner Zeit | geoc. $\alpha$ | geoc. $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1867 | Octob. | 1 | $10^h\ 26^m\ 25^s$ | $10^h\ 37^m\ 5^s88$ | $+\ 50°\ 17'\ 51''8$ |
| | » | 1 | 11 12 47 | 10 37 30.33 | + 50 16 57.0 |
| | » | 14 | 6 28 45 | 13 12 51.51 | + 36 13 44.7 |
| | » | 27 | 5 56 17 | 14 46 22.39 | + 10 53 49.8 |
| | » | 27 | 6 2 26 | 14 46 23.06 | + 10 53 11.0 |
| | » | 27 | 6 37 15 | 14 46 29.18 | + 10 50 22.3 |
| | » | 27 | 6 45 33 | 14 46 31.79 | + 10 49 35.1 |

Das Mittel der Zeiten nebst deren Reduktion für Aberration findet sich

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Octob. | 1 | $10^h\ 49^m\ 36^s - 8^m\ 22^s$ | = | Oct. | 1.44530 |
| 2. | » | 14 | 6 28 45 − 7 29 | = | » | 14.26477 |
| 3. | » | 27 | 6 20 23 − 8 38 | = | » | 27.25816 |

und dazu die geocentrischen Positionen nebst den Hilfsgrössen zur Reduktion auf den Jahresanfang (Berliner Jahrbuch):

| | $\alpha$ | $\delta$ | $f$ | $g$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $159°\ 19'\ 31''5$ | $+\ 50°\ 17'\ 24''4$ | $+\ 29''41$ | $+\ 15''30$ | $33°\ 11'$ |
| 2. | 198 12 52.6 | + 36 13 44.7 | + 30.40 | + 15.71 | 32 35 |
| 3. | 221 36 39.1 | + 10 51 44.5 | + 31.56 | + 16.21 | 32 5 |

Daraus finden sich die Reduktionen vom mittlern Aequinoctium des Jahresanfanges auf das wahre des Beobachtungsdatums, die offenbar mit umgekehrten Zeichen an die Orte angebracht werden müssen (vgl. pag. 89)

| | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ |
|---|---|---|
| 1 | + 25″4 | — 14″9 |
| 2 | + 21.5 | — 9.9 |
| 3 | + 28.6 | — 4.8 |

Nach dem Berliner Jahrbuch, welches die Sonnenorte nach Hansen's Tafeln gibt, finden sich die wahren Längen, Breiten, Entfernungen der Sonne und die Nutation für die wegen Aberration verbesserten Zeiten

| | wahre Länge | Breite | log $R$ | Nut. |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 188° 14′ 15″9 | + 0″43 | 0.000 211 | — 5″57 |
| 2. | 200 54 16.4 | — 0.63 | 9.998 588 | — 6.26 |
| 3. | 213 50 22.6 | + 0.29 | 9.997 051 | — 6.79 |

und die mittlere Schiefe der Ekliptik nach Hansen für 1867.0

$$\varepsilon = 23° \; 27' \; 23'' 5 .$$

Der astronomische Jahresanfang für 1867 ist nach pag. 74

1867 Januar 0.358 Berliner Zeit.

Demnach die seit dieser Epoche verflossenen Zeiten

| | |
|---|---|
| 1. | 274.09 Tage |
| 2. | 286.91 » |
| 3. | 299.90 » |

Damit kann die Präcession (pag. 84) in Länge und Breite für die Sonne berechnet werden, und vereinigt man mit ersterer die Nutation, so erhält man die folgenden Korrectionen der wahren Sonnenorte

| | $\Delta L$ | $\Delta\beta$ |
|---|---|---|
| 1. | — 32″1 | + 0″09 |
| 2. | — 33.2 | + 0.17 |
| 3. | — 34.5 | + 0.26 |

Setzt man nun mit der mittleren Schiefe die auf den Jahresanfang reducirten Kometenorte um in Länge und Breite, so erhält man:

| | Länge | Breite | $\Delta\beta$ |
|---|---|---|---|
| 1. | 139° 20′ 51″9 | + 38° 1′ 15″3 | — 0″4 |
| 2. | 179 41 51.3 | + 39 58 54.0 | + 0.4 |
| 3. | 215 27 57.3 | + 25 37 24.4 | — 0.5 |

Die Breiten werden kleiner Korrektionen bedürfen, wenn man die Sonnenbreiten nach den Formeln auf pag. 38 wegschafft; ich habe dieselben in der Kolumne $\Delta\beta$ angesetzt. Man erhält also als Grundlage für die folgende Rechnung die Werthe:

| | 1867 Octob. | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | log $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1.44530 | 139° 20′ 51″9 | + 38° 1′ 14″9 | 188° 13′ 43″8 | 0.000211 |
| 2. | 14.26477 | 179 41 51.3 | + 39 38 54.4 | 200 53 43.2 | 9 998588 |
| 3. | 27.25816 | 215 27 57.3 | + 25 37 23.9 | 213 49 48.1 | 9.997051 |

Die Rechnung habe ich dem Zwecke entsprechend durchaus sechstellig geführt. Anfängern dürfte es jedoch anzurathen sein, in ähnlichen Fällen die grössere Mühe nicht zu scheuen und die Rechnung siebenstellig durchzuführen.

Ich habe die Rechnung von $M_0$ nach der ersteren Vorschrift vorgenommen. Ich fand nach $I$

$$\Pi = 171^\circ\ 55'\ 15''4 \qquad J = 80^\circ\ 50'\ 1''1$$

Die Formeln $II$ gaben mir

$$\log \odot_{,} = 9.448606 \qquad \log ♂_{,} = 9.713349$$
$$\log \odot_{,,} = 9.683809 \qquad \log ♂_{,,,} = 9.735877$$
$$\log \odot_{,,,} = 9.821795$$

Aus ($a$) fand sich

$$\lg \theta_{,,,} = 9.670058 \qquad \log \theta_{,,} = 9.974024$$
$$\log \theta_{,} = 9.675910$$

Nun berechnete ich nach den genäherten Elementen, die früher gefunden wurden (pag. 145), für die Zeiten der Beobachtungen:

$$\lg r_{,} = 9.99414 \qquad \lg r_{,,} = 9.85932 \qquad \lg r_{,,,} = 9.65876$$

Daraus nach ($c$)

$$\log \frac{\text{Sect}_{,,,}}{\varDelta_{,,,}} = 0.005784$$
$$\log \frac{\text{Sect}_{,,}}{\varDelta_{,,}} = 0.046556$$
$$\log \frac{\text{Sect}_{,}}{\varDelta_{,}} = 0.019240$$

und damit nach ($b$)

$$\log \frac{[r_{,,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]} = 9.992396 \qquad \log \frac{[r_{,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]} = 0.263194$$

Setzt man diese Werthe mit den früher bestimmten Coefficienten in die Gleichung III ein, so findet sich zunächst:

$$\varrho_{,,,} = +\ 0.098600 + 0.932970\ \varrho_{,}$$

und daraus erhielt ich mit $\log \varrho_{,} = 0.0038$ nach $V$:

$$\log M_0 = 0.013139$$

mit welchem Werthe von $M$ der erste Versuch durchgeführt wurde. Die Werthe für die Verhältnisse der Dreiecksflächen können bequemer nach $IV$ bestimmt werden; es findet sich unter der Annahme, dass ist:

$$\log q = 9.521520$$

bei genauer sechsstelliger Rechnung:

$$\lg r_{,} = 9.994145 \qquad v_{,} = -\ 109^\circ\ 3'\ 0''5$$
$$\lg r_{,,} = 9.859318 \qquad v_{,,} = -\ 94\ 39\ 22.3$$
$$\lg r_{,,,} = 9.658756 \qquad v_{,,,} = -\ 62\ 44\ 2.3$$

und daraus sehr nahe wie früher:

$$\log \frac{[r_{,,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]} = 9.992397 \qquad \log \frac{[r_{,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,}]} = 0.263194$$

Die Durchführung der Berechnung mit $M_0$ ergab kein sehr befriedigendes Resultat für die Darstellung der mittleren Beobachtung; es wurden nun die neu ermittelten Elemente zur Bestimmung von $M_1$ verwendet und nach $IV$ sofort gefunden

$$\log M_1 = 0.013310$$

Ich werde nun die Resultate der Rechnung beider Hypothesen anführen. Beiden gemeinschaftlich wurde gefunden:

$$G = 291^\circ\, 56'\, 48''0 \qquad \lg B_1 = 9.932349$$
$$\log g = 9.645\,208 \qquad \log B_{,,,} \cos\psi_{,,,} = 9.951915$$
$$f_1 = +0.518\,319 \qquad \log R_{,,,} \sin\psi_{,,,} = 9.633757$$

(Formel $II$ des §. 9. (pag. 122))

$\sin\psi_{,,,}$ und in der Folge $\sin\varphi$ wurden nicht aus $\cos\psi_{,,,}$ und $\cos\varphi$, sondern direkt bestimmt, indem die erstere Bestimmung zu unsicher erschien. Die Auflösung der Gleichungen durch Versuche ging sehr rasch von Statten, da $\varrho_,$ schon genähert bekannt war und der zweite Versuch, der mit Rücksicht auf die Formel ($d$) des §. 9 (pag. 127) abgeleitet wurde, ergab schon den richtigen Werth. Es fand sich:

| | Hyp. I. | Hyp. II. | |
|---|---|---|---|
| $f_{,,,}$ | $+0.8685 12$ | $+0.868170$ | Formel $II$ und $III$ des §. 9. (pag. 122, 123) |
| $\log B_{,,,}$ | 9.620618 | 9.620447 | |
| $H$ | $261^\circ\, 23'\, 45''6$ | $261^\circ\, 22'\, 54''4$ | |
| $\operatorname{tg}\zeta$ | $9_n 203878$ | $9_n 203325$ | |
| $\lg h$ | 0.032597 | 0.032688 | |
| $\gamma$ | $+0.348515$ | $+0.348402$ | |
| $\log A$ | 9.333741 | 9.333781 | |
| $\log \sin\varphi$ | 9.366338 | 9.366469 | |
| $\lg\tau$ | 9.948447 | 9.848447 | Auflösung der Euler'schen Gleichung. |
| $\lg\varrho_,$ | 0.003857 | 0.003749 | |
| $\lg\varrho_{,,,}$ | 0.016996 | 0.017059 | |
| $\lg r_,$ | 9.994058 | 9.994003 | |
| $\lg r_{,,,}$ | 9.657028 | 9.657075 | |
| $s$ | 0.748872 | 0.748898 | |
| $T$ | Nov. 7.00250 | 6.99971 | Elemente. |
| $\pi$ | $213^\circ\, 40'\, 21''1$ | $213^\circ\, 36'\, 29''5$ | |
| $\Omega$ | $65^\circ\, 0'\, 36''8$ | $64^\circ\, 59'\, 7''2$ | |
| $i$ | $96^\circ\, 34'\, 50''5$ | $64^\circ\, 34'\, 10''0$ | |
| $\log q$ | 9.518740 | 9.519028 | |

$$d\lambda \cos\beta_{,,} = +29''9 \qquad \Delta\lambda \cos\beta_{,,} = +5''7$$
$$d\beta_{,,} = +6''3 \qquad \Delta\beta_{,,} = +10''4$$

(Darstellung des mittleren Ortes)

Man findet nun als den Werth von $x$ nach der Formel $A$ (pag. 47):

$$x = \frac{29.9\,(29.9 - 5.7) + 6.3\,(6.3 - 10.4)}{(24.2)^2 + (4.1)^3} = 1.158.$$

Demzufolge bleiben die Fehler zurück im zweiten Orte

$$d\lambda \cos\beta = + 1''9 \qquad d\beta = + 11''0$$

Der Fehler in Breite ist ziemlich gross, doch kann man die Beobachtung noch als hinlänglich gut dargestellt betrachten. Die Elemente wurden nun durch Interpolation erhalten, aber die Korrektionen für das zweite System ermittelt, da dieses der Wahrheit näher war; und zwar nach dem Schema:

$$dE_1 = (E_1 - E_0)\ 0.158$$

und gefunden:

☄ III 1867

$T$ = Nov. 6.99927 mittl. Berliner Zeit

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 213^\circ\ 35'\ 52''9 \\ \Omega &= 64\ \ 58\ \ 53.0 \\ i &= 96\ \ 34\ \ \ 3.6 \end{aligned}\right\} \text{ mittleres Aequinoct. } 1867{,}0$$

$$\log q = 9.519073$$

Als letzte und strengste Prüfung der gesammten vorausgehenden Rechnungen wird man die Darstellung der drei Orte aus diesen Elementen rechnen. Ich finde:

| | $d\lambda \cos\beta$ | $d\beta$ |
|---|---|---|
| 1 | 0''0 | + 1''5 |
| 2 | + 1''9 | + 11''1 |
| 3 | − 0''2 | + 0''7 |

Die Uebereinstimmung zwischen der direkten Rechnung und der Interpolation ist für eine sechsstellige Rechnung vollkommen genügend.

Die definitiven Bahnbestimmungen eines Kometen und die Vorschriften, welche zu befolgen sind, wenn der Komet eine merkbar von der Parabel verschiedene Bahn beschreibt, müssen hier, wo es sich nur um erste Bahnbestimmungen handelt, übergangen werden.

## Anhang.

*Bestimmung der Bahn eines Sternschnuppenschwarmes aus seinem Radiationspunkte.*

Bei der Beobachtung von Sternschnuppen hat sich die merkwürdige Thatsache gezeigt, dass viele derselben aus ein und derselben Himmelsgegend herzukommen scheinen; je reicher ein solcher Sternschnuppenfall ist, um so markirter tritt dieses sehr auffallende Phänomen hervor. Die neuen Epoche machenden Entdeckungen von Schiaparelli machen es wünschenswerth die Bahn eines Sternschnuppenschwarmes zu bestimmen. Es kann als erwiesen betrachtet werden, dass die Sternschnuppen kleine Körper extrasolaren Ursprunges sind, die in Schwärmen zur Sonne herabsteigen. Ob diese Schwärme durch Aggregation die Kometen (Schiaparelli) bilden oder ob diese Auflösungsprodukte des Kometen (E. Weiss) seien, ist für die vorliegenden Untersuchungen ohne Bedeutung. Gelangt nun ein solcher Schwarm oder Bruchtheile

desselben in unsere Athmosphäre und damit auch in die Attractionssphäre der Erde, so erscheinen diese Körperchen als Sternschnuppen. Da sich diese im Raume der Hauptsache nach parallel mit einander fortbewegen, so scheint es als ob diese Meteore von einem Punkte (Radiationspunkte) ausstrahlen würden, wenn der Beobachter sich auf der Erdoberfläche befindet. Die Lage des Radiationspunktes, dessen Länge ich mit $l$ und dessen Breite ich mit $b$ bezeichne, ist offenbar bedingt durch die relative Bewegung des Schwarmes gegen den Beobachter. Nenne ich die drei den Coordinatenachsen parallelen Komponenten dieser Bewegung $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$, die Aenderung der heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes $dX$, $dY$ und $dZ$, und endlich die Aenderung der heliocentrischen Coordinaten der Meteoriten $dx$, $dy$ und $dz$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} dx &= d\xi + dX \\ dy &= d\eta + dY \\ dz &= d\zeta + dZ \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Der Ort der Sternschnuppe im Moment der Sichtbarkeit kann als identisch mit dem Erdorte angesehen werden; wären $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$ völlig bekannt, so wäre der Ort und die Geschwindigkeit des Meteoriten sofort gegeben und man könnte unmittelbar die Bahnelemente berechnen. Nenne ich die relative Geschwindigkeit des Meteoritenschwarmes $g$ so ist:

$$\begin{aligned} d\xi &= -\, g \cos l \cos b \\ d\eta &= -\, g \sin l \cos b \\ d\zeta &= -\, g \sin b \end{aligned}$$

wo das negative Zeichen seine Erklärung darin findet, dass die Sehlinie der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Die Grössen $dX$, $dY$ und $dZ$ sind völlig bekannt; das Problem ist aber dennoch noch unbestimmt, da für $g$ jeder beliebige Werth supponirt werden kann. Es ist aber wol gestattet anzunehmen, mit Rücksicht auf den extrasolaren Ursprung, dass die Bahn des Meteoritenschwarmes eine Parabel sei; denn sie würde es mindestens sehr nahe sein, wenn keine störenden Einwirkungen stattfinden würden. Sind die Störungen so bedeutend, dass der parabolische Charakter der Bahn verloren geht, dann ist, wie diess die Untersuchungen von E. Weiss zuerst dargethan haben, der Schwarm so zerstreut worden, dass an das Vorhandensein eines gemeinsamen Radiationspunktes nicht gedacht werden kann; die Beobachtung einer sporadischen Sternschnuppe wird selten genug den Radiationspunkt erkennen lassen, indem nur eine scheinbar unbewegte oder sehr schwach bewegte Sternschnuppe zu diesem Zwecke verwerthet werden kann. Man kann demnach mit Berechtigung die parabolische Hypothese gelten lassen und selbst in den Fällen, wo grosse Parthien des Schwarmes bedeutendere Störungen erlitten haben, werden dieselben nicht immer so bedeutend sein, um den parabolischen Charakter der Bahn gänzlich zu verwischen. Man wird überhaupt bei der Lösung des Problems nicht nöthig haben allseitig die grösste Genauigkeit zu erreichen, da die Grundlagen der Rechnung nur sehr rohen Beobachtungen entnommen werden können.

Die Aenderungen der Coordinaten des Beobachters sind aus zwei wesentlich verschiedenen Bewegungen zusammengesetzt, nämlich der jährlichen und täglichen

Bewegung. Letztere ist selbst im ungünstigsten Falle nahe 60 mal kleiner als die erstere, kann demnach übergangen werden bei so beiläufigen Rechnungen. Es wird sich daher empfehlen die Ekliptik als Fundamentalebene zu wählen und demnach zu setzen

$$dZ = 0$$

für $dX$ und $dY$ treten dieselben Ausdrücke auf, die ich bei der Ermittlung der Formeln zur Berechnung der Fixsternaberration angewendet habe (pag. 67). Mit der dort gewählten Bezeichnung ($\varepsilon = 0$) wird:

$$dX = \frac{a}{\cos\varphi}\{\sin\odot + \sin\varphi\sin\pi\}\,dM$$

$$dY = -\frac{a}{\cos\varphi}\{\cos\odot + \sin\varphi\cos\pi\}\,dM$$

Man kann aber hierfür setzen mit hinreichender Genauigkeit, wenn man die ersten Potenzen von $\sin\varphi$ berücksichtigt und die Erdmasse im Verhältniss zur Sonne gleich der Null annimmt:

$$dX = (\sin\odot + \sin\varphi\sin\pi)\,k$$
$$dY = -(\cos\odot + \sin\varphi\cos\pi)\,k$$

wobei jetzt $k$ die bekannte Konstante des Sonnensystems ist. Da aber die tägliche Bewegung des Beobachtungsortes weggelassen wurde, so könnte man völlig konsequent auch die ersten Potenzen der Erdbahnexcentricität als gleicher Ordnung übergehen, da aber die Mitnahme derselben nicht viel Mühe macht und überdiess oft der Einfluss der täglichen Bewegung sehr klein ist, so dürfte es zweckmässig sein mindestens die ersten Potenzen von $\sin\varphi$ zu berücksichtigen. Setzt man nun um für die Geschwindigkeiten ein gemeinsames Mass zu haben $k$ als Einheit fest, so wird man haben:

$$\left.\begin{aligned} dX &= \sin\odot + \sin\varphi\sin\pi = s\sin\odot' \\ -dY &= \cos\odot + \sin\varphi\cos\pi = s\cos\odot' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Quadrirt und addirt man, so wird

$$s^2 = 1 + 2\sin\varphi\cos(\odot - \pi) + e^2$$

oder wieder nur mit Rücksicht auf die ersten Potenzen von $e$

$$s = 1 + \sin\varphi\cos(\odot - \pi)$$

Es ist aber

$$R = \frac{\cos\varphi^2}{1 + \sin\varphi\cos(\odot - \pi)}$$

woraus folgt, mit Vernachlässigung von $e^2$

$$s = \frac{1}{R} \qquad (3)$$

Multiplicirt man die erste Gleichung in (2) mit $\cos\odot$, die zweite mit $-\sin\odot$ und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (3)

$$\sin(\odot' - \odot) = R\sin\varphi\sin(\pi - \odot)$$

oder wieder innerhalb der gestellten Grenzen

$$\odot' - \odot = \sin\varphi\sin(\pi - \odot) \qquad (4)$$

Es ist nach Le Verrier

$$\pi = 280^{\circ}\, 21'3 + 1'028\,(t - 1850)$$
$$\log \sin \varphi = 8.2246$$

Für die relative Geschwindigkeit $g$ führe ich vorläufig eine neue Grösse $f$ ein, welche bestimmt ist durch

$$g = \frac{f}{R} k \qquad (5)$$

wobei aber $k$ wieder wie oben der Einheit gleich gesetzt werden kann. Es lassen sich nun die Gleichungen (1) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} R\,dx &= -f \cos l \cos b + \sin \odot' \\ R\,dy &= -f \sin l \cos b - \cos \odot' \\ R\,dz &= -f \sin b \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die heliocentrische Geschwindigkeit des Meteoriten ist durch die Annahme der Parabel völlig bestimmt, da die Entfernung bekannt ist, indem dieselbe identisch mit $R$ angenommen werden kann. Diese Geschwindigkeit ist nach pag. 44 bestimmt durch

$$g = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

oder auf den hierher gehörigen Fall übertragen, wenn man berücksichtigt, dass im vorliegenden Falle $g$ eine andere Bedeutung hat

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{2k^2}{R}$$

Für $dx$, $dy$ und $dz$ setze ich nun die Werthe aus (6) ein, und man erhält, da $k^2 = 1$ ist:

$$2R = f^2 + 2f \cos b \sin (l - \odot') + 1$$

Um diese quadratische Gleichung bequem auflösen zu können setze ich

$$f = h\sqrt{2R - 1}$$

so wird

$$h^2 + 2h \frac{\cos b \sin (l - \odot')}{\sqrt{2R - 1}} - 1 = 0$$

Es ist aber mit Rücksicht auf die ersten Potenzen von $\sin \varphi$

$$\sqrt{2R - 1} = R$$

Es ist demnach

$$g = h$$

und

$$g^2 + 2g \frac{\cos b \sin (l - \odot')}{R} - 1 = 0 \qquad (7)$$

Setzt man nun

$$\frac{\cos b \sin (l - \odot')}{R} = \operatorname{cotg} z \qquad (8)$$

so wird

$$g = \frac{\pm 1 - \cos z}{\sin z}$$

wählt man nun, was man immer in der Gewalt hat, $z$ so dass $\sin z$ positiv ist und

bedenkt dass $g$ eine wesentlich positive Grösse sein muss, so sieht man sofort ein, dass nur das obere Zeichen eine brauchbare Wurzel abgibt und dem zu Folge ist:

$$g = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z \qquad (9)$$

Stellt man demnach die Formeln zusammen, die man nöthig hat zur Berechnung von $g$, so findet sich hierfür, wenn man $(\odot' - \odot)$ sofort in Bogenminuten erhalten will:

$$\left.\begin{aligned}
\odot' - \odot &= \sin\varphi \sin(\pi_0 - \odot) : \sin 1' \\
\pi_0 &= 280^\circ\, 21'3 + 1'028\, (t - 1850) \\
\log(\sin\varphi : \sin 1') &= 1.7609\,, \\
\frac{\cos b \sin(l - \odot)}{R} &= \operatorname{cotg} z \\
z &< 180^\circ \\
g &= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z
\end{aligned}\right\} \; I$$

Um nun aus $g$ die Elemente zu bestimmen und hierbei auch mindestens theilweise Prüfungen der Rechnung zu erhalten, muss ich einige Entwicklungen hier durchführen.

Projicirt man die im Zeitelemente von dem Radiusvector überstrichene Fläche auf die Coordinatenebenen, so ist nach pag. 41, wenn mit $i_{xy}$, $i_{yz}$ und $i_{xz}$ die Winkel zwischen der Bahnebene und den bezüglichen Coordinatenebenen bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}
x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{2q} \cos i_{xy} \\
y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= k \sqrt{2q} \cos i_{yz} \\
x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{2q} \cos i_{xz}
\end{aligned}$$

Es ist aber, wenn ich mit $i$ die Neigung und mit $\Omega$ den aufsteigenden Knoten der Bahnebene bezeichne und alle Längen, um die späteren Formeln zusammenziehen zu können vom Punkte $l$ aus zähle:

$$\begin{aligned}
\cos i_{xy} &= \cos i \\
\cos i_{yz} &= \sin(\Omega - l) \sin i \\
\cos i_{xz} &= \cos(\Omega - l) \sin i
\end{aligned}$$

und damit sofort

$$\begin{aligned}
k \sqrt{2q} \cos i &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \\
k \sqrt{2q} \sin(\Omega - l) \sin i &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \\
k \sqrt{2q} \cos(\Omega - l) \sin i &= x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

Es ist im vorliegenden speciellen Falle $z = 0$, und setzt man überdiess für $dx$, $dy$ und $dz$ die Werthe nach (6) ein mit Rücksicht auf die Zählung vom Punkte $l$ aus, so findet man wieder, wenn man bei den ersten Potenzen von $\sin\varphi$ stehen bleibt und sich erinnert, dass ist:

$$\begin{aligned}
X = x &= -R \cos(\odot - l) \\
Y = y &= -R \sin(\odot - l)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2q}\cos i &= 1 - f\sin(\odot - l)\cos b\\ \sqrt{2q}\sin(\Omega - l)\sin i &= f\sin(\odot - l)\sin b\\ \sqrt{2q}\cos(\Omega - l)\sin i &= f\cos(\odot - l)\sin b\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

es wird hierbei für $\Omega$ der Werth $\odot$ oder $\odot + 180^\circ$ gefunden werden müssen, je nachdem der Schwarm im ab- oder aufsteigenden Knoten war. Zur Berechnung von $v$ werden die Entwicklungen von einigen Differentialformeln nöthig werden. Es folgt aus

$$r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$$

sofort

$$dr = r\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v\,dv$$

Aus der Gleichung

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v^3$$

erhält man leicht wenn man nur $v$ und $t$ als veränderlich annimmt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\cos^4\frac{1}{2}v\sqrt{2}}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{k\sqrt{2q}}{r^2}$$

Es ist demnach

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k\sqrt{2q}}{r}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v$$

oder auch

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \frac{r\frac{dr}{dt}}{k\sqrt{2q}}$$

nun ist

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy$$

und durch Substitution der bekannten Werthe für $x$, $y$ und $dx$ und $dy$ aus (6) wird man erhalten:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \frac{f\cos(\odot - l)\cos b - \sin(\odot' - \odot)}{\sqrt{2q}}\quad(11)$$

wobei als Probe benutzt werden kann

$$q = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}v^2}$$

Ueber den Quadranten in dem $v$ anzunehmen sein wird, kann kein Zweifel sein, da $\frac{1}{2}v$ innerhalb der Grenzen $-90^\circ$ und $+90^\circ$ eingeschlossen ist. Eine Bestimmung der Perihelzeit ist bei einem in die Länge gezogenen Meteoritenbogen ohne Bedeutung.

Die Berechnung der Elemente stellt sich demnach aus dem Vorhergehenden wie folgt zusammen:

$$f = gR$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2q}\cos i &= 1 - f\sin(\odot - l)\cos b\\ \sqrt{2q}\sin(\Omega - l)\sin i &= f\sin(\odot - l)\sin b\\ \sqrt{2q}\cos(\Omega - l)\sin i &= f\cos(\odot - l)\sin b\\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v &= \frac{f\cos(\odot - l)\cos b - \sin(\odot' - \odot)}{\sqrt{2q}}\\ \pi &= \Omega - v\\ q &= r\cos\tfrac{1}{2}v^2\end{aligned}\right\}\quad II.$$

$\sin i$ wird man stets positiv annehmen müssen.

Würde man die Excentricität der Erdbahn vernachlässigen wollen, so werden die Formeln etwas einfacher, ohne dass jedoch bei einer ohnehin so einfachen Rechnung viel gewonnen werden könnte.

Um die Anwendung der Formeln *I* und *II* zu erläutern, nehme ich die Berechnung einer parabolischen Bahn eines Sternschnuppenschwarmes vor und entlehne aus der Abhandlung von Dr. E. Weiss (Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen, Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LVII) den Radiationspunkt No. 3; derselbe ist

$$\text{Juli } 28.5 \quad \alpha = 338^\circ \quad \delta = -28^\circ$$

Ich setze voraus, dass derselbe sich auf das Jahr 1865 bezieht; es ist klar, dass selbst ein Irrthum von vielen Jahren nicht wesentlich das Resultat verunstalten kann, da das Beobachtungsresultat keineswegs auf einen Grad verbürgt werden kann; ich werde die Rechnung genau vierstellig durchführen, wiewol dadurch in der That eine völlig illusorische Genauigkeit erlangt wird. Zunächst erhalte ich durch Verwandlung in Länge und Breite und aus dem Berliner Jahrbuch für 1865

$$l = 329^\circ 5' \quad b = -17^\circ 24' \quad \odot = 125^\circ 48' \quad \lg R = 0.0065$$

Es wird nach *I*. $\quad z = 110^\circ 4'1 \quad \log g = 0.1553$

Nach *II*. $\quad \lg f = 0.1618 \quad \Omega = 305^\circ 47'9 \quad i = 43^\circ 48'0$

$$\log q = 9.2936 \quad v = -127^\circ 46'2 \quad \pi = 73^\circ 34'1$$

Es sind demnach die Elemente zusammengestellt

$$\pi = 73^\circ 6$$
$$\Omega = 305^\circ 8$$
$$i = 43^\circ 8$$
$$\log q = 9.294$$

Die Berücksichtigung der täglichen Bewegung der Erde und der störende Einfluss der Erde selbst, können oft sehr merkbare Korrectionen der erhaltenen Werthe hervorbringen, doch für den ersten Entwurf mögen die hier vorgeschlagenen Näherungen genügen.

## II. Abschnitt. Bestimmung der Bahnelemente ohne Rücksicht auf eine Annahme über die Excentricität.

### 1. Abtheilung.

Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen.

Für die Bahnbestimmung aus drei Orten lassen sich zwei wesentlich verschiedene Methoden angeben; die eine Methode, welche zuerst vorgenommen werden soll, ist dem Wesen nach von Gauss angegeben, die zweite Methode habe ich nach ähnlichen Principien, wie ich dieselben bei dem Kometenprobleme angewendet habe, entwickelt, und meine dass dieselbe vor der ersteren oft den Vorzug verdient.

#### A. *Erste Methode.*

Es wurde bereits früher erwähnt, dass bisweilen drei vollständige Beobachtungen zu einer Bahnbestimmung nicht geeignet sind; diese Fälle treten unter gewissen Bedingungen ein, die bei der Ableitung der Formeln näher erörtert werden sollen. Tritt ein solcher Fall ein, so wird man zweckmässig die Bahnbestimmung aus vier Orten vornehmen, die ich der zweiten Abtheilung dieses Abschnittes einverleibt habe; der vorliegende Abschnitt ist jedoch der Bahnbestimmung aus drei Orten ausschliesslich gewidmet. Ich wähle wieder, wie diess bei der Berechnung parabolischer Elemente geschah, die Ekliptik als Fundamentalebene und betrachte die Sonnenbreiten als beseitigt, so hat man für die Ermittlung der Bahnelemente die folgenden Angaben nöthig:

| | Beobachtungszeit. | Beob.-Länge. | Beob.-Breite. | Sonnenlänge. | Entfg. d. Sonne. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $T_{,}$ | $\lambda_{,}$ | $\beta_{,}$ | $L_{,}$ | $R_{,}$ |
| 2. | $T_{,,}$ | $\lambda_{,,}$ | $\beta_{,,}$ | $L_{,,}$ | $R_{,,}$ |
| 3. | $T_{,,,}$ | $\lambda_{,,,}$ | $\beta_{,,,}$ | $L_{,,,}$ | $R_{,,,}$ |

Es ist klar, dass die der Rechnung zu Grunde gelegten Längen und Breiten auf dasselbe Aequinoctium bezogen sein müssen.

## §. 1. Aufstellung der Fundamentalgleichung.

Bei der Ableitung der parabolischen Elemente wurden die Bedingungsgleichungen, dass die drei Orte des Himmelskörpers mit dem Sonnenmittelpunkte in einer Ebene liegen, gefunden nach Einführung des willkührlichen Winkels $\Pi$ (pag. 97):

$$\left.\begin{aligned} n\{\varrho_{,}\cos(\lambda_{,}-\Pi)\cos\beta_{,}-R_{,}\cos(L_{,}-\Pi)\}+n''\{\varrho_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-\Pi)\cos\beta_{,,,}-R_{,,,}\cos(L_{,,,}-\Pi)\}=&\\ =\varrho_{,,}\cos(\lambda_{,,}-\Pi)\cos\beta_{,,}-R_{,,}\cos(L_{,,}-\Pi)&\\ n\{\varrho_{,}\sin(\lambda_{,}-\Pi)\cos\beta_{,}-R_{,}\sin(L_{,}-\Pi)\}+n''\{\varrho_{,,,}\sin(\lambda_{,,,}-\Pi)\cos\beta_{,,,}-R_{,,,}\sin(L_{,,,}-\Pi)\}=&\\ =\varrho_{,,}\sin(\lambda_{,,}-\Pi)\cos\beta_{,,}-R_{,,}\sin(L_{,,}-\Pi)&\\ n\varrho_{,}\sin\beta_{,}+n''\varrho_{,,,}\sin\beta_{,,,}=\varrho_{,,}\sin\beta_{,,}& \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Setzt man wieder vorläufig $n$ und $n''$ (die Verhältnisse der Dreiecksflächen) als bekannt voraus, so wird jetzt die Bestimmung des Werthes $\varrho_{,,}$ durch eine einfache Elimination möglich sein. Man erreicht diese sofort, wenn man

die erste Gleichung mit: $\operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,,}-\Pi)-\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,}-\Pi)$
» zweite » » $\operatorname{tg}\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,}-\Pi)-\operatorname{tg}\beta_{,}\cos(\lambda_{,,,}-\Pi)$
» dritte » » $-\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$

multiplicirt und die Resultate addirt. Setzt man in der so entstandenen Gleichung der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} K&=\operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})-\operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})+\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,,}-\lambda_{,})\\ A&=R_{,}\{\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,}-L_{,})-\operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,,}-L_{,})\}\\ B&=R_{,,,}\{\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,}-L_{,,,})-\operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,,}-L_{,,,})\}\\ C&=R_{,,}\{\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,}-L_{,,})-\operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,,}-L_{,,})\} \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

so lässt sich diese schreiben

$$K\varrho_{,,}\cos\beta_{,,}=nA+n''B-C \qquad (3)$$

welche Gleichung durch die Bedingung der Ebene eine Bestimmung des Werthes $\varrho_{,,}$ gestattet, sobald $n$ und $n''$ bekannt sind. Diese Gleichung wird aber keineswegs in allen Fällen eine Bestimmung des Werthes $\varrho_{,,}$ gestatten; denn mögen die Koefficienten rechts vom Gleichheitszeichen was immer für Werthe erhalten und sind $n$ und $n''$ selbst in völliger Strenge bekannt, so wird, sobald $K=0$ wird, eine Bestimmung von $\varrho_{,,}$ aus (3) unmöglich und sehr unsicher, wenn $K$ sehr klein wird. Es ist nun zu untersuchen, wann dieser ungünstige Fall eintritt. Aus der Gleichung für $K$ (2) erhält man, wenn $K$ der Null gleich gesetzt wird:

$$\operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})=\operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})+\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,,}-\lambda_{,})$$

Legt man nun durch den ersten und dritten Ort einen grössten Kreis, dessen Knoten durch $J$ und dessen Neigung durch $i$ bezeichnet werden soll, so ist

$$\operatorname{tg}\beta_{,}=\operatorname{tg}i\sin(\lambda_{,}-J)$$
$$\operatorname{tg}\beta_{,,,}=\operatorname{tg}i\sin(\lambda_{,,,}-J)$$

und führt diese Relationen ein, so wird nach einer einfachen Umwandlung

$$\operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})=\operatorname{tg}i\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\sin(\lambda_{,,}-J)$$

Diese Gleichung ergibt aber auch

$$\operatorname{tg}\beta_{\prime\prime} = \operatorname{tg} i \sin(\lambda_{\prime\prime} - J)$$

welches die Bedingung für $K = 0$ ist. Die geometrische Deutung ist sehr leicht, wenn man diese Form mit den früher zur Bestimmung von $i$ und $J$ aufgestellten Ausdrücken vergleicht. Es wird $K = 0$, wenn alle drei beobachteten Orte in einem grössten Kreise liegen, ein Umstand, der bei ersten Bahnbestimmungen von entfernten Himmelskörpern, wie es etwa die kleinen Planeten sind, immer sehr nahe zutreffen wird. Man kann daraus sofort ableiten, dass die Gleichung (3) allein scheinbar kein geeignetes Mittel zur Bestimmung von $\varrho_{\prime\prime}$ darbietet und in den Fällen, wo die drei Beobachtungen in einem grössten Kreise liegen, völlig unbrauchbar wird; doch die Einführung der Relationen für $n$ und $n''$ wird die Grösse $r_{\prime\prime}$ (die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung) in die Gleichung in ganz neuer Form einführen, da aber $r_{\prime\prime}$ eine Funktion von $\varrho_{\prime\prime}$ und den beobachteten Coordinaten ist, so wird durch diese Einführung $\varrho_{\prime\prime}$ in anderer Gestalt und in Verbindung mit anderen Koefficienten in das Problem eingeführt und die eben angedeutete Unsicherheit schwindet mindestens grossen Theils, wenn nicht andere weitere Kombinationen die Lösung des Problems in Frage stellen, was später untersucht werden soll. Man muss es daher als einen Irrthum bezeichnen, der mehrfach ausgesprochen wurde, dass es allein hinreichend sei, eine Bahnbestimmung aus drei Orten unmöglich zu machen, sobald die drei Beobachtungen in einem grössten Kreise liegen. Um zunächst zu einer geeigneten Form der Fundamentalgleichung zu gelangen, wird es nöthig sein, die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch andere Grössen zu ersetzen; in §. 6 der Kometenbahnbestimmung wurde gezeigt, dass diese Umsetzung in voller Strenge bei unbekannten Bahnen nicht möglich ist und es wurde dargethan, wie man diese Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten in den Hauptgliedern darstellen kann; dieser Umstand veranlasst, dass bei ersten Bahnbestimmungen die heliocentrische Bewegung nicht zu gross sein darf, indem sonst die ersten Glieder der angewandten Reihen nicht ausreichend sind. Die daselbst (pag. 110) gefundenen Reihen waren:

$$n'' = \frac{[r_\prime\, r_{\prime\prime}]}{[r_\prime\, r_{\prime\prime\prime}]} = \frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_\prime} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau_\prime(\tau_\prime^2 + \tau_\prime\tau_{\prime\prime\prime} - \tau_{\prime\prime\prime}^2)}{r_{\prime\prime}^4}\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} + \ldots \right\}$$

$$n = \frac{[r_{\prime\prime}\, r_{\prime\prime\prime}]}{[r_\prime\, r_{\prime\prime\prime}]} = \frac{\tau_\prime}{\tau_{\prime\prime}} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_\prime^2}{r_{\prime\prime}^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_{\prime\prime\prime}(\tau_{\prime\prime\prime}^2 + \tau_\prime\tau_{\prime\prime\prime} - \tau_\prime^2)}{r_{\prime\prime}^4}\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau} + \ldots \right\}$$

Setzt man

$$\frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_\prime} = P \qquad \tau_\prime\tau_{\prime\prime\prime} = Q'$$

so wird zunächst, da

$$\tau_{\prime\prime} = \tau_\prime + \tau_{\prime\prime\prime}$$

ist, gesetzt werden dürfen

$$\tau_{\prime\prime} = \tau_\prime(1 + P) \qquad \tau_\prime^2 = \frac{Q'}{P}$$

$$\frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime}} = \frac{P}{1 + P} \qquad \tau_{\prime\prime\prime}^2 = Q'P$$

$$\frac{\tau_\prime}{\tau_{\prime\prime}} = \frac{1}{1 + P} \qquad \tau_{\prime\prime}^2 = \frac{Q'}{P} + 2Q' + PQ'$$

dem zu Folge ist also:

$$\frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}}(\tau_{,,}^2-\tau_{,,,}^2)=\frac{1}{1+P}\left\{3\,Q'P-Q'(P-1)\right\}$$
$$\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}}(\tau_{,,}^2-\tau_{,}^2)=\frac{1}{1+P}\left\{3\,Q'\quad+Q'(P-1)\right\}$$
$$-\frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}}\tau_{,}(\tau_{,}^2+\tau_{,}\tau_{,,,}-\tau_{,,,}^2)=\frac{1}{1+P}\left\{Q'(P^2-1)-Q'P\right\}\tau_{,}$$
$$\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}}\tau_{,,,}(\tau_{,,,}^2+\tau_{,}\tau_{,,,}-\tau_{,}^2)=\frac{1}{1+P}\left\{Q'(P^2-1)+Q'P\right\}\tau_{,}$$

und die obigen Reihen gehen über in

$$n''=\frac{1}{1+P}\left\{P+\frac{Q'P}{2r_{,,}^3}-\frac{Q'(P-1)}{6r_{,,}^3}+\tau_{,}\frac{Q'(P^2-1)}{4r_{,,}^4}\frac{dr_{,,}}{d\tau}-\tau_{,}\frac{Q'P}{4r_{,,}^4}\frac{dr_{,,}}{d\tau}+\dots\right\}$$
$$n=\frac{1}{1+P}\left\{1+\frac{Q'}{2r_{,,}^3}+\frac{Q'(P-1)}{6r_{,,}^3}+\tau_{,}\frac{Q'(P^2-1)}{4r_{,,}^4}\frac{dr_{,,}}{d\tau}+\tau_{,}\frac{Q'P}{4r_{,,}^4}\frac{dr_{,,}}{d\tau}+\dots\right\}$$

welche Werthe für $n''$ und $n$ in (3) zu substituiren wären. Thut man diess und setzt zur Abkürzung

$$Q=\tau_{,}\tau_{,,,}\left\{1+\frac{(A-B)(P-1)}{3(A+PB)}+\tau_{,}\frac{(A+B)(P^2-1)}{2(A+PB)r_{,,}}\frac{dr_{,,}}{d\tau}+\tau_{,}\frac{(A-B)P}{2(A+PB)r_{,,}}\frac{dr_{,,}}{d\tau}+\dots\right\}$$

so wird erhalten:

$$\{A-C+P(B-C)-K(P+1)\,\varrho_{,,}\cos\beta_{,,}\}\,r_{,,}^3+\tfrac{1}{2}Q(A+PB)=0.$$

Diese Fundamentalgleichung ist in dieser Form zuerst von P. A. Hansen (Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Sitzgsb. der sächs. Akademie der Wissenschaften in Leipzig) aufgestellt worden, und ist in der eben hingeschriebenen Form völlig streng, sobald der wahre Werth von $Q$ in die Gleichung eingesetzt wird; dieser ist aber beim Beginn der Rechnung unbekannt, indem das dritte Glied der Reihe für $Q$ schon eine Funktion der zu bestimmenden Elemente ist. Man kann hier bemerken, dass die zwei ersten Glieder von $Q$ entstanden sind aus den beiden ersten Gliedern der Reihe für $n$ und $n''$, will man demnach die letzteren vollständig in Rechnung bringen, so muss das erste und zweite Glied der Reihe für $Q$ der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Ueber die Ordnung dieser Glieder und die Vortheile, die man bei der Auswahl der Beobachtungen benützen kann, werde ich später das Nöthige beibringen. Setzt man, um die Uebersichtlichkeit zu wahren

$$\frac{(A-C)+P(B-C)}{1+P}=b_0$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{A+PB}{1+P}=c_0$$

so wird die Fundamentalgleichung

$$(K\cos\beta_{,,})\,\varrho_{,,}=b_0+\frac{c_0 Q}{r_{,,}^3}\quad.\quad(4)$$

In dieser Form sieht man sehr deutlich, wie die Bestimmung von $\varrho_{,,}$ an Genauigkeit zugenommen hat, denn es ist, wie diess bei der Ableitung der Formeln für die Bestimmung einer Kometenbahn nachgewiesen wurde,

$$r_{,,}^2=R_{,,}^2-2\varrho_{,,}R_{,,}\cos(\lambda_{,,}-L_{,,})\cos\beta_{,,}+\varrho_{,,}^2$$

Vermöge der Strucktur der Gleichung (4) sieht man, dass im Allgemeinen $b_0$ und $c_0 Q$ nothwendig gleicher Ordnung sein müssen. Die Ordnung von $c_0 Q$ nachzuweisen, hat keine Schwierigkeit. $Q$ ist zweiter Ordnung, da das Anfangsglied der Reihe $\tau_{,}\tau_{,,,}$

ist, dann ist $A$ und $B$ nach (2) wesentlich abhängig von dem Bogen, den der Planet scheinbar zurückgelegt hat, und dieser Bogen ist als eine Grösse erster Ordnung anzusehen, demnach ist $c_0$ erster und $c_0 Q$ dritter Ordnung, woraus sich der Schluss ergibt, dass $K$ und $[A - C + P(B - C)]$ auch mindestens dritter Ordnung sein müssen. Bei kleinen Zwischenzeiten werden also selbst sehr gute Beobachtungen, deren Beobachtungsfehler sehr klein sind, im Allgemeinen ein wenig brauchbares Resultat liefern. Die eben angeführten Betrachtungen schliessen aber nicht aus, dass der eine oder andere Coefficient numerisch höherer Ordnung wird, bei ungünstiger Vertheilung der Beobachtungen, und dann kann unter später auseinanderzusetzenden Umständen die Bestimmung von $\varrho_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ aus der Gleichung (4) praktisch und theoretisch unmöglich werden.

Vor Allem wird es jetzt nöthig sein, die Ordnung der Glieder der $Q$-Reihe zu ermitteln, um abschätzen zu können, wie weit man die Glieder dieser Reihe mitnehmen muss, um brauchbare Näherungen zu erlangen. Alle Glieder, die innerhalb der Klammern in der $Q$-Reihe stehen und erster Ordnung sind, können übergangen werden, da daraus nur Fehler vierter Ordnung in der Fundamentalgleichung entstehen, während diese aus Grössen dritter Ordnung zusammengesetzt ist. Man sieht auf den ersten Blick, dass die mit $\tau_{\prime}$ multiplicirten Glieder sofort ausser Betracht kommen, was um so willkommener ist, da die Bestimmung von $\frac{dr_{\prime\prime}}{d\tau}$ sehr schwierig wäre, in der eben aufgestellten Form. Das vierte Glied wird sogar zweiter Ordnung, wie sich diess später herausstellen wird. Die Vernachlässigung dieser Glieder wird um so bedeutungsloser sein, da in der Regel die Bahnbestimmung auf die kleinen Planeten angewendet wird, die meistens mässige Werthe für die Excentricität haben; denn es ist

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a}} \sin v$$

$\varphi$ ist durchschnittlich mit $10^0$ anzunehmen, für $a$ ist etwa der Werth 2.7 zu setzen, also mit den Durchschnittswerthe wird

$$\frac{dr}{d\tau} = 0.11 \sin v$$

Bedenkt man, dass bei grösseren Excentricitäten die Entdeckung aus praktischen Gründen meist in der Nähe des Perihels geschieht, wo $\sin v$ eine kleine Grösse wird, so wird man daraus ermessen, dass in der That die weggelassenen Glieder noch wesentlich verkleinert werden. Ausserdem wird, wenn man bei der Auswahl der Beobachtungen dem Umstande Rechnung tragen kann, dass die Zwischenzeiten wenigstens sehr nahe gleich sind, für den Fall der Gleichheit:

$$(P - 1) = 0$$
$$(P^2 - 1) = 0$$

wodurch das zweite und dritte Glied in der Reihe für $Q$ verschwindet.

Das zweite Glied der $Q$-Reihe ist völlig bekannt und seine Mitnahme hat keine besondere Schwierigkeit, doch lässt es sich nicht schwer nachweisen, dass auch die Uebergehung dieses Gliedes gestattet ist. Oben ist gezeigt worden, dass der Nenner

dieses Gliedes erster Ordnung ist, führt man, um die Ordnung von $(A - B)$ nachzuweisen, in den Gleichungen (2) für $A$ und $B$ ein

$$\lambda_{,,,} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,} + \lambda_{,}) + \tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})$$
$$\lambda_{,} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,} + \lambda_{,}) - \tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})$$

so findet sich zunächst:

$$A \cos\beta_{,} \cos\beta_{,,,} =$$
$$R_{,}\{\sin(\beta_{,,,} - \beta_{,}) \sin[\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}+\lambda_{,}) - L_{,}] \cos\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,}) - \sin(\beta_{,,,}+\beta_{,}) \cos[\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}+\lambda_{,}) - L_{,}] \sin\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\}$$
$$B \cos\beta_{,} \cos\beta_{,,,} =$$
$$R_{,,,}\{\sin(\beta_{,,,} - \beta_{,}) \sin[\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}+\lambda_{,}) - L_{,,,}] \cos\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,}) - \sin(\beta_{,,,}+\beta_{,}) \cos[\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}+\lambda_{,}) - L_{,,,}] \sin\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\}$$

Da nun $L_{,}$ von $L_{,,,}$ und $R_{,}$ von $R_{,,,}$ nur um Grössen mindestens erster Ordnung verschieden sind, so ist die Differenz der beiden obigen Gleichungen in Bezug auf die ursprünglichen Werthe erster Ordnung, und da $A$ und $B$ selbst erster Ordnung sind, so ist $(A - B)$ eine Grösse zweiter Ordnung, die im zweiten Gliede der $Q$-Reihe durch eine Grösse erster Ordnung dividirt erscheint. Mit Rücksicht auf das eben Gesagte wird in der Reihe für $Q$ innerhalb der Klammer

das erste Glied 0ter Ordnung
» zweite » 1ter »
» dritte » 1ter »
» vierte » 2ter »

Die übrigen vernachlässigten Glieder sind mindestens zweiter Ordnung. Um brauchbare Näherungen zu erhalten, wird es daher hinreichend sein, das erste Glied mitzunehmen; hat man gleiche Zwischenzeiten gewählt, so wird die Annäherung sofort um eine Ordnung genauer, da nur Glieder zweiter Ordnung übergangen werden. Desshalb setzt Hansen ebenso wie Gauss in der ersten Annäherung:

$$Q = \tau_{,} \tau_{,,,}$$

und macht die Bemerkung, dass die Mitnahme des übrigens völlig bekannten zweiten Gliedes nichts nutzen kann, da es von gleicher Ordnung mit dem vernachlässigten dritten Gliede sei und verwirft die von Encke zuerst vorgeschlagene Mitnahme dieses Gliedes. Ich bin der Meinung, dass wenn man die Bestimmung einer Planetenbahn vor hat, wo man im Voraus fast sicher weiss, dass $\frac{dr_{,,}}{d\tau}$ circa $\frac{1}{10}$ nicht wesentlich überschreitet (aus allerdings nur praktischen Gründen), man doch bei sehr ungleichen Zwischenzeiten das zweite Glied mitnehmen soll, indem das dritte Glied mit dieser Grösse $\left(\frac{dr_{,,}}{d\tau}\right)$, die zwar im Allgemeinen nullter Ordnung ist, multiplicirt erscheint. Diese Grösse kann aber wegen ihrer Kleinheit bei den kleinen Planeten gleichsam als erster Ordnung angesehen werden, und es wird das fortgelassene dritte Glied demnach nur einem kleinen Bruchtheil des zweiten Gliedes gleichkommen. Ich möchte daher mit Encke für die erste Annäherung vorschlagen:

$$Q = \tau_{,} \tau_{,,,} \left\{ 1 + \frac{(A - B)(P - 1)}{3(A + PB)} \right\}$$

womit die erste Auflösung der Gleichung (4) durchzuführen ist. Aber auch bei Kometen wird die Mitnahme des zweiten Gliedes empfehlenswerth sein, da hierbei der geocen-

trische Bogen zwischen der ersten und dritten Beobachtung, der als erster Ordnung angenommen wurde, vermöge der meist raschen geocentrischen Bewegung der Kometen praktisch als Grösse $0^{ter}$ Ordnung angesehen werden kann, demnach das zweite Glied der $Q$-Reihe eigentlich auch nahezu $0^{ter}$ Ordnung wird. Von hier ab zeichnet sich der weitere Weg der Bestimmung von selbst vor. Man wird mit dem nun genähert bekannten Werthe von $\varrho_{\prime\prime}$ aus den Gleichungen (1) zu ermitteln haben $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$, aus welchen Werthen in Verbindung mit den Beobachtungsdaten die heliocentrischen Orte und die Radienvektoren ermittelt werden. Aus diesen letzteren Angaben erhält man mit grosser Sicherheit genäherte Werthe für die Verhältnisse: (Sector: Dreieck), die als neue Werthe für die genauere Bestimmung von $Q$ verwendet werden. Man wird so lange die Rechnung wiederholen, bis die gewünschte Uebereinstimmung hergestellt ist. Die Mittel und Wege zur Erreichung dieser Aufgabe sind in den weiter folgenden Paragraphen enthalten. Vorerst will ich die Fälle betrachten, in denen eine Bestimmung von $\varrho_{\prime\prime}$ oder $r_{\prime\prime}$ aus der Gleichung (4) unmöglich wird.

## §. 2. Die Ausnahmefälle.

Die Ansicht und Diskussion der Gleichung (4) wird die meisten sich darbietenden Fälle auffinden lassen, bei deren Stattfinden eine Lösung unthunlich wird, oder so unsichere Resultate liefert, dass es gerathen erscheint auf eine Bahnbestimmung in der eben vorgeschlagenen Form zu verzichten.

Vor Allem dürfen die Zwischenzeiten nicht zu kurz sein, da die bestimmenden Glieder dritter Ordnung in Bezug auf diese sind und demnach die Beobachtungsfehler sehr bedeutend vergrössert in das Resultat übergehen. Es ist nicht leicht, ein allgemein giltiges Mass zur Definirung der unteren Grenze zu geben, unter die hinabzugehen nicht wol zu wagen ist, da wesentlich die Genauigkeit der Beobachtung in Betracht zu ziehen ist. Der wahrscheinliche Fehler der gegenwärtigen Planetenbeobachtungen dürfte auf circa 1″ festzusetzen sein, also Fehler von 2″ werden nicht zu selten hervortreten, um so mehr, da gewöhnlich bei ersten Bahnbestimmungen die Beobachtungen vorläufig reducirt sind, sich oft nicht neu bestimmten Vergleichssternen anschliessen und demnach unter diesen Umständen wesentlich fehlerhafter sind. Bei sehr schwachen Planeten ist noch zu berücksichtigen, dass konstante Auffassungsunterschiede verschiedener Beobachter sehr merkbar hervortreten. Man wird desshalb, sobald es thunlich ist, zur Bahnbestimmung möglichst gute und homogene Beobachtungen verwenden müssen und lieber auf Gleichheit der Zwischenzeiten, die wie oben gezeigt wurde, sehr wesentlich die Convergenz vermehrt, verzichten, wenn man eine nicht sehr verlässliche Beobachtung der Rechnung zu Grunde legen müsste. Bei Kometenbeobachtungen treten die eben erwähnten Fehler im verstärkten Masse hervor, besonders die konstanten Unterschiede in den Angaben verschiedener Beobachter sind sehr merkbar und die Beobachtungsfehler steigen je nach dem Aussehen des Kometen oft sehr bedeutend an. Diese Beobachtungsfehler werden jedoch auf den heliocentrischen Ort, der eigentlich in Betracht kommt, um so einflussloser sein, je näher der Himmelskörper an der Erde ist,

und dieser Umstand macht meistens die grössere Unsicherheit der Kometenbeobachtungen unschädlich, weil die Kometen fast immer in grösserer Nähe als die Planeten beobachtet werden. Ein gutes Mass gibt übrigens im Allgemeinen die geocentrische Bewegung der Himmelskörper, und man wird, um den Beobachtungsfehlern nicht allzuviel nachtheiligen Einfluss zu geben, bei Planeten zwischen den beobachteten Orten einen Abstand von mindestens 1 — 2° nothwendig haben, bei Kometen wird dieser Abstand je nach Umständen wesentlich vermehrt werden müssen und wol nicht unter 4 Grad im grössten Kreise anzunehmen sein. Die eben angedeuteten Regeln sind aber, wie ich besonders hervorhebe, nur ein ganz beiläufiger Leitfaden und können im gegebenen Falle trügerisch sein, indem ganz wesentlich noch die Vertheilung der Beobachtungen in Betracht kommt, die bisweilen selbst bei ganz grossen Bogen eine Bahnbestimmung unmöglich macht.

Wird $K$ und $C$ gleichzeitig Null, welche Bedingung leicht nach den Gleichungen 2) (pag. 163) geometrisch zu deuten ist, indem dann der mittlere Sonnenort in dem grössten Kreise liegt, der durch die drei Orte des Himmelskörpers gelegt erscheint ($K = 0$), so wird in der Fundamentalgleichung zunächst:

$$\frac{A + PB}{1 + P}\left(1 + \frac{\theta}{2\,r_{\prime\prime}^3}\right) = 0$$

da aber $Q$ und $r_{\prime\prime}$ wesentlich positiv sind, so folgt daraus, dass

$$\frac{A + PB}{1 + P} = 0$$

ist. Es wird demnach $c_0$ ebenfalls der Null gleich, und da wie vorausgesetzt $K = 0$ ist, so enthält (4) (pag. 165) keinen Koefficienten der eine Bestimmung von $r_{\prime\prime}$ gestattet. Man sieht, dass sich diese Bedingung meist dadurch charakterisiren wird, dass der Winkel den der durch den zweiten Planeten- (Kometen) und Sonnenort gelegte Kreis mit dem durch die äussersten Beobachtungen gelegten Kreis sehr klein wird oder nahe an 180° liegt. Für den Ausnahmefall selbst wird dieser Winkel 0° oder 180°. Findet dieser Umstand auch nur annäherungsweise statt, so wird ein annehmbares Resultat der Rechnung nicht zu erwarten sein, indem die Beobachtungsfehler ohne Grenze vergrössert erscheinen können; in der Praxis wird, da überhaupt auf ein völliges Eintreffen der Ausnahmefälle nicht zu rechnen ist, von der Rechnung dann abzustehen sein, wenn nur eine wenig geneigte Lage der erwähnten grössten Kreise eintritt; das oben Gesagte gilt von allen derartigen Ausnahmefällen, die erhaltenen Elemente werden stets wenig brauchbar oder verlässlich sein, wenn letztere auch nur näherungsweise statt finden. Hansen nennt den Winkel, der die Neigung der oben bezeichneten grössten Kreise misst, desshalb den massgebenden Winkel und drückt mit Recht den Wunsch aus, dass bei ersten Bahnbestimmungen ausser den Zwischenzeiten auch dieser Winkel bei der Publikation der Elemente mitgetheilt wird. Ganz verlässlich wird diese Angabe auch nicht sein, wenn der Planet zur Zeit der zweiten Beobachtung bei sehr kleiner Breite in Opposition mit der Sonne ist, indem der Abstand des zweiten Sonnenortes von dem durch den ersten und dritten Ort gelegten Kreis, wenn der massgebende Winkel selbst ein rechter wird, ganz klein sein kann. Diesen Umstand wird man gleich beim Beginn der Rechnung erkennen,

wenn sehr nahe $\lambda_{\prime\prime} = L_0$ und $\beta_{\prime\prime} = 0$ wird, und man wird in diesem Falle die Berechnung unterlassen, weil dann die Bestimmung von $\varrho_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ theoretisch zwar möglich ist, aber praktisch sehr unsicher wird. Mit diesem Vorbehalte ist in der That der massgebende Winkel eine entscheidende Angabe und die häufige Anwendung wird bald die Grenzen finden lassen unter die der massgebende Winkel nicht sinken darf, um die näherungsweise Richtigkeit des Resultates in Frage zu ziehen. Bei relativ kurzen Zwischenzeiten wird es nöthig, dass der massgebende Winkel mindestens mehre Grade gross wird. Wollte man ein sehr verlässliches Kriterium haben für die Anwendbarkeit der Methode, so würde dieses gegeben werden durch das Produkt des Sinus des massgebenden Winkels in den Sinus des Abstandes des zweiten Planeten- und Sonnenortes (massgebender Abstand). Man könnte dieses Produkt, welches nicht sehr klein sein darf, wenn die Bahnbestimmung sicher sein soll und stets positiv genommen werden kann, als Gewicht der Bahnbestimmungen bezeichnen, welches mit Rücksicht auf die gewählten Zwischenzeiten einen ziemlich sicheren Schluss auf die Sicherheit der Elemente gestattet. Die Kleinheit des massgebenden Winkels kann meist nicht ohne Rechnung erkannt werden, es wird desshalb später auf einfache Weise gezeigt werden, wie man diesen Winkel berechnen kann in den ersten Stadien der Rechnung, sodass man bald zur Erkenntniss gelangt, ob es der Mühe lohnt, die Rechnung durchzuführen.

Aehnlich gestalten sich die Verhältnisse, wenn $A$ und $B$ gleichzeitig Null werden, was offenbar stattfindet, wenn der erste und dritte Ort des Himmelskörpers zusammenfallen oder um 180° von einander entfernt liegen, eine Beschränkung die gleich bei der Auswahl der Beobachtungen berücksichtigt werden muss. Tritt dieser Fall ein so wird nach (2):

$$A = 0, \ B = 0, \ C = 0, \ K = 0$$

und eine Bestimmung unmöglich. Sind alle drei Breiten Null (sehr klein), so wird ebenfalls eine Bahnbestimmung aus denselben Gründen unmöglich.

Hiermit sind die wichtigsten Fälle erschöpft, die einen Ausnahmefall bedingen, und diese Fälle werden gewöhnlich angeführt. Es gibt jedoch noch einen merkwürdigen Ausnahmefall, der soviel mir bekannt, keine Beachtung gefunden hat. Liegen nämlich alle drei Beobachtungen in einem grössten Kreise, wird also $K = 0$, und bleiben die übrigen Coefficienten der Gleichung gross, so kann doch eine sichere Bestimmung unmöglich werden; man erhält dann zweifellos $r_{\prime\prime}$ mit grosser Sicherheit, doch der Uebergang von diesem Werthe auf $\varrho_{\prime\prime}$ kann ganz unsicher werden. Dieser Fall wird eintreten, wenn der Winkel am Himmelskörper nahe ein rechter ist, was nur geschehen kann, wenn $r_{\prime\prime} < R_{\prime\prime}$ ist; bei kleinen Planeten wird also dieser Ausnahmefall niemals eintreten, wol aber bei Kometen. Ist $r_{\prime\prime}$ sehr klein, so kann diese Unsicherheit wesentlich vermindert werden, doch bei so kleinen $r_{\prime\prime}$, wie diess hier nöthig wäre, wird die Beobachtung selbst wol praktisch unmöglich.

Man wird nach dem Vorausgehenden bei der Auswahl der Beobachtungen besonders die folgenden Andeutungen zu beachten haben:

Man wähle möglichst gute Beobachtungen in den möglichst grossen Zeitabständen; dass man die obere Grenze bei ersten Bahnbestimmungen nicht leicht überschreitet, ist an sich klar. Wenn es möglich ist, so nehme man nahezu gleiche Zwischenzeiten, dadurch wird eine wesentliche Verkürzung und Vermehrung der Sicherheit der Rechnung erzielt. Der erste und dritte beobachtete Ort dürfen nicht einander zu nahe liegen, Die Vergleichung mit der Sonnenephemeride wird sofort ergeben ob der Himmelskörper zur Zeit der zweiten Beobachtung in der Opposition (die Conjunction wird wol kaum je in Betracht kommen) mit der Sonne ist bei sehr kleiner Breite; letzteres muss vermieden werden. Während der ersten Stadien der Rechnung wird die Berechnung des Gewichtes die letzte Entscheidung geben.

## §. 3. Ableitung von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ aus $\varrho_{,,}$.

Ich will mich vorläufig nicht befassen mit den Transformationen, die man vornehmen kann um die Gleichung (4) (pag. 165) möglichst rasch und bequem durch Versuche aufzulösen, sondern vorerst den Nachweis liefern, dass man, sobald $\varrho_{,,}$ bekannt ist, stets mit Sicherheit $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ ermitteln kann, woran sich die Ableitung des verbesserten Werthes für $Q$ anschliesst. Die Kenntniss von $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$ und $\varrho_{,,,}$ wird auch ein geeignetes Hilfsmittel an die Hand geben, die Zwischenzeiten für Aberration zu korrigiren, woraus eine geringe Aenderung des Werthes für $P$ resultirt.

Die Bestimmung von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ aus den Gleichungen (2), nach Einsetzung des Werthes für $\varrho_{,,}$, kann auf sehr verschiedene Weise durchgeführt werden. Fast alle der bisher gegebenen Formen sind nicht stets anwendbar, und man muss sehr achten, ob nicht der eine oder andere die Anwendung ausschliessende Fall eintritt; diese Beschränkung bringt aber fast in allen Fällen eine Vereinfachung der Rechnung mit sich; es lassen sich aber Formen angeben, die allgemein anwendbar sind in dem hier vorgelegten Probleme und überdiess die Rechnung nicht sehr wesentlich vermehren; ich werde diese hier nun ableiten und diese ausschliesslich für die Anwendung empfehlen.

Setzt man für $\Pi$ in den Gleichungen (1) den Werth $\lambda_{,,,}$ so wird erhalten:

$$n\{\varrho_{,}\cos(\lambda_{,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,}-R_{,}\cos(L_{,}-\lambda_{,,,})\}+n''\{\varrho_{,,,}\cos\beta_{,,,}-R_{,,,}\cos(L_{,,,}-\lambda_{,,,})\}=$$
$$=\varrho_{,,}\cos(\lambda_{,,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,,}-R_{,,}\cos(L_{,,}-\lambda_{,,,})$$
$$n\{\varrho_{,}\sin(\lambda_{,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,}-R_{,}\sin(L_{,}-\lambda_{,,,})\}+n''\{-R_{,,,}\sin(L_{,,,}-\lambda_{,,,})\}=$$
$$=\varrho_{,,}\sin(\lambda_{,,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,,}-R_{,,}\sin(L_{,,}-\lambda_{,,,})$$
$$n\,\varrho_{,}\sin\beta_{,}+n''\varrho_{,,,}\sin\beta_{,,,}=\varrho_{,,}\sin\beta_{,,}$$

Multiplicirt man die erste vorstehende Gleichung mit $\sin\beta_{,,,}$ und die dritte mit $-\cos\beta_{,,,}$ und addirt man diese beiden Gleichungen, so wird erhalten, wenn man alle von $\varrho_{,}$ freien Glieder rechts vom Gleichheitszeichen setzt und die zweite der obigen Gleichungen ebenso transformirt:

$$n\varrho_{,}\{\cos(\lambda_{,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,}\sin\beta_{,,,}-\sin\beta_{,}\cos\beta_{,,,}\}=\{nR_{,}\cos(L_{,}-\lambda_{,,,})-R_{,,}\cos(L_{,,}-\lambda_{,,,})$$
$$+n''R_{,,,}\cos(L_{,,,}-\lambda_{,,,})\}\sin\beta_{,,,}+\varrho_{,,}\{\cos(\lambda_{,,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,,}\sin\beta_{,,,}-\sin\beta_{,,}\cos\beta_{,,}\}$$
$$n\varrho_{,}\sin(\lambda_{,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,}=nR_{,}\sin(L_{,}-\lambda_{,,,})-R_{,,}\sin(L_{,,}-\lambda_{,,,})+n''R_{,,,}\sin(L_{,,,}-\lambda_{,,,})$$
$$+\varrho_{,,}\sin(\lambda_{,,}-\lambda_{,,,})\cos\beta_{,,}$$

Die Coefficienten von $n\varrho_,$ und $\varrho_{,,}$ haben eine ganz bestimmte geometrische Bedeutung, und die Einführung dieser neuen Grössen in Form von Hilfswinkeln wird die Rechnung wesentlich erleichtern. Ich will, um das Resultat anschaulicher zu machen, ein zusammengehöriges Paar dieser Coefficienten vornehmen und deren Bedeutung erläutern. Ich betrachte das sphärische Dreieck zwischen dem Pol der Ekliptik und dem ersten und dritten beobachteten Orte; bezeichne ich mit $\Delta_{,,}$ die Distanz zwischen dem ersten und dritten Orte, mit $w_{,,,}'$ den Winkel am dritten Orte, so ist sofort:

$$\sin\Delta_{,,} \sin w_{,,,}' = \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,) \cos\beta_,$$
$$\sin\Delta_{,,} \cos w_{,,,}' = \sin\beta_, \cos\beta_{,,,} - \cos\beta_, \sin\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_,)$$

man wird desshalb $n\varrho_,$ in der ersten Gleichung in Verbindung mit $\sin\Delta_{,,} \cos w_{,,,}'$ erhalten, in der zweiten mit $\sin\Delta_{,,}'' \sin w_{,,,}'$; multiplicirt man demnach die erste Gleichung mit $\cos w_{,,,}'$ die zweite mit $\sin w_{,,,}'$ und addirt, so erhält man als Coefficienten von $\varrho_,$ den Faktor $n \sin\Delta_{,,}$, eine Grösse, die der Voraussetzung (kein Ausnahmefall) nach niemals der Null gleich werden kann; demnach ist durch diese Form der Auflösung die sichere Bestimmung von $\varrho_,$ aus $\varrho_{,,}$ garantirt. Es braucht wol nicht hervorgehoben zu werden, dass die geometrische Bedeutung von $\Delta_{,,}$ und $w_{,,,}'$ gleichgiltig ist für die Einführung der Hilfswinkel, aber wesentlich ist für die Deutung der Grössen und Sicherheit der Formeln in ihrer Anwendung.

Ich setze also:

$$\sin\Delta_{,,} \sin W' = \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,) \cos\beta_,$$
$$\sin\Delta_{,,} \cos W' = \sin\beta_, \cos\beta_{,,,} - \cos\beta_, \sin\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_,)$$
$$\sin\Delta_, \sin W_0' = \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,}$$
$$\sin\Delta_, \cos W_0' = \sin\beta_{,,} \cos\beta_{,,,} - \cos\beta_{,,} \sin\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,})$$

in welchen Gleichungen $\sin\Delta_{,,}$ und $\sin\Delta_,$ stets positiv angenommen werden können. Es wird dann:

$$\left.\begin{aligned} -n\varrho_, \sin\Delta_{,,} \cos W' &= \{n R_, \cos(L_, - \lambda_{,,,}) - R_{,,} \cos(L_{,,} - \lambda_{,,,}) \\ &\quad + n'' R_{,,,} \cos(L_{,,,} - \lambda_{,,,})\} \sin\beta_{,,,} - \sin\Delta_, \cos W_0' \varrho_{,,} \\ -n\varrho_, \sin\Delta_{,,} \sin W' &= n R_, \sin(L_, - \lambda_{,,,}) - R_{,,} \sin(L_{,,} - \lambda_{,,,}) \\ &\quad + n'' R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \lambda_{,,,}) - \sin\Delta_, \sin W_0' \varrho_{,,} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Setzt man:

$$\frac{R_{,,} \sin(L_{,,} - L_,)}{R_{,,,} \sin(L_{,,,} - L_,)} = N'' \qquad \frac{R_{,,} \sin(L_{,,,} - L_{,,})}{R_, \sin(L_{,,,} - L_,)} = N$$

so ist streng:

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_{,,,} [NR_, \cos(\lambda_{,,,} - L_,) - R_{,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,}) + N'' R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})] &= 0 \\ NR_, \sin(\lambda_{,,,} - L_,) - R_{,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,}) + N'' R_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

subtrahirt man von der ersten Gleichung in (6) die erste von (5) und addirt die beiden zweiten Gleichungen in (5) und (6), so findet sich:

$$n\varrho_, \sin\Delta_{,,} \cos W' = \{(N - n) R_, \cos(\lambda_{,,,} - L_,) + (N'' - n'') R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})\} \sin\beta_{,,,}$$
$$+ \sin\Delta_, \cos W_0' \varrho_{,,}$$
$$-n\varrho_, \sin\Delta_{,,} \sin W' = \{(N - n) R_, \sin(\lambda_{,,,} - L_,) + (N'' - n'') R_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,})$$
$$- \sin\Delta_, \sin W_0' \varrho_{,,}$$

Multiplicirt man endlich die erste Gleichung mit $\cos W'$, die zweite mit $-\sin W'$ und addirt nachdem man gesetzt hat

$$\sin\beta_{\prime\prime} \cos W' = f_{\prime} \sin F_{\prime}$$
$$-\sin W' = f_{\prime} \cos F_{\prime}$$

so resultirt:

$$n\varrho_{\prime} = (N-n)\frac{R_{\prime}f_{\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime}}\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime}+F_{\prime}) + (N''-n'')\frac{R_{\prime\prime\prime}f_{\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime}}\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime\prime}+F_{\prime})$$
$$+\frac{\sin\Delta_{\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime}}\cos(W_0'-W')\,\varrho_{\prime\prime}$$

Ein ganz ähnliches Verfahren wird man für $\varrho_{\prime\prime\prime}$ einschlagen können und erhalten:

$$\sin\Delta_{\prime\prime}\sin W''' = \sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime})\cos\beta_{\prime\prime\prime}$$
$$\sin\Delta_{\prime\prime}\cos W''' = \sin\beta_{\prime\prime\prime}\cos\beta_{\prime} - \cos\beta_{\prime\prime\prime}\sin\beta_{\prime}\cos(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime})$$
$$\sin\Delta_{\prime\prime\prime}\sin W_0''' = \sin(\lambda_{\prime\prime}-\lambda_{\prime})\cos\beta_{\prime\prime}$$
$$\sin\Delta_{\prime\prime\prime}\cos W_0''' = \sin\beta_{\prime\prime}\cos\beta_{\prime} - \cos\beta_{\prime\prime}\sin\beta_{\prime}\cos(\lambda_{\prime\prime}-\lambda_{\prime})$$
$$\sin\beta_{\prime}\cos W''' = f_{\prime\prime\prime}\sin F_{\prime\prime\prime}$$
$$\sin W''' = f_{\prime\prime\prime}\cos F_{\prime\prime\prime}$$

$$n''\varrho_{\prime\prime\prime} = (N-n)\frac{R_{\prime}f_{\prime\prime\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime}}\sin(\lambda_{\prime}-L_{\prime}+F_{\prime\prime\prime}) + (N''-n'')\frac{f_{\prime\prime\prime}R_{\prime\prime\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime}}\sin(\lambda_{\prime}-L_{\prime\prime\prime}+F_{\prime\prime\prime})$$
$$+\frac{\sin\Delta_{\prime\prime\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime}}\cos(W_0'''-W''')\,\varrho_{\prime\prime}$$

Die Coefficienten von $(N-n)$, $(N''-n'')$ und $\varrho_{\prime\prime}$ sind in beiden Ausdrücken (für $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$) völlig konstante Grössen und können ein- für allemal berechnet werden. Allerdings ist die Berechnung dieser konstanten Coefficienten nicht so kurz als man es wünschen könnte, doch da alle Hilfsgrössen durch die verschiedene Kombination weniger Werthe erhalten werden, so macht sich die Rechnung viel kürzer, als man es erwarten würde. Wie man sieht wird die Berechnung von $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ nach $\varrho_{\prime\prime}$ nur dann unmöglich, wenn die scheinbaren Orte des Himmelskörpers zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung identisch werden ($\Delta_{\prime\prime} = 0$), dann ist aber überhaupt eine Anwendung dieser Formeln nicht nöthig, da eine Bestimmung von $\varrho_{\prime\prime}$ in diesem Falle unmöglich ist.

## §. 4. Die Bestimmung der Werthe $n$ und $n''$.

Bei der Berechnung der Grössen $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ treten die Werthe $n$ und $n''$ auf, die beim Beginn der Rechnung nicht völlig genau bekannt sind. Bei der Aufstellung der Fundamentalgleichung selbst sind ebenfalls diese Grössen durch Einführung der Grösse $Q$ verschwunden und es stellt sich demnach die Aufgabe die Werthe von $n$ und $n''$ zu ermitteln, die in jeder Hypothese angewendet werden müssen, um $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ berechnen zu können und weiter für die folgende Hypothese genauere Werthe zu liefern für die Verhältnisse der Dreiecksflächen. Hierbei können zwei wesentlich verschiedene Wege eingeschlagen werden. Bislang ging man von den folgenden Betrachtungen aus. Die Gleichung (4) (pag. 165) kann geschrieben werden:

$$\frac{A+PB}{(P+1)}\left(1+\frac{Q}{2\,r_{\prime\prime}^3}\right) = K\varrho_{\prime\prime}\cos\beta_{\prime\prime} + C$$

Die Gleichung (3) (pag. 163) ist aber

$$nA + n''B = K\varrho_{''} \cos\beta_{''} + C$$

Vergleicht man beide Gleichungen, so werden dieselben identisch, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{1}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_{''}^3}\right) \\ n'' &= \frac{P}{P+1}\left(1 + \frac{Q}{2r_{''}^3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

woraus $P$ und $Q$ bestimmt wird nach

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{n''}{n} = \frac{[r_{,} r_{''}]}{[r_{,} r_{'''}]} \\ Q &= (n'' + n - 1)\, 2r_{''}^3 = \left(\frac{[r_{,} r_{''}] + [r_{''} r_{'''}]}{[r_{,} r_{'''}]} - 1\right) 2r_{''}^3 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Man hat demnach durch die Berechnung von (7) die Werthe $n$ und $n''$ erhalten und zwar in der Annäherung als es die Werthe $P$ und $Q$ sind; würden die strengen Werthe von $P$ und $Q$ bekannt sein, so wären $n$ und $n''$ sofort die richtigen Werthe für die Verhältnisse der Dreiecksflächen. Der Weg, der im Verlaufe der Rechnung zu verfolgen ist, war nun wie folgt vorgezeichnet. In der ersten Annäherung wurde $P = \frac{\tau_{'''}}{\tau_{,}}$ und $Q = \tau_{,} \tau_{'''}$ (man könnte allenfalls für $Q$ das zweite Glied der Reihe mitnehmen) gesetzt und mit diesen Werthen die drei heliocentrischen Orte und Entfernungen des Planeten bestimmt, woraus nach später zu erläuternden Prinzipien das Verhältniss: (Sector: Dreieck) ermittelt wurde für die verschiedenen Dreiecke die in Betracht kommen. Diese Bestimmung des Verhältnisses: $\frac{\text{Sect}}{\triangle}$ wird, wie es sich später herausstellt, sehr sicher, wenn auch nur ganz genäherte Werthe der heliocentrischen Coordinaten vorhanden sind, unter dem Vorbehalte mässiger heliocentrischer Bewegung. Bezeichnet man diese Verhältnisse mit $\eta$ und versieht dieselben analog wie die Zwischenzeiten mit Accenten, so wird

$\eta_{'''}$ zum Dreieck 1., 2. Ort und Sonne
$\eta_{''}$ » » 1., 3. » » »
$\eta_{,}$ » » 2., 3. » » »

gehören und man hat demnach:

$$n = \frac{\tau_{,}}{\tau_{''}} \cdot \frac{\eta_{''}}{\eta_{,}}$$

$$n'' = \frac{\tau_{'''}}{\tau_{''}} \cdot \frac{\eta_{''}}{\eta_{'''}}$$

woraus sich ergibt nach (8) zunächst:

$$P = \frac{\tau_{'''}}{\tau_{,}} \cdot \frac{\eta_{,}}{\eta_{'''}}$$

Die Ableitung von $Q$ bedarf einer näheren Auseinandersetzung, da die Form von $Q$ in der Anwendung beschwerlich und wenig genau wäre, da $(n'' + n)$ nahe der Einheit gleich sein wird. Es ist aber für jeden beliebigen Kegelschnitt, wenn wie früher mit $p$ der Parameter bezeichnet wird:

$$\frac{p}{r_{,}} = 1 + e\cos v_{,}$$

$$\frac{p}{r_{''}} = 1 + e\cos v_{''}$$

$$\frac{p}{r_{'''}} = 1 + e\cos v_{'''}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin(v_{,,,}-v_{,,})$, die zweite mit $\sin(v_{,}-v_{,,,})$, die dritte mit $\sin(v_{,,}-v_{,})$ und addirt, so wird:

$$\frac{p}{r_{,}}\sin(v_{,,,}-v_{,,})-\frac{p}{r_{,,}}\sin(v_{,,,}-v_{,})+\frac{p}{r_{,,,}}\sin(v_{,,}-v_{,})=\sin(v_{,,,}-v_{,,})-\sin(v_{,,,}-v_{,})+\sin(v_{,,}-v_{,})$$

Schreibt man nun der Kürze halber

$$v_{,,,}-v_{,,}=2f' \qquad v_{,,,}-v_{,}=2f'' \qquad v_{,,}-v_{,}=2f'''$$

und bedenkt, dass ist:

$$\begin{aligned} r_{,,}\,r_{,,,}\sin 2f' &= [r_{,,}\,r_{,,,}] = 2r_{,,}\,r_{,,,}\sin f'\cos f' \\ r_{,}\,r_{,,,}\sin 2f'' &= [r_{,}\,r_{,,,}] = 2r_{,}\,r_{,,,}\sin f''\cos f'' \\ r_{,}\,r_{,,}\sin 2f''' &= [r_{,}\,r_{,,}] = 2r_{,}\,r_{,,}\sin f'''\cos f''' \end{aligned}$$

so wird man erhalten, wenn man in der obigen Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen setzt:

$$v_{,,,}-v_{,}=(v_{,,,}-v_{,,})+(v_{,,}-v_{,})$$

und reducirt:

$$p\left\{\frac{[r_{,,}\,r_{,,,}]}{r_{,}\,r_{,,}\,r_{,,,}}-\frac{[r_{,}\,r_{,,,}]}{r_{,}\,r_{,,}\,r_{,,,}}+\frac{[r_{,}\,r_{,,}]}{r_{,}\,r_{,,}\,r_{,,,}}\right\}=4\sin f'\sin f''\sin f'''$$

multiplicirt man beiderseits mit $r_{,}\,r_{,,}\,r_{,,,}$ so wird mit Rücksicht auf die Relationen für $[r_{,,}\,r_{,,,}]$, $[r_{,}\,r_{,,,}]$ und $[r_{,}\,r_{,,}]$ erhalten:

$$p\{[r_{,,}\,r_{,,,}]-[r_{,}\,r_{,,,}]+[r_{,}\,r_{,,}]\}=\frac{[r_{,,}\,r_{,,,}]\cdot[r_{,}\,r_{,,,}]\cdot[r_{,,}\,r_{,,,}]}{2r_{,}\,r_{,,}\,r_{,,,}\cos f'\cos f''\cos f'''}$$

Für $Q$ kann aber gesetzt werden:

$$Q=\frac{1}{[r_{,}\,r_{,,,}]}\{[r_{,}\,r_{,,}]-[r_{,}\,r_{,,,}]+[r_{,,}\,r_{,,,}]\}\,2r_{,,}^{3}$$

nun ist aber, wenn man die Masse des Körpers im Verhältnisse zur Sonnenmasse der Null gleich setzt (nach pag. 45):

$$2\,\text{Sect}=kt\sqrt{p}=2\triangle\frac{\text{Sect}}{\triangle}=2\triangle\eta$$

demnach wird mit Einführung der obigen Bezeichnung:

$$\begin{aligned} \tau_{,}\sqrt{p} &= [r_{,,}\,r_{,,,}]\,\eta_{,} \\ \tau_{,,}\sqrt{p} &= [r_{,}\,r_{,,,}]\,\eta_{,,} \\ \tau_{,,,}\sqrt{p} &= [r_{,}\,r_{,,}]\,\eta_{,,,} \end{aligned}$$

Es kann für $Q$ geschrieben werden, wenn man bedenkt, dass ist

$$\frac{p\cdot\tau_{,}\,\tau_{,,,}}{\eta_{,}\,\eta_{,,,}\,[r_{,,}\,r_{,,,}]\,[r_{,}\,r_{,,}]}=1$$

$$Q=\frac{\tau_{,}\,\tau_{,,,}}{\eta_{,}\,\eta_{,,,}}\cdot p\,\frac{[r_{,,}\,r_{,,,}]-[r_{,}\,r_{,,,}]+[r_{,}\,r_{,,}]}{[r_{,,}\,r_{,,,}]\cdot[r_{,}\,r_{,,,}]\cdot[r_{,}\,r_{,,}]}\,2r_{,,}^{3}$$

oder mit Einsetzung des eben für $p$ gefundenen Werthes:

$$Q=\frac{\tau_{,}\,\tau_{,,,}}{\eta_{,}\,\eta_{,,,}}\cdot\frac{r_{,,}^{2}}{r_{,}\,r_{,,,}\cos f'\cos f''\cos f'''}$$

welcher Ausdruck streng richtig ist.

Man kann demnach nach Durchführung der ersten Hypothese die Grössen $\eta_{,}$ und $\eta_{,,,}$ sehr nahe richtig ermitteln, mit diesen Werthen werden genauere Werthe für $P$ und $Q$ abgeleitet, die eine neue verbesserte Auflösung gestatten, die ihrerseits wieder

noch genauere Werthe für $\eta_{,}$ und $\eta_{,,,}$ finden lässt. Diese Art derRechnung kann nun so lange fortgeführt werden, bis in den Grössen $P$ und $Q$ keine Aenderung stattfindet.

Den eben vorgeschlagenen Weg will ich aber nicht näher verfolgen und habe denselben nur hier andeutungsweise vorgenommen, da derselbe bislang der allgemein übliche war. Victor Knorre hat in seiner Inauguraldissertation (Additamenta in usum commodiorem et tutiorem methodorum, quae ad orbitas planetarum paucis observationibus determinandas inserviunt. Berolini MDCCCLXVII) auf Grundlage der Hansen'schen Form für die Fundamentalgleichung ein Verfahren angegeben, welches unmittelbarer erscheint, indem nur eine Correction für $Q$ eingeführt wird, für welche Grösse allein nach den bisherigen Entwickelungen eine Näherungsannahme nöthig wird. Die Rechnung wird in mancher Beziehung kürzer, da jetzt $P$ als konstante Grösse auftritt, andererseits wird sie länger, da die Berechnung von $\eta_{,,}$ erforderlich ist, die man für ersteren Weg nicht nöthig hat. Es lässt sich aber der Nachweis liefern, dass das zweite Verfahren etwas genauer ist, besonders bei wesentlich ungleichen Zwischenzeiten, und da die Rechnung nach dieser Methode gewiss nicht weitläufiger wird, so verdient dieselbe unstreitig den Vorzug. Auch wird es sich zeigen, dass die Bestimmung eines später einzuführenden Winkels $\omega$ in den meisten Fällen sehr unsicher wird; da die Berechnung dieses Winkels nach dieser Methode nur einmal nöthig wird, so entsteht daraus eine allerdings für das Resultat wenig in Betracht kommende gleichmässigere Konvergenz der numerischen Werthe.

Die Bestimmung von $n$ und $n''$ kann nun nicht mehr nach der Form (7) vorgenommen werden, da $P$ nun nicht mehr willkührlich bestimmt werden kann, indem ich voraussetze, dass jetzt $P$ ein konstanter Werth $\left(\frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,}}\right)$ ist, der höchstens einmal im Verlaufe der Rechnung eine Abänderung erfährt, wenn man die Korrektion für Aberrationszeit einführt. Setzt man

$$n = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}} \cdot \frac{\eta_{,,}}{\eta_{,}}$$

$$n'' = \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}} \cdot \frac{\eta_{,,}}{\eta_{,,,}}$$

und führt neue Funktionen ein, indem man setzt:

$$\frac{\eta_{,,}}{\eta_{,}} = 1 + \frac{Y_{,,,}}{2 r_{,,}^3} \qquad \frac{\eta_{,,}}{\eta_{,,,}} = 1 + \frac{Y_{,}}{2 r_{,,}^3}$$

so wird man sofort die Behauptung aufstellen können, dass $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ Grössen zweiter Ordnung sind. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (3) des §. 1 (pag. 163) ein, so wird geschrieben werden können für diese, wenn jetzt ist:

$$P = \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,}}$$

$$K\varrho_{,,} \cos\beta_{,,} + C = \frac{A + PB}{1 + P} \left\{ 1 + \frac{A Y_{,,,} + PB\, Y_{,}}{2 r_{,,}^3 (A + PB)} \right\}$$

die Fundamentalgleichung gibt aber

$$K\varrho_{,,} \cos\beta_{,,} + C = \frac{A + PB}{1 + P} \left\{ 1 + \frac{Q}{2 r_{,,}^3} \right\}$$

daraus schliesst man, dass der strenge Werth von $Q$ ist:

$$Q = \frac{A Y_{,,,} + PB\, Y_{,}}{A + PB} \qquad (9)$$

Es wird nur noch nöthig sein, den Nachweis zu liefern, dass $Y_{\prime\prime\prime}$ und $Y_{\prime}$ aus $\eta_{\prime}$, $\eta_{\prime\prime}$ und $\eta_{\prime\prime\prime}$ mit hinreichender Sicherheit berechnet werden kann. Die Art der eingeführten Funktion gibt sofort:

$$Y_{\prime\prime\prime} = \left(\frac{\eta_{\prime\prime}}{\eta_{\prime}} - 1\right) 2\, r_{\prime\prime}^3 = \frac{(\eta_{\prime\prime} - 1) - (\eta_{\prime} - 1)}{\eta_{\prime}}\, 2\, r_{\prime\prime}^3$$
$$Y_{\prime} = \left(\frac{\eta_{\prime\prime}}{\eta_{\prime\prime\prime}} - 1\right) 2\, r_{\prime\prime}^3 = \frac{(\eta_{\prime\prime} - 1) - (\eta_{\prime\prime\prime} - 1)}{\eta_{\prime\prime\prime}}\, 2\, r_{\prime\prime}^3$$

wobei die zweite Form die Rechnung wesentlich erleichtert und sichert, indem sich bequeme Formen zur Berechnung von $(\eta_{\prime} - 1)$, $(\eta_{\prime\prime} - 1)$, $(\eta_{\prime\prime\prime} - 1)$ angeben lassen. Ein Bedenken kann aber rege werden dadurch, dass zur Bestimmung von $Y_{\prime\prime\prime}$ und $Y_{\prime}$ der Werth von $r_{\prime\prime}$ bekannt sein muss, der nothwendig der vorausgehenden Hypothese entlehnt sein muss und dem Werthe entspricht, der zur Ableitung von $\eta_{\prime}$, $\eta_{\prime\prime}$ und $\eta_{\prime\prime\prime}$ gedient hat. Es wird unten gezeigt werden, wie $\eta_{\prime}$, $\eta_{\prime\prime}$ und $\eta_{\prime\prime\prime}$ berechnet werden können auf völlig strenge Weise; aber um die Verhältnisse hier besser zu übersehen, will ich eine schon bekannte Form für $\frac{\eta_{\prime\prime}}{\eta_{\prime}}$ und $\frac{\eta_{\prime\prime}}{\eta_{\prime\prime\prime}}$ einführen. Die Reihen, die für $n$ und $n''$ erhalten wurden, geben innerhalb der Klammern die Werthe $\frac{\eta_{\prime\prime}}{\eta_{\prime}}$ und $\frac{\eta_{\prime\prime}}{\eta_{\prime\prime\prime}}$, man hat also, wenn man $Y_{\prime\prime\prime}$ und $Y_{\prime}$ nach diesen Reihen berechnen wollte und sofort beim ersten Gliede stehen bleibt:

$$Y_{\prime\prime\prime} = \frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime}^2}{3} - \ldots$$
$$Y_{\prime} = \frac{\tau_{\prime\prime}^2 - \tau_{\prime\prime\prime}^2}{3} + \ldots$$

da $\eta_{\prime}$, $\eta_{\prime\prime}$ und $\eta_{\prime\prime\prime}$ in der strengen Form mit dem noch fehlerhaften $r_{\prime\prime}$ berechnet ist, so werden durch die Multiplikation mit dem in demselben Masse fehlerhaften $r_{\prime\prime}^3$ (um $Y_{\prime\prime\prime}$ und $Y_{\prime}$ zu erhalten) die so entstandenen Fehler in den Grössen zweiter Ordnung aufgehoben und nur die Grössen dritter Ordnung sind durch diese Differenz des wahren und angenommenen Werthes $(\varDelta r_{\prime\prime})$ von $r_{\prime\prime}$ beeinflusst. Man kann daraus ersehen, dass die gewählte Form genauer ist, als die früher vorgetragene Methode, da in dieser die Werthe $\eta_{\prime}$ und $\eta_{\prime\prime\prime}$ unmittelbar erscheinen, demnach schon in den Gliedern zweiter Ordnung wegen $\varDelta r_{\prime\prime}$ etwas fehlerhaft sind; in dieser ersteren Methode ist aber dieser Umstand nicht sehr nachtheilig, da die Glieder zweiter Ordnung in $\eta_{\prime}$ und $\eta_{\prime\prime\prime}$ viel kleiner sind als in $\eta_{\prime\prime}$; letzteres Verhältniss, welches zum grossen Dreiecke gehört, bedarf die erstere Methode nicht; bei sehr ungleichen Zwischenzeiten wird aber die grössere Convergenz dieser zweiten Methode sehr merkbar hervortreten.

Zur Berechnung von $n$ und $n''$ wird man haben nach dem Vorausgehenden:

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\tau_{\prime}}{\tau_{\prime\prime}} \left(1 + \frac{Y_{\prime\prime\prime}}{2\, r_{\prime\prime}^3}\right) \\ n'' &= \frac{\tau_{\prime\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime}} \left(1 + \frac{Y_{\prime}}{2\, r_{\prime\prime}^3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (10)_a$$

wo für $r_{\prime\prime}$ der Werth anzuwenden sein wird, den die neue Auflösung der Gleichung mit dem verbesserten Werthe von $Q$ gegeben hat. Die Berechnung von (10) kann auch ausgeführt werden durch

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{Y_{,,,}}{2r_{,,}^3} = \mathrm{tg}^2\,\varepsilon_{,,,} & \frac{Y_{,}}{2r_{,,}^3} = \mathrm{tg}^2\,\varepsilon_{,} \\ n = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}} \sec^2 \varepsilon_{,,,} & n'' = \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}} \sec^2 \varepsilon_{,} \end{array}\right\} \quad (10)_b$$

Aus dem eben Vorgetragenen wird man demnach das folgende Verfahren für die Anwendung ableiten. In der ersten Hypothese setze man:

$$Y_{,,,} = \tfrac{1}{6}(\tau_{,,}^2 - \tau_{,}^2)$$
$$Y_{,} = \tfrac{1}{6}(\tau_{,,}^2 - \tau_{,,,}^2)$$
$$Q = \frac{A\,Y_{,,,} + PB\,Y_{,}}{A + PB}$$

und das Glied erster Ordnung in der Reihe für $Q$ ist ebenfalls mitgenommen; will man dasselbe weglassen, was jedoch nicht ganz zweckmässig ist, so hätte man einfacher

$$Y_{,} = Y_{,,,} = Q = \tau_{,}\,\tau_{,,,}$$

Sind genäherte Elemente schon bekannt, so wird man sofort für $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ genauere Werthe einführen können. Die Methoden hierfür werden sich aus dem später folgenden ergeben.

Ist eine Annahme über $Y_{,,,}$, $Y_{,}$ und $Q$ gemacht, so ermittelt man daraus nach der Gleichung (4) des §. 1 (pag. 165) $\varrho_{,,}$ und $r_{,,}$ und berechnet mit diesen Werthen dann ganz gleichmässig in allen Hypothesen $n$ und $n''$ nach (10) und daran schliesst sich die Berechnung der Werthe $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$. Es erübrigt weiter noch die Ableitung der Werthe $r_{,}$, $r_{,,,}$ und $f'$, $f''$ und $f'''$ um das Verhältniss: $\frac{\text{Sect}}{\triangle}$ zu berechnen, und ehe ich an die Erklärung dieser Methode gehe, will ich zeigen, wie man diese nöthigen Grössen leicht aus dem Vorhandenen bestimmen kann.

## §. 5. Auflösung der Fundamentalgleichung und Ermittlung der Grössen $r_{,}$ $r_{,,}$ $r_{,,,}$ $f'$ $f''$ $f'''$.

Die versuchsweise Auflösung der Fundamentalgleichung in der Form, in welcher dieselbe in §. 1 aufgestellt ist, ist keineswegs sehr beschwerlich zur Auflösung, um so mehr, wenn man $r_{,,}$ als Funktion von $\varrho_{,,}$ in der Weise darstellt, wie diess geschehen ist bei der Bestimmung einer Kometenbahn; doch lassen sich noch weitere Transformationen vornehmen, die die Auflösung wesentlich erleichtern.

Ich schliesse mich ganz der Form an, die Gauss und Hansen hierfür in Vorschlag gebracht haben. Nennt man in dem ebenen Dreiecke zwischen Planet, Erde und Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung den Winkel an der Erde $180 - \delta$, den Winkel am Planeten $z$, so ist:

$$\varrho_{,,} = R_{,,} \frac{\sin(\delta - z)}{\sin z}$$
$$r_{,,} = R_{,,} \frac{\sin \delta}{\sin z}$$

Setzt man diese Werthe in die Fundamentalgleichung ein, so wird:

$$\frac{Q \sin z^4}{2\,(R_{,,} \sin\delta)^3} = \{K R_{,,} \cos\beta_{,,} \sin(\delta - z) + C \sin z\}\,\frac{P+1}{A+PB} - \sin z$$

Führt man nun Hilfswinkel ein, so kann man zunächst setzen:

$$C - KR_{''} \cos\beta_{''} \cos\delta = S \cos\sigma$$
$$KR_{''} \cos\beta_{''} \sin\delta = S \sin\sigma$$

und es ändert sich die Gleichung ab in

$$\frac{Q \sin z^4}{2 (R_{''} \sin\delta)^3} = \frac{P+1}{A+PB} S (\sin z \cos\sigma + \cos z \sin\sigma) - \sin z$$

Setzt man also weiter

$$\frac{P+1}{A+PB} S \sin\sigma = \Omega \sin\omega$$
$$\frac{P+1}{A+PB} S \cos\sigma - 1 = \Omega \cos\omega$$

und setzt der Kürze halber

$$\frac{Q}{2 (R_{''} \sin\delta)^3 \Omega} = M$$

so ist die Endform der Gleichung

$$M \sin z^4 = \sin (z + \omega)$$

aus welcher Gleichung $z$ durch Versuche zu ermitteln ist. Der früher erwähnte ungünstige Fall der Bestimmung (pag. 170) wird sich in dieser Gleichung zeigen, wenn die in Betracht kommende Wurzel von $z$ nahe an $90^\circ$ ist und $\delta$ ebenfalls sich nicht viel von demselben Werthe unterscheidet. Da der Voraussetzung nach $K = 0$ ist, so wird

$$\sigma = 0 \qquad \omega = 0$$

Es wird als hinlängliches Kriterium gelten für diesen Ausnahmsfall, da, wie früher vorausgesetzt wurde, $\delta$ niemals nahe an $180^\circ$ sein kann, wenn $\sin z$ nahe $\pm 1$ und $\sin\omega$ nahe der Null gleich ist. In diesem Falle werden gewöhnlich zwei brauchbare Wurzeln einander sehr nahe liegen, welches die wahre ist, können nur andere Beobachtungen entscheiden.

Die Berechnung aller dieser Ausdrücke, die zur Zusammenziehung der Gleichung (4) vorgenommen wurde, macht sich sehr einfach; die Berechnung von $S$ und $\sigma$ kann aber noch etwas bequemer gestellt werden. Zunächst wird man durch augenfällige Transformationen erreichen:

$$C \sin\delta = S \sin(\delta + \sigma)$$
$$C \cos\delta - KR_{''} \cos\beta_{''} = S \cos(\delta + \sigma)$$

Bestimmt man nun ausser dem Winkel $\delta$ noch die Neigung des durch den zweiten Planeten- und Sonnenort gelegten grössten Kreises gegen die Ekliptik $\psi$, so hat man für diese Bestimmung zunächst aus dem sich darbietenden sphärischen rechtwinkligen Dreiecke:

$$\sin(180 - \delta) \sin\psi = \sin\beta_{''}$$
$$\sin(180 - \delta) \cos\psi = \cos\beta_{''} \sin(\lambda_{''} - L_{''})$$
$$\cos(180 - \delta) = \cos\beta_{''} \cos(\lambda_{''} - L_{''})$$

oder auch:

$$\sin\delta \sin\psi = \sin\beta_{''}$$
$$\sin\delta \cos\psi = \cos\beta_{''} \sin(\lambda_{''} - L_{''})$$
$$\cos\delta = -\cos\beta_{''} \cos(\lambda_{''} - L_{''})$$

$\delta$ wird stets kleiner als 180° angenommen werden können, es ist demnach $\sin\delta$ stets positiv.

Setzt man nun für $C$ und $K$ aus den Gleichungen (2) des §. 1 (pag. 163) die Werthe ein, so wird zunächst erhalten, wenn man für $\cos\delta$ den eben angesetzten Werth einführt:

$$C\cos\delta - KR_{\prime\prime}\cos\beta_{\prime\prime} = R_{\prime\prime}\begin{bmatrix} +\cos\beta_{\prime\prime}\,\mathrm{tg}\,\beta_{\prime}\{\cos(\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime})\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime})-\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime\prime})\} \\ -\cos\beta_{\prime\prime}\,\mathrm{tg}\,\beta_{\prime\prime\prime}\{\cos(\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime})\sin(\lambda_{\prime}-L_{\prime\prime})+\sin(\lambda_{\prime\prime}-\lambda_{\prime})\} \\ +\sin\beta_{\prime\prime}\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime}) \end{bmatrix}$$

Bedenkt man nun, dass gesetzt werden kann

$$\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime\prime} = (\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime}) - (\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime})$$
$$\lambda_{\prime\prime}-\lambda_{\prime} = (\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime}) - (\lambda_{\prime}-L_{\prime\prime})$$

so wird

$$C\cos\delta - KR_{\prime\prime}\cos\beta_{\prime\prime} =$$
$$R_{\prime\prime}\,[\cos\beta_{\prime\prime}\sin(\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime})\,\{\mathrm{tg}\,\beta_{\prime}\cos(\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime})-\mathrm{tg}\,\beta_{\prime\prime\prime}\cos(\lambda_{\prime}-L_{\prime\prime})\}+\sin\beta_{\prime\prime}\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime})]$$

Setzt man also

$$D = R_{\prime\prime}\,\{\mathrm{tg}\,\beta_{\prime}\cos(\lambda_{\prime\prime\prime}-L_{\prime\prime}) - \mathrm{tg}\,\beta_{\prime\prime\prime}\cos(\lambda_{\prime}-L_{\prime\prime})\}$$

und substituirt man für $\cos\beta_{\prime\prime}\sin(\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime})$ und $\sin\beta_{\prime\prime}$ die entsprechenden Funktionen von $\delta$ und $\psi$ so wird erhalten

$$C\cos\delta - KR_{\prime\prime}\cos\beta_{\prime\prime} = D\sin\delta\cos\psi + R_{\prime\prime}\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime})\sin\psi\sin\delta$$

macht man daher überdiess

$$T\sin t = D$$
$$T\cos t = R_{\prime\prime}\sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime})$$

so wird

$$\frac{S}{\sin\delta}\sin(\delta+\sigma) = C$$
$$\frac{S}{\sin\delta}\cos(\delta+\sigma) = T\sin(t+\psi)$$

welche Ausdrücke man mit Vortheil zur Berechnung von $\sigma$ und $S$ benutzen wird. Es ist natürlich gleichgiltig, welche Annahme man über das Zeichen von $S$ macht, doch ist es angemessen für $(\delta+\sigma)$ den für $\delta$ sehr nahen Werth anzunehmen, da $\sigma$ eine kleine Grösse ist, wie sich diess später herausstellt. Man wird auch begreifen, dass eine Abänderung der bislang eingeführten Hilfsgrössen für die verschiedenen Hypothesen, wenn man von der Berücksichtigung der Aberration absieht, nicht nöthig wird, nur $\log M$ ändert sich ebensoviel ab, als sich $\log Q$ in den verschiedenen Annäherungen geändert hat. Dieser Umstand erleichtert sehr wesentlich die Durchführung der Rechnung.

Die bisher erlangten Grössen werden auch eine einfache Berechnung des massgebenden Winkels und des Gewichtes gestatten. Der massgebende Winkel ist bekanntlich die gegenseitige Neigung der durch den ersten und dritten beobachteten Ort hindurchgelegten grössten Kreises und des durch den zweiten Sonnenort und zweiten beobachteten Ort gezogenen Kreises. Um nun einen Ausdruck für den massgebenden Winkel ($x$) zu finden, muss ich die Bedeutung der eingeführten Hilfswinkel erläutern.

Die geometrische Bedeutung von $\psi$ und $\delta$ habe ich bereits oben angegeben. Der Bogen $(\delta + \sigma)$ wird sich als das Supplement des Abstandes des Durchschnittes der zwei erwähnten grössten Kreise vom zweiten Sonnenort erweisen; um diesen Nachweis zu liefern, nenne ich die Länge und Breite dieses Durchschnittspunktes $\lambda_*$ und $\beta_*$, so ist durch die Bedingung des grössten Kreises:

$$o = \operatorname{tg}\beta_, \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_*) - \operatorname{tg}\beta_* \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,) + \operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin(\lambda_* - \lambda_,)$$

für $\operatorname{tg}\beta_*$ kann aber auch gesetzt werden:

$$\operatorname{tg}\beta_* = \sin(\lambda_* - L_{,,}) \operatorname{tg}\psi$$

Nenne ich den Abstand des Durchschnittspunktes vom zweiten Sonnenorte $m$ so ist auch

$$\operatorname{tg}(\lambda_* - L_{,,}) = \cos\psi \operatorname{tg} m$$

Die auf Null reducirte Gleichung kann zunächst gestellt werden nachdem $\operatorname{tg}\beta_*$ durch $\sin(\lambda_* - L_{,,}) \operatorname{tg}\psi$ ersetzt ist und man zerlegt hat:

$$\lambda_{,,,} - \lambda_* = (\lambda_{,,,} - L_{,,}) - (\lambda_* - L_{,,})$$
$$\lambda_* - \lambda_, = (\lambda_* - L_{,,}) - (\lambda_, - L_{,,})$$

$$\cos(\lambda_* - L_{,,}) \{\operatorname{tg}\beta_, \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin(\lambda_, - L_{,,})\} =$$
$$\sin(\lambda_* - L_{,,}) \{\operatorname{tg}\beta_, \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,}) + \operatorname{tg}\psi \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,) - \operatorname{tg}\beta_{,,,} \cos(\lambda_, - L_{,,})\}$$

oder mit Rücksicht auf die für $\operatorname{tg} m$ aufgestellte Relation

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg}\beta_, \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin(\lambda_, - L_{,,})}{\cos\psi\, [\operatorname{tg}\beta_, \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,,} \cos(\lambda_, - L_{,,})] + \sin\psi \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,)}$$

Man sieht sofort, dass für den Zähler geschrieben werden kann: $-\frac{C}{R_{,,}}$, für den Nenner aber

$$\frac{C\cos\delta - KR_{,,}\cos\beta_{,,}}{R_{,,}\sin\delta} = \frac{T\sin(t + \psi)}{R_{,,}}$$

demnach wird auch

$$\operatorname{tg} m = -\operatorname{tg}(\delta + \sigma) = \operatorname{tg}(180 - (\delta + \sigma))$$

während $(180 - \delta)$ der Abstand des zweiten Planeten- und Sonnenortes ist, ist $180 - (\delta + \sigma)$ der Abstand des Durchschnittspunktes vom zweiten Sonnenort; $\sigma$ wird also eine sehr mässige Grösse im Allgemeinen sein. Die Bedeutung des Winkels $t$ ist jetzt nur noch zu eruiren.

Es ist:

$$\operatorname{tg} t = \frac{D}{R_{,,}\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,)} = \frac{\operatorname{tg}\beta_, \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,,} \cos(\lambda_, - L_{,,})}{\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,)}$$

Zerlegt man wieder

$$\lambda_{,,,} - L_{,,} = (\lambda_{,,,} - \lambda_,) + (\lambda_, - L_{,,})$$

so erhält man

$$\operatorname{tg} t = \frac{-\operatorname{tg}\beta_{,,,} + \operatorname{tg}\beta_, \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_,)}{\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,)} \cos(\lambda_, - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_, \sin(\lambda_, - L_{,,})$$

Bezeichne ich nun den aufsteigenden Knoten des durch die beiden äussersten Orte gelegten grössten Kreises mit $\Omega_0$, seine Neigung mit $i_0$, so wird sofort aus der eben entwickelten Gleichung erhalten:

$$-\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} i_0 \cos(\lambda_, - \Omega_0) \cos(\lambda_, - L_{,,}) + \operatorname{tg} i_0 \sin(\lambda_, - \Omega_0) \sin(\lambda_, - L_{,,})$$

woraus sich findet:

$$\cotg(\iota - 90^0) = \tg i_0 \cos(L_{\prime\prime} - \Omega_0)$$

Fällt man also vom zweiten Sonnenort ein Perpendikel auf den die äussersten Beobachtungen verbindenden grössten Kreis, so wird der Winkel zwischen der Ekliptik und dem Perpendikel sein: $(\iota - 90^0)$ und der Winkel zwischen dem Perpendikel und dem den zweiten Planeten- und Sonnenort verbindenden grössten Kreis $180 - (\iota - 90^0) - \psi$ oder $270^0 - (\iota + \psi)$; und es ist, wenn ich den massgebenden Winkel mit $x$ bezeichne und jetzt das rechtwinklige Dreieck zwischen den beiden oft erwähnten Kreisen und dem Perpendikel betrachte, dessen Hypothenuse also $180 - (\delta + \sigma)$ ist, für diesen

$$\tg x = \frac{\tg(\iota + \psi)}{\cos(\delta + \sigma)}$$

und das Gewicht (pag. 170):

$$G = \sin x \sin \delta$$

Nach dieser Digression über die Bedeutung der Hilfsgrössen kehre ich wieder zu der Gleichung:

$$M \sin z^4 = \sin(z + \omega)$$

zurück. Die Auflösung dieser Gleichung wird ohne viel Mühe durch Versuche geschehen können, und es ist klar, dass im Allgemeinen vier reelle Wurzeln dieser Gleichung genügen können; die Untersuchung über die Zahl der brauchbaren Wurzeln bietet in sofern ein Interesse, indem in seltenen Fällen zwei Lösungen für die vorgelegte Aufgabe möglich sind; wo über die Richtigkeit der einen oder anderen Wurzel nur andere Beobachtungen entscheiden können oder wo durch anderweitige Rechnungen genäherte Werthe für $r_{\prime\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime}$ bekannt sind, wie diess besonders bei Kometenbahnen stattfinden wird, werden die zu den Wurzeln gehörigen Werthe von $\varrho_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ meist leicht entscheiden lassen, welche Wurzel die richtige ist. Die Wurzeln $z > \delta$ müssen ausser Acht gelassen werden, da sonst nach der Gleichung

$$\varrho_{\prime\prime} = \frac{R_{\prime\prime} \sin(\delta - z)}{\sin z}$$

$\varrho_{\prime\prime}$ eine negative Grösse würde, was nach der Natur des Problems unmöglich ist. Häufig wird der Gleichung ebenfalls ein Werth von $z$ genügen, der sehr nahe an $\delta$ ist und ebenfalls der Bedingung $z < \delta$ entsprechen kann. Diese Wurzel bezieht sich auf die Erdbahn und wird $\varrho_{\prime\prime}$ nahe an Null geben. Die Erklärung dieses Umstandes ist sehr leicht. Die beobachteten Orte geben nichts als Richtungslinien, die jedenfalls sehr nahe am Erdcentrum vorbeigehen, und da die für den Himmelskörper eingeführten Näherungen für $Q$ ebenfalls für die Erde gelten, so darf es nicht Wunder nehmen, dass auch diese den Bedingungen genügt. Man sieht leicht ein, dass aus praktischen Gründen meistens nur dann zwei plausible Lösungen möglich sind, wenn die Bahnrechnung sich auf einen Kometen bezieht.

Weitere Betrachtungen können füglich ausgeschlossen werden, da in der Anwendung selten oder nie bei gehöriger Umsicht ein Zweifel über die Wahl der Wurzel entstehen kann. Als Ausnahmefall darf wol eine solche doppelte Lösung nicht angesehen werden, noch darf der Eintritt einer solchen wunderbar erscheinen, da dieses Alles begründet ist in der Auflösung einer Gleichung höheren Grades.

Für die schnelle und sichere Auflösung der obigen Gleichung lassen sich einige brauchbare Winke geben. Bei Planeten, die wol meistens hier in Betracht kommen, wird über $z$ keine bestimmte Annahme gemacht werden können, da die Relation

$$\sin z = \frac{R_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}} \sin \delta$$

wegen der Unkenntniss von $r_{\prime\prime}$ nicht hinreichend ist. Bei Kometen bei denen man stets diese Art der Bahnbestimmung erst anwenden wird, wenn für $r_{\prime\prime}$ genäherte Werthe gegeben sind, mag diese Relation dienlich sein. Bei den kleinen Planeten wird man aus praktischen Gründen nur behaupten dürfen, dass $z$ ein spitzer Winkel ist, demnach wird $z$ nicht viel von $-\omega$ verschieden sein und man wird, wenn der Planet nicht zu weit ausserhalb der Opposition, für die erste Annäherung setzen dürfen:

$$\sin(z + \omega) = M \sin \omega^4$$

wodurch ein genäherter Werth von $\omega$ bekannt wird; mit diesem wird die Rechnung wiederholt so lange bis ein halbwegs angenäherter Werth erlangt ist. Diese Rechnungen sind etwa mit 4—5stelligen Tafeln durchzuführen; man wird hierbei auf eine rasche Konvergenz nicht rechnen dürfen, wenn $(z + \omega)$ ein grösserer Bogen ist. Ich werde das eben Vorgebrachte durch ein Beispiel erläutern. Es sei

$$\log M = 0.867098 \qquad \omega = -11^\circ 8' 31''0$$

es wird daher sein:

| Versuch | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\sin z^4$ | 7.1440 | 7.2324 | 7.25180 |
| $(\sin z + \omega)$ | 8.0111 | 8.0995 | 8.11890 |
| $(z + \omega)$ | $0^\circ 35'3$ | $0^\circ 43'2$ | $0^\circ 45' 12''$ |
| $z$ | $11^\circ 43'8$ | $11^\circ 51' 45''$ | $11^\circ 53' 43''$ |

Der dritte Versuch gibt ein ziemlich genähertes Resultat; von hier ab aber wird man weit zweckmässiger die Versuche anders leiten. Man berechnet nun mit dem letzten Werth von $z$ genau

$$\log M + 4 \log \sin z - \log \sin(z + \omega) = \Delta$$

eine Relation, welche, sobald für $z$ der richtige Werth gegeben ist, $\Delta = 0$ machen müsste. Es muss demnach, wenn es sich um kleine Aenderungen handelt, sein:

$$4\, d \log \sin z - d \log \sin(z + \omega) = -\Delta$$

wenn die auftretende Differenz fortgeschafft werden soll. $d \log \sin z$ und $d \log \sin(z + \omega)$ entlehnt man aus den Logarithmentafeln direkt, indem man die Aenderungen der Logarithmen für 1″ herausschreibt. Sei diese Aenderung für: log sin $z$ gleich $a$, für: log sin $(z + \omega)$ gleich: $b$ so wird sogleich

$$dz = \frac{\Delta}{b - 4a}$$

Es ist ersichtlich, dass für $\Delta$ dieselbe Einheit hierbei angenommen wird, die als massgebend für $a$ und $b$ gilt.

Es findet sich für

$$z = 11^\circ 53' 43''0 \quad \text{und} \quad z + \omega = 0^\circ 45' 12''0$$

$$a = 10.0 \qquad b = 160.0$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned} \sin z^4 &= 7.256512 \\ M \sin z^4 &= 8.123610 \\ \sin (z+\omega) &= 8.118852 \\ \Delta &= \quad +4758 \end{aligned}\right\} \quad dz = \frac{\Delta}{120} = 39''6$$

Es wird für den nächsten Versuch

$$z = 11^\circ 54' 22''6 \qquad z+\omega = 0^\circ 45' 51''6$$

$$\left.\begin{aligned} \sin z^4 &= 7.258092 \\ M \sin z^4 &= 8.125190 \\ \sin (z+\omega) &= 8.125147 \\ \Delta &= \quad +43 \end{aligned}\right\} \quad dz = +0''4\,.$$

Der definitive Werth von $z$ ist demnach $11^\circ 54' 23''0$. Man sieht, wie rasch man sich dem Ziele genähert hat.

In den verschiedenen Hypothesen wird an der Gleichung nichts abgeändert, als $\log M$, welcher Logarithmus nur um so viel geändert erscheint gegen die vorausgehende Hypothese, als $\log Q$ abgeändert wurde. Hat man demnach bei dem Uebergange von der einen Hypothese zur folgenden diesen Logarithmus um $d \log Q$ Einheiten der letzten Decimale verbessert, so wird sofort der neue Werth von $z$, den ich mit $z_2$ bezeichnen will, während $z_1$ den Werth der vorausgehenden Hypothese vorstellt, mit meist ausreichender Genauigkeit bestimmt nach:

$$z_2 = z_1 + \frac{d \log Q}{b - 4a}$$

Es sei im obigen Beispiel der neue Werth von $\log Q$ um 480 Einheiten der sechsten Decimale grösser, als der vorausgehende, es wird demnach sofort

$$z_2 = 11^\circ 54' 27''0, \quad \text{weil} \quad dz_1 = \frac{480}{120}$$

Man sieht, wie durch dieses bislang wenig gekannte Verfahren die Rechnung wesentlich abgekürzt wird in den verschiedenen Hypothesen.

Ist $z$ bestimmt, so wird nach den bekannten Formeln $\varrho_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ gesucht und mit Hilfe der in Anwendung gekommenen Werthe von $Y_{\prime\prime\prime}$ und $Y_{\prime}$ wird $n$ und $n''$ ermittelt (pag. 177) und dann nach den bereits entwickelten Formeln $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ (pag. 173) bestimmt. Die Feststellung der zugehörigen heliocentrischen Orte wird jetzt sehr einfach geschehen. Bezeichne ich mit $l$, $b$ die heliocentrische Länge und Breite des Planeten, und mit $r$ den Radiusvector, und führe ich die Unterscheidung für die einzelnen Orte durch Accente durch, so wird, wenn man für die verschiedenen Hypothesen berechnet ein für allemal

$$R_s' = R_{\prime} \sin (\lambda_{\prime} - L_{\prime}) \qquad R_s''' = R_{\prime\prime\prime} \sin (\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime})$$

$$R_c' = - R_{\prime} \cos (\lambda_{\prime} - L_{\prime}) \qquad R_c''' = - R_{\prime\prime\prime} \cos (\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime})$$

zu der verlangten Transformation sich ergeben:

$$r_{\prime} \cos (l_{\prime} - \lambda_{\prime}) \cos b_{\prime} = \varrho_{\prime} \cos \beta_{\prime} + R_c' \qquad r_{\prime\prime\prime} \cos (l_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime\prime}) \cos b_{\prime\prime\prime} = \varrho_{\prime\prime\prime} \cos \beta_{\prime\prime\prime} + R_c'''$$

$$r_{\prime} \sin (l_{\prime} - \lambda_{\prime}) \cos b_{\prime} = R_s' \qquad r_{\prime\prime\prime} \sin (l_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime\prime}) \cos b_{\prime\prime\prime} = R_s'''$$

$$r_{\prime} \sin b_{\prime} = \varrho_{\prime} \sin \beta_{\prime} \qquad r_{\prime\prime\prime} \sin b_{\prime\prime\prime} = \varrho_{\prime\prime\prime} \sin \beta_{\prime\prime\prime}$$

Aus $l_{\prime}$ $b_{\prime}$ und $l_{\prime\prime\prime}$ $b_{\prime\prime\prime}$ kann leicht der zwischenliegende heliocentrische Bogen $2f''$ berechnet werden, denn die Formel

$$\cos 2f'' = \sin b_{\prime} \sin b_{\prime\prime\prime} + \cos b_{\prime} \cos b_{\prime\prime\prime} \cos (l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime})$$

gibt zweckmässig umgesetzt für den Fall, dass $f''$ ein mässiger Winkel ist,

$$\sin^2 f'' = \sin^2 \tfrac{1}{2} (l_{,,,} - l_,) \cos b_, \cos b_{,,,} + \sin^2 \tfrac{1}{2} (b_{,,,} - b_,) .$$

Ganz ähnlich könnte man $f'$ und $f'''$ erhalten, wenn man $l_{,,}$ und $b_{,,}$ berechnen würde. Doch es ist auch

$$n = \frac{r_{,,} \sin 2f'}{r_, \sin 2f''} \qquad n'' = \frac{r_{,,} \sin 2f'''}{r_{,,,} \sin 2f''}$$

woraus sich bestimmt

$$\sin 2f' = \frac{r_,}{r_{,,}} n \sin 2f'' \qquad \sin 2f''' = \frac{r_{,,,}}{r_{,,}} n'' \sin 2f''$$

Hierbei findet eine theilweise Probe statt, dass $f' + f''' = f''$ sein muss, welche Probe stets bis auf die unvermeidlichen Unsicherheiten der logarithmischen Rechnung übereinstimmen muss.

Es sind nun $r, r_{,,} r_{,,,}$ und die heliocentrischen Bögen zwischen denselben bestimmt; es kann nun an die Bestimmung der Verhältnisse: $\frac{Sector}{\triangle}$ für die verschiedenen Dreiecke geschritten werden, um verbesserte Werthe für $Y_,$ und $Y_{,,,}$ zu finden. Ich setze voraus für den Augenblick, dass diess schon gelöst wäre, (die Ausführung selbst ist dem nächsten Paragraphen vorbehalten) so sieht man sofort ein, dass man sich durch dieses Verfahren immer mehr der Wahrheit nähern wird und in ziemlich rascher Weise. Ist die heliocentrische Bewegung aber schon sehr gross gewesen, etwa über 40°, so würden zahlreiche Hypothesen gemacht werden müssen, um endlich die wahren Werthe zu erhalten; sind aber einmal drei Hypothesen gemacht worden, so lässt sich ein Verfahren angeben, welches rasch das Ziel erreichen lässt und welches ganz analog dem Vorgange ist, der bei der versuchsweisen Ermittlung des Werthes $\varrho_{,,}$ bei Olbers' Methode der Bahnbestimmung in Anwendung kam; es muss jedoch hier das Verfahren auf die zwei Werthe $Y_{,,,}$ und $Y_,$ ausgedehnt werden, indem diese zur Berechnung von $n$ und $n''$ nöthig sind; die Kenntniss des wahren Werthes von $Q$ allein würde die Durchführung der Rechnung also nicht gestatten. Unterscheide ich die Werthe einer jeden Hypothese durch vorgesetzte kleine Indices, so wird sein:

| | |
|---|---|
| die ersten Näherungswerthe | ${}_0Y_,$ und ${}_0Y_{,,,}$ |
| die Werthe nach Abschluss der 1. Hyp. | ${}_1Y_,$ und ${}_1Y_{,,,}$ |
| » » » » » 2. » | ${}_2Y_,$ und ${}_2Y_{,,,}$ |
| » » » » » 3. » | ${}_3Y_,$ und ${}_3Y_{,,,}$ |
| die wahren Werthe seien | $Y_,$ und $Y_{,,,}$ |

Es ist klar, dass man statt der numerischen Werthe auch die Logarithmen dieser Werthe substituiren darf, ohne dass an den folgenden Vorschriften eine wesentliche Aenderung vorzunehmen wäre, und in der That ist es in der Anwendung etwas bequemer, diese letztern in die Rechnung einzuführen. Setzt man zur Abkürzung für die Differenzen

$${}_1Y_, - {}_0Y_, = a_, \qquad {}_1Y_{,,,} - {}_0Y_{,,,} = b_,$$
$${}_2Y_, - {}_1Y_, = a_{,,} \qquad {}_2Y_{,,,} - {}_1Y_{,,,} = b_{,,}$$
$${}_3Y_, - {}_2Y_, = a_{,,,} \qquad {}_3Y_{,,,} - {}_2Y_{,,,} = b_{,,,}$$

wofür auch die Differenzen der Logarithmen gesetzt werden müssen, wenn man die

Verbesserungen der Logarithmen von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ sucht und bezeichnet den Koefficienten der Aenderung von $Y_{,}$ (oder $\log Y_{,}$), so weit derselbe von dem Abstande des wahren Werthes von $Y_{,}$ von dem angenommenen abhängig ist, mit: $\alpha$, und den Coefficienten aber der die Aenderung von $Y_{,}$ als lineare Funktion der fehlerhaften Annahme über $Y_{,,,}$ darstellt mit: $\beta$, und ebenso die Koefficienten für die Funktion $Y_{,,,}$ mit $\gamma$ und $\delta$, so wird zunächst sein:

$$\begin{aligned}
a_{,} &= \alpha\,({}_0Y_{,} - Y_{,}) + \beta\,({}_0Y_{,,,} - Y_{,,,})\\
a_{,,} &= \alpha\,({}_1Y_{,} - Y_{,}) + \beta\,({}_1Y_{,,,} - Y_{,,,})\\
a_{,,,} &= \alpha\,({}_2Y_{,} - Y_{,}) + \beta\,({}_2Y_{,,,} - Y_{,,,})\\
b_{,} &= \gamma\,({}_0Y_{,} - Y_{,}) + \delta\,({}_0Y_{,,,} - Y_{,,,})\\
b_{,,} &= \gamma\,({}_1Y_{,} - Y_{,}) + \delta\,({}_1Y_{,,,} - Y_{,,,})\\
b_{,,,} &= \gamma\,({}_2Y_{,} - Y_{,}) + \delta\,({}_2Y_{,,,} - Y_{,,,})
\end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen enthalten die sechs Unbekannten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und $Y_{,}$, $Y_{,,,}$. Die Kenntniss der Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ ist ohne Interesse, man eliminirt dieselben und bestimmt die Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$, welche Bestimmung völlig richtig wäre, wenn die Voraussetzung der linearen Aenderung völlig zutreffen würde. Eliminirt man, so wird erhalten:

$$Y_{,} = \frac{{}_1Y_{,}\,(a_{,,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,,}) + {}_2Y_{,}\,(a_{,,,}b_{,} - a_{,}b_{,,,}) + {}_3Y_{,}\,(a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,})}{(a_{,,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,,}) + (a_{,,,}b_{,} - a_{,}b_{,,,}) + (a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,})}$$

$$Y_{,,,} = \frac{{}_1Y_{,,,}\,(a_{,,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,,}) + {}_2Y_{,,,}\,(a_{,,,}b_{,} - a_{,}b_{,,,}) + {}_3Y_{,,,}\,(a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,})}{(a_{,,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,,}) + (a_{,,,}b_{,} - a_{,}b_{,,,}) + (a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,})}$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass ${}_3Y_{,}$ und ${}_3Y_{,,,}$ die der Wahrheit nächsten Werthe sind; man kann aber leicht die obigen Ausdrücke so umgestalten, dass $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ als korrigirte Werthe von ${}_3Y_{,}$ und ${}_3Y_{,,,}$ erscheinen, da nach dem obigen Schema ist:

$$\begin{aligned}
{}_1Y_{,} &= {}_3Y_{,} - (a_{,,} + a_{,,,})\\
{}_2Y_{,} &= {}_3Y_{,} - a_{,,,}\\
{}_1Y_{,,,} &= {}_3Y_{,,,} - (b_{,,} + b_{,,,})\\
{}_2Y_{,,,} &= {}_3Y_{,,,} - b_{,,,}
\end{aligned}$$

es wird dann

$$Y_{,} = {}_3Y_{,} + \frac{(a_{,,} + a_{,,,})\,(a_{,,,}b_{,,} - a_{,,}b_{,,,}) + a_{,,,}\,(a_{,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,})}{(a_{,,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,,}) + (a_{,,,}b_{,} - a_{,}b_{,,,}) + (a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,})}$$

$$Y_{,,,} = {}_3Y_{,,,} + \frac{(b_{,,} + b_{,,,})\,(a_{,,,}b_{,,} - a_{,,}b_{,,,}) + b_{,,,}\,(a_{,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,})}{(a_{,,}b_{,,,} - a_{,,,}b_{,,}) + (a_{,,,}b_{,} - a_{,}b_{,,,}) + (a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,})}$$

Es kann hier bemerkt werden, dass die letzte Umgestaltung nur dann gestattet ist, wenn man streng nach dem Rechnungsschema die Hypothesen nach einander bildet; ist in diesem Schema ein Sprung geschehen, etwa in der Weise, wie es jetzt die Einführung der vierten Hypothese veranlasst, oder wie dies der Fall wäre, wenn man durch willkürliche Variation genäherter Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ die wahren ermitteln wollte, dann müssen die ersteren Formeln angewendet werden. Es hat dann auch in der That wenig Vortheil, die wahren Werthe als Korrektionen bestimmter Annahmen darzustellen, da man im Allgemeinen nicht weiss, welcher der der Wahrheit am nächsten kommende Werth ist.

## §. 6. Ermittlung der verbesserten Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$.

Im Vorausgehenden wurden $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ als Funktionen der Verhältnisse der Sectoren zu den Dreiecken dargestellt und gefunden

$$Y_{,} = \frac{(\eta_{,,} - 1) - (\eta_{,,,} - 1)}{\eta_{,,,}} 2\, r_{,,}^3$$

$$Y_{,,,} = \frac{(\eta_{,,} - 1) - (\eta_{,} - 1)}{\eta_{,}} 2\, r_{,,}^3$$

und es wird sich die Aufgabe stellen aus $r$, $r_{,,}$ und $r_{,,,}$ einerseits und $f' f''$ und $f'''$ andererseits die Werthe für $\eta$, $\eta_{,,}$ und $\eta_{,,,}$ zu ermitteln. Nach pag. 43 fand sich

$$2\, Sect = \tau \sqrt{p}$$

wobei die Masse des Himmelskörpers der Null gleich gesetzt ist. Es ist aber die Fläche des Dreieckes ($\triangle$) leicht zu finden nach

$$2 \triangle = r r' \sin 2f$$

demnach ist

$$\eta_{,} = \frac{\tau_{,} \sqrt{p}}{r_{,,} r_{,,,} \sin 2f'}$$

$$\eta_{,,} = \frac{\tau_{,,} \sqrt{p}}{r_{,} r_{,,,} \sin 2f''}$$

$$\eta_{,,,} = \frac{\tau_{,,,} \sqrt{p}}{r_{,} r_{,,} \sin 2f'''}$$

und es kommt nur darauf an, $p$ als Funktion der oben angesetzten Grössen auszudrücken. Da die Ableitung für alle drei Verhältnisse völlig gleich würde, so ist es nur nöthig, eine Kombination vorzunehmen. Ich bezeichne demnach die begrenzenden Radien mit: $r$ und $r'$, den zwischen denselben eingeschlossenen Winkel mit: $2f$, die Zwischenzeit multiplicirt mit der Konstante des Sonnensystems ($k$) mit: $\tau$. Bei der folgenden Ableitung muss nun unterschieden werden, ob man es mit einer elliptischen oder hyperbolischen Bahn zu thun hat. Die letztere in ihrer Allgemeinheit zu behandeln wird wohl kaum nöthig sein, da man mit Sicherheit nur hyperbolische Bahnen von parabolischem Charakter erwarten darf; in diesem Falle wird aber eine Grösse ($\sin \frac{1}{2} g^2$) zwar negativ, die in der Ellipse positiv ist, muss aber vermöge des parabolischen Charakters der Bahn stets sehr klein bleiben; man wird deshalb mit Vortheil hierbei nur Reihenentwicklungen gebrauchen, die ganz gleichmässig für die Ellipse und Hyperbel gelten.

Gauss hat nun die Bestimmung der Unbekannten $p$ selbst nicht durchgeführt, sondern eine neue Unbekannte in das Problem aufgenommen, und zwar die Differenz der excentrischen Anomalien ($2g$) und stellt zwei höhere Gleichungen auf, die untermischt die beiden Unbekannten $\eta$ und $g$ enthalten; es wird sich später herausstellen, dass eine geschlossene Lösung aus diesen Gleichungen für $\eta$ und $g$ nicht möglich ist, da eine dieser Gleichungen transcendent ist; die Hilfsmittel, die jedoch zur Lösung sich darbieten, reduciren die letztere auf eine relativ sehr einfache Rechnung.

Nennt man die wahren Anomalien $v$ und $v'$, die excentrischen $E$ und $E'$, und es sei $e = \sin \varphi$ die Excentricität, ferner $a$ die halbe grosse Achse, so hat man nach pag. 48 die folgenden Ausdrücke:

$$\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E$$
$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E$$
$$\sqrt{r'}\cos\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E'$$
$$\sqrt{r'}\sin\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E'$$

Führt man nun die Summen und Differenzen der halben Winkel ein und setzt

$$F = \tfrac{1}{2}(v'+v) \qquad G = \tfrac{1}{2}(E'+E)$$
$$f = \tfrac{1}{2}(v'-v) \qquad g = \tfrac{1}{2}(E'-E)$$

so wird man erhalten, wenn man die erste und dritte der obigen Gleichungen und die zweite und vierte multiplicirt und die Resultate addirt

$$\sqrt{rr'}\cos f = a\cos g - ae\cos G$$

durch Subtraktion findet sich aber

$$\sqrt{rr'}\cos F = a\cos G - ae\cos g$$

Diese Ausdrücke kann man etwas umgestalten, um später bequemer die Summen der Winkel eliminiren zu können. Es findet sich zunächst, indem man $e\cos G$ und $e\cos F$ nur durch die Differenzen der Winkel ausdrückt

$$e\cos G = \cos g - \frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos f \qquad (1)$$

und durch Substitution dieses Werthes in die zweite Gleichung

$$e\cos F = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{rr'}}\cos g - \cos f$$

da aber ist:

$$p = a(1-e^2)$$

so kann etwas kürzer geschrieben werden:

$$e\cos F = \frac{p}{\sqrt{rr'}}\cos g - \cos f \qquad (2)$$

Es lässt sich $F$ auch durch $p$ auf eine andere Weise darstellen, denn die Polargleichung für die Kegelschnitte gibt

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$$
$$\frac{p}{r'} = 1 + e\cos v'$$

addirt man beide Gleichungen und führt statt der Summe der Cosinus die entsprechenden Werthe ein, so wird

$$p\,\frac{r+r'}{rr'} = 2 + 2e\cos F\cos f$$

oder

$$e\cos F = \frac{p}{2}\cdot\frac{r+r'}{rr'\cos f} - \frac{1}{\cos f}$$

Bestimmt man nun aus dieser Gleichung und aus der Gleichung (2) den Werth von $p$ nachdem $e\cos F$ eliminirt wurde, so findet sich

$$p = \frac{2rr'\sin f^2}{r+r'-2\cos g\cos f\sqrt{rr'}}$$

Man hat aber die Gleichung

$$\eta = \frac{\tau\sqrt{p}}{2rr'\sin f\cos f}$$

und es wird daher auch geschrieben werden können

$$\eta^2 = \frac{\tau^2}{2\,rr' \cos f^2 \,(r + r' - 2 \cos g \cos f \sqrt{rr'})} \qquad (3)_a$$

Die eben gefundene Relation ist keineswegs für die Rechnung bequem und enthält die zwei Unbekannten $\eta$ und $g$; da aber unter Umständen eine Lösung durch Versuche nöthig wird, so wird es ganz Zweck entsprechend sein, diesen Ausdruck in eine geschmeidigere Form überzuführen. Setzt man zunächst

$$m = \frac{\tau^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3}$$

so wird

$$\eta^2 = \frac{4\, m \cos f \sqrt{rr'}}{r + r' - 2 \cos g \cos f \sqrt{rr'}} = \frac{m}{\dfrac{r + r'}{4 \cos f \sqrt{rr'}} - \frac{1}{2} \cos g}$$

setzt man nun mit Gauss

$$l = \frac{r + r'}{4 \cos f \sqrt{rr'}} - \frac{1}{2}$$

so wird

$$\eta^2 = \frac{m}{l + \sin \frac{1}{2} g^2} \qquad (3)_b$$

Die Berechnung von $l$ lässt sich auch etwas vereinfachen. Setzt man

$$\operatorname{tg}\,(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}$$

so ist

$$\frac{r + r'}{\sqrt{rr'}} = \sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \omega) + \operatorname{cotg}^2 (45^\circ + \omega)$$

$$= 2 + \Big(\operatorname{tg}\,(45^\circ + \omega) - \operatorname{cotg}\,(45^\circ + \omega)\Big)^2 = 2 + 4 \operatorname{tg}^2 2\,\omega$$

und es wird

$$l = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f + \operatorname{tg}^2 2\,\omega}{\cos f}$$

Ich kehre nun wieder zu der Gleichung $(3)_a$ mit der Bemerkung zurück, dass dieselbe zwei Unbekannte $\eta$ und $g$ enthält, demnach die Aufstellung einer weiteren Gleichung nöthig wird zwischen diesen beiden Grössen, um eine Bestimmung derselben zu erhalten. Diess kann auf die folgende Weise geschehen. Zählt man die Zeiten vom Perihel ab, so wird für die mittlere Anomalie sein

$$M = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\, T = E - e \sin E$$

$$M' = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\, T' = E' - e \sin E'$$

oder durch Subtraktion der ersteren von der zweiten und Transformation

$$\frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}} = 2\,g - 2\,e \sin g \cos G \qquad (4)$$

Für $e \cos G$ ist bereits in (1) ein Ausdruck gefunden worden, der aber noch die Grösse $a$ enthält, welche ebenfalls in (4) erscheint; dieselbe muss aber, da sie unbekannt ist, eliminirt werden. Es ist aber (pag. 47)

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$$

$$\frac{r'}{a} = 1 - e \cos E'$$

und durch Addition und Transformation wird gefunden

$$\frac{r+r'}{a} = 2 - 2e \cos g \cos G \qquad (5)$$

Mit Rücksicht auf (1) wird abgr für diese Gleichung geschrieben werden können:

$$\frac{1}{a} = \frac{2 \sin g^2}{r + r' - 2 \cos g \cos f \sqrt{rr'}}$$

Setzt man nur für den Nenner dieses Ausdruckes den Werth nach $(3)_a$ ein, so findet sich

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{2\eta \sin g \cos f}{\tau}\right)^2 rr' \qquad (6)$$

Die Gleichung (4) lässt finden, wenn man nun in dieselbe $e \cos G$ nach (1) substituirt

$$\frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2\frac{\sqrt{rr'}}{a} \sin g \cos f$$

Ersetzt man $a$ in dieser Gleichung durch die Werthe aus (6), so wird, wenn man, wie diess schon oben geschehen ist, einsetzt,

$$m = \frac{\tau^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3}$$

erhalten:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{\eta^3}{m} - \frac{\eta^2}{m}$$

welches die zweite Gleichung zwischen $\eta$ und $g$ ist und diese Gleichung ist transcendent. Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe ist demnach zurückgeführt auf die zwei Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 &= \frac{m}{l + \sin^2 \frac{1}{2} g} \\ \frac{\eta^3}{m} - \frac{\eta^2}{m} &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Die Gleichung

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{p}}{rr' \sin 2f}$$

zeigt, dass sobald $2f$ grösser als 180° wird, $\eta$ negativ wird; dieser Fall muss jedoch aus anderen Gründen bei ersten Bahnbestimmungen ausgeschlossen bleiben, und die später folgenden Betrachtungen werden nur ihre Anwendung finden unter der Annahme, dass die heliocentrische Bewegung mässig ist (etwa $< 60°$). Ist aber die heliocentrische Bewegung klein, so wird die Berechnung des Ausdruckes $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ mit Hilfe der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln nicht möglich sein, und es müssen demnach für eine versuchsweise Auflösung der obigen Gleichungen (7) besondere Hilfsmittel geschaffen werden; ist aber $2g$ mässig gross, so sind solche vorhanden, welche eine fast direkte Auflösung des Problems gestatten.

Rechnet man aus zwei sehr entfernten heliocentrischen Orten die Bahn, so wird man stets schon Näherungswerthe kennen und die versuchsweise Auflösung der Gleichung (7) wird niemals auf Schwierigkeiten stossen, wenn man sich vergegenwärtigt, dass sobald $\sin 2f$ negativ wird, $\eta^3$ negativ anzunehmen ist. Die Kenntniss von $\eta$ aber wird in diesem Falle nicht von Belang sein und nur der Werth $g$ wird für die weiteren Rech-

nungen nöthig. Man wird desshalb $\eta$ zweckmässig eliminiren. Dividirt man die Gleichungen (7), so wird, wenn man zur Abkürzung setzt

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = a$$

$$l + \sin^2 \tfrac{1}{2}g = b$$

erhalten

$$\eta = ab + 1$$

quadrirt man und eliminirt mit Hilfe der ersten Gleichung in (7) $\eta^2$ so wird gefunden

$$m = (ab + 1)^2 b \qquad (8)$$

Wäre $a$ bekannt, so würde die Bestimmung von $b$ durch eine kubische Gleichung sofort möglich sein, welche Bemerkung bei den spätern Untersuchungen von Wichtigkeit ist. Bei dem aber hier vorausgesetzten Fall (grosse heliocentrische Bewegung) werden in der Regel genäherte Werthe von $g$ bekannt sein; man wird demnach mit dem wahrscheinlichsten Werthe von $g$ und zwei beliebig abgeänderten $(g - x)$ und $(g + x)$ die Rechnung für $a$ und $b$ durchführen. Man wird, wenn der Werth von $g$ nur ziemlich nahe bekannt ist, $x$ lieber grösser annehmen als zu klein, um sicher den wahren Werth innerhalb der Grenzen $(g - x)$ und $(g + x)$ einzuschliessen. Die angenommenen Werthe von $g$ werden drei verschiedene Resultate für $m$ geben, die Vergleichung mit dem wahren Werthe von $m$ wird den genauen Werth von $g$ leicht finden lassen und mit um so grösserer Schärfe, wenn man, da drei Werthe bekannt sind, die Interpolation mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen durchführt; wäre auch die Berücksichtigung dieser nicht mehr ausreichend, so wird man mit dem verbesserten Werthe die Rechnung wiederholen und neuerdings durch Interpolation den wahren Werth zu erhalten suchen; ist aber $g$ sehr nahe richtig bekannt, so wird man $x$ nicht so gross zu nehmen brauchen, dass die Berücksichtigung der zweiten Differenzen nothwendig wird.

Viel wichtiger und schwieriger wird die Behandlung des Problems, wenn $g$ klein wird. Ich werde zuerst die von Gauss gegebene Methode vortragen, die auf bequeme Weise eine strenge Lösung des Problems gibt innerhalb sehr weiter Grenzen. Hansen hat aber ein Verfahren angegeben, welches bei ersten Bahnbestimmungen wohl stets ausreichend sein dürfte, indem es auch bei 30° heliocentrischer Bewegung völlig genügende Werthe gibt und in der Anwendung überaus einfach ist, so dass es in diesen Fällen dem Gauss'schen Verfahren vorzuziehen ist; da aber die eben gesetzten Grenzen, wenn der Planet lange in der ersten Opposition verfolgt wurde, nicht ausreichend sind und die oben angegebene versuchsweise Lösung noch immer beschwerlich ist, so muss das Gauss'sche Verfahren als höchst zweckmässige Ergänzung in die vorliegende Untersuchung aufgenommen werden.

Vor allem wird es nöthig, den Ausdruck

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = a$$

so zu transformiren, dass die Berechnung desselben leicht durchgeführt werden kann, und man wird sich die Aufgabe setzen müssen, $a$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen einer kleinen Grösse aufzulösen. Gauss wählt hierfür

$$x = \sin \tfrac{1}{2} g^2$$

Der Grenzwerth von $a$ wird für ein unendlich kleines $g$ gleich $\frac{4}{3}$, denn löst man im Zähler $\sin 2g$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen des Bogens $2g$ auf, so wird

$$a = \frac{\frac{(2g)^3}{2 \cdot 3} - \frac{(2g)^5}{2 \cdot 3 \cdot 5} \cdots}{\sin g^3}$$

woraus unmittelbar der oben angedeutete Grenzwerth gefunden wird.

Man wird daher zweckmässig der Reihe, die für $a$ entwickelt werden soll, die Form geben

$$a = \frac{4}{3}\{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots\}$$

deren Coefficienten dadurch bestimmt werden können, wenn man die Reihe für: $2g - \sin 2g$ durch die Reihe für $\sin g^3$ dividirt und nach steigenden Potenzen von $x$ entwickelt; das Gesetz der Fortschreitung der Coefficienten tritt aber dann nicht klar zu Tage. Differentiirt man die gegebene Gleichung

$$a \sin g^3 = 2g - \sin 2g$$

so wird erhalten:

$$3a \cos g \sin g^2 + \sin g^3 \frac{da}{dg} = 4 \sin g^2$$

woraus abgeleitet wird

$$\frac{da}{dg} = \frac{4 - 3a \cos g}{\sin g}$$

Anderseits erhält man aus der Gleichung:

$$x = \sin \tfrac{1}{2} g^2$$

durch Differentiation

$$\frac{dx}{dg} = \tfrac{1}{2} \sin g$$

Es ist aber

$$\frac{da}{dx} = \left(\frac{da}{dg}\right)\left(\frac{dg}{dx}\right) = \frac{8 - 6a \cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3a(1 - 2x)}{2x(1 - x)}$$

demnach auch

$$2(x - x^2)\frac{da}{dx} = 4 - (3 - 6x)a$$

Substituirt man nun für $a$ in diesem Ausdrucke die obige Reihe und ebenso für $\frac{da}{dx}$ das Differential derselben nach $x$, so wird gefunden:

$$\tfrac{8}{3}\{\alpha x + (2\beta - \alpha)x^2 + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \ldots\} =$$
$$= (8 - 4\alpha)x + (8\alpha - 4\beta)x^2 + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \ldots$$

woraus man schliesst:

$$\tfrac{8}{3}\alpha = 8 - 4\alpha$$
$$\tfrac{8}{3}(2\beta - \alpha) = 8\alpha - 4\beta$$
$$\tfrac{8}{3}(3\gamma - 2\beta) = 8\beta - 4\gamma$$
$$\tfrac{8}{3}(4\delta - 3\gamma) = 8\gamma - 4\delta$$

oder ausgeführt:

$$\alpha = \tfrac{6}{5} \qquad \beta = \tfrac{8}{7}\alpha \qquad \gamma = \tfrac{10}{9}\beta \qquad \delta = \tfrac{12}{11}\gamma \quad \text{u. s. w.}$$

so dass das Gesetz des Vorschreitens klar ist und es wird:

$$a = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}x^4 + \ldots$$

Diese Reihe wird für kleine Werthe von $g$ rasch konvergiren, da, wenn ich $g$ als kleine Grösse erster Ordnung ansehe, $x$ zweiter Ordnung wird. Die Gleichung (8) kann jetzt geschrieben werden:

$$\sqrt{m} = \sqrt{(l+x)}\,\{a\,(l+x)+1\}$$
$$= (l+x)^{\frac{1}{2}} + a\,(l+x)^{\frac{3}{2}}$$

Setzt man nun

$$a = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}\,(x-\xi)}$$

so ist $\xi$ eine Grösse vierter Ordnung, denn es ist:

$$a = [\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}\,(x-\xi)]^{-1} = \tfrac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\,(x-\xi) + \tfrac{48}{25}\cdot(x-\xi)^2 + \ldots$$

Die Grösse $\xi$ ist dem zu Folge eine Funktion von $x$ und kann berechnet werden sobald $g$ bekannt ist; wie diess geschieht werde ich später vornehmen, vorläufig kann man festhalten, dass $\xi$ nothwendig klein sein muss in den vorkommenden Fällen. Man hat also:

$$\sqrt{m} = (l+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}\,(x-\xi)}$$

Nimmt man nun für $(l+x)^{\frac{1}{2}}$ den Werth aus der Gleichung (3) $b$, nämlich:

$$(l+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{m}}{\eta}$$

so wird

$$\sqrt{m} = \frac{\sqrt{m}}{\eta} + \frac{\sqrt{m^3}}{\eta^3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}\,\frac{m}{\eta^2} + \frac{9}{10}\,(l+\xi)}$$

Setzt man $\xi$ vorläufig als bekannt voraus, und sucht $\eta$ zu bestimmen, so wird zunächst:

$$\eta = 1 + \frac{m}{\frac{3}{4}\,\eta^2 - \frac{9}{10}\,m + \frac{9}{10}\,\eta^2\,(l+\xi)}$$

oder

$$(\eta-1)\;\eta^2\;(\tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{10}\,(l+\xi)) = m\;(\tfrac{9}{10}\,\eta + \tfrac{1}{10})$$

und schliesslich:

$$\frac{(\eta-1)\,\eta^2}{\eta+\frac{1}{9}} = \frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi} = h$$

Wäre $\xi$ bekannt, so wäre der Werth von $h$ völlig bestimmt und $\eta$ durch eine kubische Gleichung zu erhalten. Es ist nämlich die in Betracht kommende Gleichung:

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{h}{9} = 0$$

die nothwendig nur eine positive Wurzel hat, da $h$ als positiv vorausgesetzt in der Gleichung nur ein Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen enthalten sind. Gauss hat nun eine Tafel berechnet, die mit dem Argumente $h$ sofort den Werth $\log\eta^2$ gibt. Ich habe diese Tafel im Anhange als Tafel IX aufgenommen. Die Anwendung dieser Tafel bedarf keiner besonderen Erklärung, nur kann die Bemerkung eingeschaltet werden, dass falls $h > 0.036$ wird, von wo ab die Tafel in grösseren Intervallen vorschreitet, eine Interpolation mit Rücksicht auf zweite Differenzen nothwendig ist, wenn man der siebenten Decimale sicher sein will. Um einen Näherungswerth für $h$ zu bekommen wird es genügen

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

zu setzen und demnach $\eta^2$ zu berechnen. Es ist dann

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l$$

wodurch ein genäherter Werth für $x$ ermittelt ist. Gelingt es nun, $\xi$ als Funktion von $x$ darzustellen, so wird dieser Näherungswerth von $x$ einen nahe richtigen Werth von $\xi$, finden lassen, mit diesen wird jetzt die Rechnung wiederholt und gefunden:

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi,}$$

Man wird dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis keine weitere Abänderung der Zahlen eintritt. Es wird selten nöthig werden, die Rechnung zu wiederholen, und es lässt sich mindestens für Planetenbahnen, wo $\xi$ bei mässiger heliocentrischer Bewegung merkbar wird, ein Hilfsmittel angeben, wodurch mindestens selbst bei grösseren Bogen auch die einmalige Wiederholung der Rechnung gespart werden kann. Ich werde aber vorerst die Bestimmung von $\xi$ vornehmen. Es ist

$$\frac{1}{a} = \frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)$$

also

$$\xi = \frac{10}{9a} - \frac{5}{6} + x = \frac{ax - \frac{5}{6}a + \frac{10}{9}}{a} = \frac{Z}{a}$$

Setzt man in $Z$ für $a$ die Reihe ein, die oben gefunden wurde, so wird sich ergeben:

$$Z = x^2 \left\{\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 7}\right\} + x^3 \left\{\frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{4 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 9}\right\} + x^4 \left\{\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}\right\} + \ldots$$

oder auch

$$Z = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left\{4 x^2 (6 \cdot 7 - 5 \cdot 8) + \frac{4 \cdot 8}{9} x^3 (6 \cdot 9 - 5 \cdot 10) + \frac{4 \cdot 8 \cdot 10}{9 \cdot 11} x^4 (6 \cdot 11 - 5 \cdot 12) + \ldots\right\}$$

Bezeichne ich mit $i$ die Potenz von $x$, so ist der zugehörige Faktor innerhalb der runden Klammern

$$6(2i + 3) - 5(2i + 4) = 2(i - 1)$$

demnach hat man auch

$$Z = \frac{8}{105} x^2 \left\{ + \frac{2 \cdot 8}{9} x + \frac{3 \cdot 8 \cdot 10}{9 \cdot 11} x^2 + \frac{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{9 \cdot 11 \cdot 13} x^3 + \ldots \right\}$$

$$= \frac{8}{105} x^2 A$$

$A$ kann ohne Schwierigkeit nach dieser Reihe berechnet werden, für ein gegebenes $x$. Es ist dann

$$\xi = \frac{8}{105} x^2 \frac{A}{a}$$

in welchem Ausdrucke nur noch $a$ zu bestimmen ist. Es ist aber

$$ax - \frac{5}{6} a + \frac{10}{9} = \frac{8}{105} A x^2$$

also

$$a = \frac{4}{3} \frac{(1 - \frac{12}{175} A x^2)}{1 - \frac{6}{5} x}$$

demnach schliesslich:

$$\xi = \frac{\frac{2}{35} A x^2 (1 - \frac{6}{5} x)}{1 - \frac{12}{175} A x^2}$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes von Fall zu Fall würde recht unbequem sein, desshalb hat Gauss eine Tafel konstruirt, die mit dem Argumente $x$ den Werth $\xi$ angibt. Ich habe diese Tafel als Taf. X im Anhange aufgenommen; dieselbe gibt den Werth von $\xi$ in Einheiten der siebenten Decimale. Dieselbe dehnt sich aber auch auf negative Werthe von $x$ aus, während nach dem bisherigen

$$x = \sin \tfrac{1}{2} g^2$$

$x$ stets nur eine positive Grösse sein kann. Es wird aber $x$ für die Parabel der Null gleich, weil die Bewegung in der excentrischen Anomalie verschwindet, negativ in der Hyperbel, weil $\sin \frac{1}{2} g$ imaginär wird. Wie man sieht können die bisherigen Entwicklungen demnach ohne Bedenken auch für die Hyperbel geltend angenommen werden, denn wiewol die bisherigen Ableitungen mehrfach Imaginäres einführen, wenn $e$ grösser als die Einheit wird, so kann doch das Resultat derselben für die numerische Rechnung für alle Kegelschnitte geltend angenommen werden, da das Imaginäre in demselben verschwunden ist. Mit dieser Bemerkung ist demnach die Berechnung von $\eta$ für die Hyperbel erledigt, man wird aber auch einsehen, dass die entwickelte Methode im letzteren Falle stets ausreichend sein wird, denn die hyperbolischen Bahnen, die bislang bekannt sind, nähern sich in ihrer Form so sehr der Parabel, dass selbst wenn die Beobachtungen grosse heliocentrische Bogen umfassen, die aber nothwendig nahe dem Perihel liegen, trotzdem $x$ eine kleine Grösse bleiben muss.

Wie man sieht gestaltet sich die Rechnung für $\eta$ ganz gleichmässig, wie geartet immer der Kegelschnitt ist; man wird aber vor sich haben eine

Ellipse wenn $x = \frac{m}{\eta^2} - l$ positiv ist

Parabel » $x = \frac{m}{\eta^2} - l = 0$ ist

Hyperbel » $x = \frac{m}{\eta^2} - l$ negativ ist

Ist die Bahn nicht sehr excentrisch (Planetenbahn) so wird vor Beginn der ersten Lösung mit grosser Annäherung gesetzt werden können:

$$x \doteq \sin^2 \tfrac{1}{2} f$$

mit welchen Werthe von $x$ aus Tafel X ein Näherungswerth von $\xi$ genommen wird. Die Durchführung der Rechnung wird einen neuen wesentlich genaueren Werth finden lassen, der meist so wenig von dem Eingangs angenommenen Werthe verschieden sein wird, dass eine Wiederholung der Rechnung unterbleiben kann. Man kann bemerken, dass auch die Voraussetzung $\xi = 0$ die Konvergenz der Rechnung nicht sehr wesentlich beeinträchtigt. Die Berechnung von $x$ und $\eta$ ist demnach in den folgenden Formeln enthalten:

$$m = \frac{t^2}{(2 \cos f \sqrt{r r'})^3}$$

$$\sqrt[4]{\frac{r'}{r}} = \operatorname{tg}(45^\circ + \omega)$$

$$l = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f}$$

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \quad (\xi \text{ mit dem Argumente } x \text{ aus Tafel X})$$

$\eta^2$ (mit dem Argumente $h$ aus Tafel IX)

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l$$

wobei das Zeichen von $x$ den Aufschluss über die Gattung des Kegelschnittes gibt.

Für die Anwendung der succesiven Verbesserung der Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ ist es besser den Werth von $(\eta - 1)$ zu ermitteln statt des Werthes $\eta$ selbst. Die Rechnung von $(\eta - 1)$ direkt aus $\eta$ würde sehr ungenau und beschwerlich sein, da $\eta$ nothwendig wenig von der Einheit verschieden ist; es war aber oben gefunden worden

$$\frac{(\eta - 1)\eta^2}{\eta + \frac{1}{9}} = h$$

und man wird dem zu Folge für den vorgelegten Zweck die Form haben und anwenden müssen

$$(\eta - 1) = \frac{h}{\eta^2}\left(\eta + \tfrac{1}{9}\right)$$

Sind bei ersten Bahnbestimmungen von Planeten, wo man bestimmt weiss, dass $x = \sin^2 \frac{1}{2} f$ eine hinlängliche Näherung zur Bestimmung von $\xi$ abgibt, die definitiven Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ noch nicht ermittelt, sondern will man durch $\eta_{,}$ und $\eta_{,,,}$ verbesserte Werthe für diese erlangen so ist die Berechnung von $x$ nicht nöthig und kann übergangen werden; sind aber nach Abschluss der Hypothesen die Elemente zu ermitteln, so findet man $g$ nach

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} g = x$$

Ich wende mich nun zu Hansen's Näherungsmethode, die bei ersten Bahnbestimmungen meist mit Vortheil angewendet wird. Ich erwähne gleich hier, dass Hansen $\xi = 0$ setzt; demnach gilt diese Reihenentwicklung gleichmässig für alle Kegelschnitte.

Die Grundgleichungen (7) sind:

$$\eta^2 = \frac{m}{l + x}$$

$$\frac{\eta^3}{m} - \frac{\eta^2}{m} = a$$

aus der ersteren Gleichung findet sich der Werth

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l$$

Dieser Werth in die zweite Gleichung substituirt, nachdem man für $a$ die oben gefundene Reihe (pag. 193)

$$a = \tfrac{4}{3} + \tfrac{8}{5} x + \tfrac{64}{35} x^2 + \tfrac{128}{63} x^3 + \ldots$$

eingesetzt hat, ergibt, wenn man bei Gliedern sechster Ordnung stehen bleibt ($m$ ist zweiter Ordnung und ebenso $l$)

$$\begin{aligned} \eta^2 (\eta - 1) = \tfrac{4}{3} m + \tfrac{8}{5} \frac{m^2}{\eta^2} + \tfrac{64}{35} \frac{m^3}{\eta^4} \\ - \tfrac{8}{5} m l - \tfrac{128}{35} \frac{m^2 l}{\eta^2} \\ + \tfrac{64}{35} m l^2 \end{aligned}$$

Um nun aus vorstehender Reihe eine Reihe für $\eta$ zu erhalten, wird man vorerst allgemein haben:

$$\begin{aligned}\eta = 1 + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 &= 1 + \tfrac{4}{3}\frac{m}{\eta^2} + \tfrac{8}{5}\frac{m^2}{\eta^4} + \tfrac{64}{35}\frac{m^3}{\eta^6} \\ + \beta' m l + \gamma' m^2 l \qquad & \qquad - \tfrac{8}{5}\frac{m l}{\eta^2} - \tfrac{128}{35}\frac{m^2 l}{\eta^4} \\ + \gamma'' m l^2 \qquad & \qquad + \tfrac{64}{35}\frac{m l^2}{\eta^2}\end{aligned}$$

Man wird desshalb setzen müssen ohne Glieder sechster Ordnung im Endresultate zu vernachlässigen

$$\eta^2 = 1 + 2\alpha m + (2\beta + \alpha^2)\, m^2 + 2\beta' m l$$

$$\frac{1}{\eta^2} = 1 - 2\alpha m + m^2 \{3\alpha^2 - 2\beta\} - 2\beta' m l$$

$$\frac{1}{\eta^4} = 1 - 4\alpha m$$

$$\frac{1}{\eta^6} = 1$$

Es wird demnach

$$\alpha = \tfrac{4}{3} \qquad \beta = \tfrac{8}{5} - 2\alpha^2 \qquad \gamma = \tfrac{64}{35} - \tfrac{32}{5}\alpha - 2\alpha\beta - 3\alpha^3$$

$$\beta' = -\tfrac{8}{5} \qquad \gamma' = -\tfrac{128}{35} - 4\alpha\beta' \qquad \gamma'' = \tfrac{64}{35}$$

und man wird erhalten bis auf Grössen achter Ordnung exclusive:

$$\begin{aligned}\eta = 1 + \tfrac{4}{3} m - \tfrac{88}{45} m^2 + \tfrac{5312}{945} m^3 \\ - \tfrac{8}{5} m l + \tfrac{512}{105} m^2 l \\ + \tfrac{64}{35} m l^2\end{aligned}$$

Diese Reihe hat grosse numerische Coefficienten und ist daher bei der Anwendung beschwerlich. Führt man statt der Funktion $m$ eine neue ein

$$m = \tfrac{5}{6} h + h l$$

wo jetzt $h$ insofern eine etwas andere Bedeutung als früher hat, da $\xi$ der Null gleich gesetzt ist, so wird

$$\begin{aligned}\eta = 1 + \tfrac{10}{9} h - \tfrac{110}{81} h^2 + \tfrac{16600}{5103} h^3 \\ + \tfrac{8}{63} h^2 l \\ - \tfrac{8}{105} h l^2\end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$h = \lambda + \tfrac{11}{9} \lambda^2$$

so wird schliesslich

$$\eta = 1 + \tfrac{10}{9} \lambda - \tfrac{340}{5103} \lambda^3 + \tfrac{8}{63} \lambda^2 l - \tfrac{8}{105} \lambda l^2$$

Setzt man also

$$\eta = 1 + \tfrac{10}{9} \lambda$$

so begeht man nur einen Fehler sechster Ordnung und derselbe wird noch dadurch wesentlich vermindert, dass alle Coefficienten der Glieder sechster Ordnung kleine numerische Werthe haben. Bestimmt man nun $\lambda$ nach $h$ so wird, wenn man in einen Kettenbruch auflöst:

$$\lambda = \frac{h}{1 + \frac{11}{9}\lambda} = \cfrac{h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \text{etc.}}}}$$

und daraus

$$\eta = 1 + \cfrac{\frac{10}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \text{etc.}}}}$$

wobei $h$ berechnet wird nach

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

Die hier gegebene Ableitung schliesst sich ganz an die an, welche Hansen veröffentlicht hat. Man kann aber das Resultat derselben direkt aus den bislang entwickelten Formeln erlangen.

Setzt man nämlich $\xi = 0$, so begeht man in der Berechnung von $h$ nur einen Fehler sechster Ordnung, da $m$ zweiter, $\xi$ aber vierter Ordnung ist. Es ist also

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

so dass $h$ nun völlig bestimmt erscheint. Die oben entwickelte kubische Gleichung

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{h}{9} = 0$$

kann zunächst geschrieben werden:

$$\eta = 1 + \frac{\frac{10}{9}h}{\eta^2 - h}$$

oder nach steigenden Potenzen von $h$ aufgelöst:

$$\eta = 1 + \tfrac{10}{9}h - \tfrac{110}{81}h^2 + \gamma h^3 + \ldots$$

welches Resultat bis auf Glieder sechster Ordnung mit dem von Hansen gegebenen übereinstimmt.

Das von Hansen vorgeschlagene Verfahren hat auch den Vortheil, dass man unmittelbar mit hinreichender Schärfe den Werth $(\eta - 1)$ erhält, denn es ist

$$(\eta - 1) = \frac{10}{11} \cdot \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \text{etc.}}}}$$

$$\log \tfrac{10}{11} h = 9.9586073$$
$$\log \tfrac{11}{9} h = 0.0871502$$

so dass bei der Berechnung für $\eta$ auch die Bestimmung von $(\eta - 1)$ enthalten ist. Die Kürze der Anwendung des Hansen'schen Verfahrens ist auf die Benutzung der Tafeln der Additionslogarithmen gegründet.

Man berechnet zunächst $\frac{11}{9}h$ und entlehnt mit den Argumenten $\frac{9}{11h}$, also mit dem Complemente des gefundenen Werthes den Logarithmus $(1 + \frac{11}{9}h)$, derselbe subtrahirt von $\log \frac{11}{9}h$ gibt den Ausdruck

$$\log\left(\frac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h}\right)$$

jetzt nimmt man als Argument das Complement des eben gefundenen Werthes und findet aus den Additionslogarithmen eine neue Correctionsgrösse, die vom Logarithmus $\frac{11}{9}h$ abgezogen finden lässt

$$\log\left(\cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h}}\right)$$

Man geht so lange in die Additionslogarithmen ein, bis keine Aenderung die Grenze mehr stattfindet; dann hat man den Werth $\log \frac{11}{10}(\eta - 1)$. Ein Beispiel wird das Verfahren anschaulich machen. Es sei

$$\log h = 7.2885018$$
$$\log \tfrac{11}{8} h = 7.3756520$$
$$\text{Addit. Log} = -\ 10302$$
$$7.3746218$$
$$\text{Addit. Log} = -\ 10278 = \text{Grenze}$$
$$\lg \tfrac{11}{10} (\eta - 1) = 7.3746242$$
$$\lg (\eta - 1) = 7.3332315$$
$$\lg \eta = 0.0009344$$

Ist nun die Rechnung so weit vorgeschritten, dass $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ keine wesentlichen Aenderungen mehr erfahren, so wird an die Ermittlung der Elemente geschritten werden können; hierzu genügen zwei heliocentrische Orte des Planeten. Wie aber diese Bestimmung am zweckmässigsten geschehen kann, werde ich später zeigen, vorerst werde ich vorstehende Vorschriften, wie ich dies auch bei der Bestimmung parabolischer Elemente gethan habe, übersichtlich zusammenstellen. Eine gedrängte Uebersicht der Formeln am Schlusse des Werkes anzufügen, ähnlich wie es bei der Cometenbahnbestimmung geschehen ist, habe ich bei der Bestimmung elliptischer (und hyperbolischer) Elemente unterlassen, da einerseits die Methoden mannigfaltiger sind und andererseits die hier angeführten Zusammenstellungen übersichtlicher sind; nur für den Fall der Bestimmung der Bahn eines kleinen Planeten aus kleinerer als 50tägiger Zwischenzeit habe ich die Formeln (nach der zweiten Methode) übersichtlich im Anhange zusammengestellt.

## §. 7. Uebersicht der Formeln zur Berechnung von $r_{,}\ r_{,,,}\ l_{,}\ l_{,,,}$ und $b_{,}\ b_{,,,}$ nebst Beispielen.

Bei der Auswahl der Beobachtungen ist zu beachten, dass $T_{,,} - T_{,}$ nahe gleich $T_{,,,} - T_{,,}$ ist und dass nicht der erste Ort dem dritten nahe liegt. Das Schema der Grundgrössen der Rechnung wird sein:

| | Beobachtgszt. | Beob. Länge. | Beob. Breite. | Sonnenlänge. | Entfrg. d. ☉ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Beob. | $T_{,}$ | $\lambda_{,}$ | $\beta_{,}$ | $L_{,}$ | $R_{,}$ |
| 2. » | $T_{,,}$ | $\lambda_{,,}$ | $\beta_{,,}$ | $L_{,,}$ | $R_{,,}$ |
| 3. » | $T_{,,,}$ | $\lambda_{,,,}$ | $\beta_{,,,}$ | $L_{,,,}$ | $R_{,,,}$ |

Diese Daten der Beobachtungen und der Ephemeriden müssen gehörig für die Rechnung vorbereitet sein, da das Uebergehen der kleinen Korrektionen bei der Genauigkeit der Planetenbeobachtungen nicht zweckentsprechend ist. Ich werde für diese Vorbereitung zwei Fälle unterscheiden. Die zuerst gegebenen Vorschriften beziehen sich auf den Fall, wo gar nichts über die Bahn des Planeten bekannt ist; die zweite Zusammenstellung wird anzuwenden sein, wenn schon durch anderweitige Untersuchungen Elemente bekannt sind, welche gestatten, die Korrektionen für Aberration und Parallaxe im Voraus in Rechnung zu bringen; hierzu werden aber ganz beiläufige Näherungen ausreichend sein.

*Erster Fall.*

Man bezieht alle Beobachtungszeiten auf einen gewählten Meridian (Berlin, Greenwich etc.). Die beobachteten Rectascensionen und Declinationen werden auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges zu reduciren sein (das Berliner Jahrbuch von 1868 ab gibt die Sonnenkoordinaten auf dasselbe Aequinoctium bezogen). Unterscheide ich die beobachteten Orte von den auf den Jahresanfang reducirten durch Accente, so wird sein

$$\alpha = \alpha' - [f + g \sin(G + \alpha') \operatorname{tg}\delta' + h \sin(H + \alpha') \sec\delta']$$
$$\delta = \delta' - [i \cos\delta' + g \cos(G + \alpha') + h \cos(H + \alpha') \sin\delta']$$

die nothwendigen Grössen $f$, $g$, $G$, $h$, $H$ und $i$ finden sich in den astronomischen Ephemeriden; will man völlig streng vorgehen, so wird noch an $\alpha'$ anzubringen sein:

$$- h_0 \sin(H_0 + \alpha') \sec\delta'$$

an $\delta'$ aber: $\qquad -[h_0 \cos(H_0 + \alpha') \sin\delta' + i_0 \cos\delta']$

wobei die Werthe $h_0$, $H_0$ und $i_0$ anzunehmen sind:

$$\log h_0 = 9.534 \;, \quad H_0 = 350^\circ 5 - 0^\circ 016\,(t - 1850) \;, \quad i_0 = -0''025 \,.$$

Es wäre möglich, dass die Beobachtungen eines Planeten so vertheilt sind, dass dieselben in verschiedenen Jahren angestellt sind; dann muss ein bestimmter Jahresanfang gewählt werden und die Beobachtungen des anderen Jahres, nachdem die oben erwähnten Korrektionen angebracht sind, mit Hilfe der allgemeinen Präcession auf die gewählte Epoche übertragen werden; die Formeln sind hierfür:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tg}\delta \sin\alpha$$
$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos\alpha$$

die Werthe der Konstanten $m$ und $n$ finden sich auf pag. 85.

Die so reducirten Beobachtungen werden mit der mittleren Schiefe ($\varepsilon$) der Ekliptik zur Zeit des Jahresanfanges in Länge und Breite verwandelt nach:

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha}$$
$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N} \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(N - \varepsilon) \sin\lambda$$

$\cos\lambda$ muss mit $\cos\alpha$ gleich bezeichnet sein; eine theilweise Prüfung (nicht zuverlässig) bietet

$$\frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N} = \frac{\cos\beta \sin\lambda}{\cos\delta \sin\alpha}$$

Wendet man Additions- und Subtractionslogarithmen an, so wird man auch ohne grosse Mühe zu dieser Umsetzung benutzen können

$$\cos\lambda \cos\beta = \cos\alpha \cos\delta$$
$$\sin\lambda \cos\beta = \cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon$$
$$\sin\beta = -\cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon$$

Ich nehme nun an, dass die Sonnenorte auf dasselbe Aequinoctium reducirt seien, welche Reduction übrigens erspart wird, wenn man das Berliner Jahrbuch nach 1868 benutzt.

An die Sonnenlängen und Entfernungen der Sonne von der Erde sind auch Korrektionen anzubringen, da man, wegen Unkenntniss der Distanz des Himmelskörpers, den locus fictus einführen muss, und mit diesem die Sonnenbreite wegschafft. Es wird, wenn ich ähnlich wie früher die unkorrigirten Coordinaten mit Accenten bezeichne und $B$ die Sonnenbreite vorstellt, zunächst zu berechnen sein (vierstellig), wenn $\theta$ die Ortssternzeit (pag. 24) bedeutet und $\varphi'$ die geocentrische Polhöhe (pag. 28) des Beobachtungsortes und $\varrho$ die Entfernung desselben vom Erdmittelpunkte (pag. 30) in Einheiten des Aequatorhalbmessers vorstellt und $\pi$ die Aequatorealparallaxe der Sonne (8″848)

$$\cos b \cos l = \cos \varphi' \cos \theta$$

$$\cos b \sin l = \cos \varphi' \sin \theta \cos \varepsilon + \sin \varphi' \sin \varepsilon$$

$$\sin b = -\cos \varphi' \sin \theta \sin \varepsilon + \sin \varphi' \cos \varepsilon$$

$$L = L' + \frac{\sin (L' - \lambda)}{\operatorname{tg} \beta} \left[B - \frac{\varrho\pi}{R'} \sin b\right] + \frac{\varrho\pi}{R'} \cos b \sin (L' - l)$$

$$\log R = \log R' - M \left\{ \frac{\cos (L' - \lambda)}{\operatorname{tg} \beta} \left[B - \frac{\varrho\pi}{R'} \sin b\right] + \frac{\varrho\pi}{R'} \cos b \cos (L' - l) \right\}$$

$$\log M = 1.32336$$

Die Korrektion von $\log R'$ wird in Einheiten der siebenten Decimale erhalten. Wird $\beta = 0$, so werden diese Formeln nicht anwendbar und es ist nichts zweckmässig zu substituiren. Man wird dann diese Korrektionen übergehen müssen; es wird aber $\beta$ hinreichend gross sein, wenn die Breite nur mehre Bogenminuten gross ist, ohne dass die Sicherheit dieser Formeln leidet; es werden daher selten genug Fälle eintreten, wo dieselben nicht anwendbar sind; bei Bahnbestimmungen aus drei Orten wird übrigens aus anderen Gründen (pag. 170) die Nähe von ($\beta = 0$) zu vermeiden sein.

Ein kleine Korrektion der Beobachtungszeiten entsteht durch die Einführung des locus fictus, die man zweckmässig gleich mit den Zeitangaben verbindet; es ist nach pag. 36

$$dt = \frac{R'}{\sin \beta} \left\{ \frac{\varrho\pi}{R'} \sin b - B \right\} \text{ Aberr.}$$

$$\log \text{Aberr.} = 7.44614 - 10$$

wobei $dt$ sofort in Einheiten der fünften Decimale des mittleren Sonnentages erhalten wird. Die hieraus entstehenden Korrektionen sind meist so klein, dass man diese wird fortlassen dürfen.

Bei den auf eine erste Bahnbestimmung bezüglichen Rechnungen wird man zweckmässig sechsstellige Tafeln anwenden; ich habe, um aber in die Rechnung die möglichste Schärfe zu legen, durchaus siebenstellige Tafeln benutzt.

Ich nehme als Beispiel drei Beobachtungen des Planeten (59) »Elpis« aus dem Jahre 1868. Sie sind:

| | | Ort | Ortszeit | *A. R.* (59) | *Decl.* (59) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1868 | Mai 18 | Josefstadt (Wien) | $10^h 33^m 9^s$ | $17^h 16^m 20^s 36$ | $-10° 13' 58'' 1$ |
| | Juni 3 | Greenwich | 12 12 25 | 17 3 17.46 | — 9 30 32.4 |
| | » 19 | Leiden | 10 55 51 | 16 49 33.48 | — 9 13 1.5 |

und behandle die Beobachtungen so, als ob nichts Näheres über die Bahn dieses Planeten bekannt sei.

Zuerst verwandle ich die Ortszeiten in Berliner Zeit und setze sie in Decimaltheile des Tages (Tafel II) um; zu diesen Angaben entlehne ich sofort aus dem Berliner Jahrbuch die Sonnenkoordinaten und finde dieselben unmittelbar auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogen:

| | $L'$ | $B$ | $\log R'$ |
|---|---|---|---|
| 1868 Mai 18.431470 | 58° 9′ 2″10 | −0″36 | 0.005 2850 |
| 34.545832 | 73 36 29.11 | +0″66 | 0.006 3998 |
| 50.480205 | 88 49 38.06 | −0.45 | 0.007 0833 |

Jetzt berechne ich die Reductionen der Beobachtungen auf dasselbe Aequinoctium (1868.0) und finde mit Rücksicht auf das kleine Aberrationsglied, welches im Maximum circa $\frac{1}{3}$ Bogensekunde betragen kann

| | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\alpha$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −28″51 | −4″37 | 259° 4′ 36″89 | −10° 14′ 2″47 |
| 2 | −32.24 | −4.85 | 255 48 49.66 | − 9 30 37.25 |
| 3 | −34.05 | −5.26 | 252 22 48.15 | − 9 13 6.76 |

Die Verwandlung in Länge und Breite ($\varepsilon = 23°27'22''99$) ergab

| | $\lambda$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| 1 | 258°58′ 31″05 | +12° 48′ 18″08 |
| 2 | 255 37 21.73 | +13 14 25.16 |
| 3 | 252 7 52.12 | +13 9 2.79 |

Wie man sieht ist der Planet zur Zeit der zweiten Beobachtung nicht sehr weit von der Opposition entfernt; die Bahnbestimmung wird aber daraus keinen nachtheiligen Einfluss erfahren, da die Breite des Planeten ziemlich bedeutend ist; man sieht hierbei schon ganz ohne Rechnung, dass der massgebende Winkel nahe an 90° sein wird und das Gewicht demnach nahe gleich dem Sinus von 13°; es wird daher bei der Zwischenzeit von 32 Tagen eine verhältnissmässig sehr gute Bahnbestimmung erwartet werden dürfen, indem kein Ausnahmefall nahe bevorstehend ist.

Nun gehe ich an die Bestimmung der Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes. Da die zwei letzteren Beobachtungen im Meridian erhalten wurden, so ist unmittelbar die Sternzeit der Beobachtung durch die Rectascension des Planeten dargestellt. Unter den Annahmen

| | $\theta$ | $\varphi$ | $\log \pi\varrho$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 215° 7′5 | +48° 1′5 | 0.9460 |
| 2 | 255 49.2 | +51 17.4 | 0.9459 |
| 3 | 252 23.2 | +51 58.2 | 0.9459 |

finde ich für die Länge und Breite des Zeniths

| | $l$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 185°57′ | +56°38′ |
| 2 | 238 4 | +73 10 |
| 3 | 230 22 | +73 0 |

Um den locus fictus zu erhalten und gleichzeitig die Sonnenbreite wegzuschaffen, wende ich die oben angesetzten Formel an (vergl. pag. 36) und finde

| | $\Delta L$ | $\Delta \log R$ | $\Delta t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-15''75$ | $-600$ | $+0.1$ |
| 2 | $-1.82$ | $-635$ | $+0.1$ |
| 3 | $+9.19$ | $-714$ | $+0.1$ |

$\Delta \log R$ habe ich in Einheiten der siebenten Decimale angesetzt. Schliesslich finden sich in der dritten Kolumne unter $\Delta t$ die aus der Einführung des locus fictus entstandenen Correctionen der Zeiten in Einheiten der fünften Decimale des Tages, die in der That so klein sind, dass man hätte dieselben unbedenklich fortlassen können.

Stelle ich nun Alles zusammen, so ergeben sich die folgenden Daten, die der Rechnung zu Grunde gelegt werden müssen.

| | 1868 Mai | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18.431471 | 258°58′31″05 | +12°48′18″08 | 58° 8′46″35 | 0.0052250 |
| 2 | 34.545833 | 255 37 21.73 | +13 14 25.16 | 73 36 27.29 | 0.0063363 |
| 3 | 50.480206 | 252 7 52.12 | +13 9 2.79 | 88 49 47.25 | 0.0070119 |

Jetzt kann die Berechnung der Hilfsgrössen vorgenommen werden, die konstant bleiben, gleichgiltig welche Hypothese man über $Q$ macht; es wird aber zweckmässig sein, die Grössen, welche $P$ enthalten, hiervon abzulösen, da durch die Berücksichtigung der Aberrationszeit dasselbe im Verlauf der Rechnung eine einmalige meist unbedeutende Korrektion erfährt.

Aus den vorstehenden Ableitungen wird man zuerst die Formeln zusammenstellen, die zur Berechnung der Grössen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ dienen können, sobald $\varrho_{,,}$ bekannt ist. Man wird berechnen

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_{,,} \sin(L_{,,}-L_{,})}{R_{,,,} \sin(L_{,,,}-L_{,})} &= N'' \\ \frac{R_{,,} \sin(L_{,,,}-L_{,,})}{R_{,} \sin(L_{,,,}-L_{,})} &= N \end{aligned}\right\} I$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\Delta_{,,} \sin W' &= \sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,}) \cos\beta_{,} \\ \sin\Delta_{,,} \cos W' &= \sin\beta_{,} \cos\beta_{,,,} - \cos\beta_{,} \sin\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,}) \\ \sin\Delta_{,} \sin W_0' &= \sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,}) \cos\beta_{,,} \\ \sin\Delta_{,} \cos W_0' &= \sin\beta_{,,} \cos\beta_{,,,} - \cos\beta_{,,} \sin\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,}) \\ \sin\Delta_{,,} \sin W''' &= \sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,}) \cos\beta_{,,,} \\ \sin\Delta_{,,} \cos W''' &= \sin\beta_{,,,} \cos\beta_{,} - \cos\beta_{,,,} \sin\beta_{,} \cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,}) \\ \sin\Delta_{,,,} \sin W_0''' &= \sin(\lambda_{,,}-\lambda_{,}) \cos\beta_{,,} \\ \sin\Delta_{,,,} \cos W_0''' &= \sin\beta_{,,} \cos\beta_{,} - \cos\beta_{,,} \sin\beta_{,} \cos(\lambda_{,,}-\lambda_{,}) \end{aligned}\right\} II$$

$$\left.\begin{aligned} \cos W' \sin\beta_{,,,} &= f_{,} \sin F_{,} \qquad & \cos W''' \sin\beta_{,} &= f_{,,,} \sin F_{,,,} \\ -\sin W' &= f_{,} \cos F_{,} & \sin W''' &= f_{,,,} \cos F_{,,,} \end{aligned}\right\} III$$

$$\left.\begin{aligned} a_0' &= \frac{R_{,} f_{,}}{\sin\Delta_{,,}} \sin(\lambda_{,,,}-L_{,}+F_{,}) \\ b_0' &= \frac{R_{,,,} f_{,}}{\sin\Delta_{,,}} \sin(\lambda_{,,,}-L_{,,,}+F_{,}) \\ c_0' &= \frac{\sin\Delta_{,}}{\sin\Delta_{,,}} \cos(W_0'-W') \end{aligned}\right\} IV$$

$$\left.\begin{aligned}
a_0''' &= \frac{R_, f_{,,,}}{\sin \Delta_{,,}} \sin (\lambda_, - L_, + F_{,,,}) \\
b_0''' &= \frac{R_{,,,} f_{,,,}}{\sin \Delta_{,,}} \sin (\lambda_, - L_{,,,} + F_{,,,}) \\
c_0''' &= \frac{\sin \Delta_{,,,}}{\sin \Delta_{,,}} \cos (W_0''' - W''')
\end{aligned}\right\} V$$

Die Berechnung der Coefficienten zur Verbindung von $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ mit $\varrho_{,,}$ lässt sich auf etwas einfachere Formen, als die eben aufgestellten, zurückführen; jene haben aber den Nachtheil, dass sie nicht allgemein anwendbar sind; wenn eine Lösung möglich ist, so werden die vorstehenden Formeln stets das Ziel mit Sicherheit erlangen lassen, was von den anderen nicht behauptet werden darf.

Hieran kann man die Berechnung der Konstanten anschliessen, die den Uebergang von den geocentrischen auf heliocentrische Orte vermitteln. Es wird sein

$$\left.\begin{aligned}
R_s' &= R_, \sin (\lambda_, - L_,) \\
R_c' &= -R_, \cos (\lambda_, - L_,) \\
R_s''' &= R_{,,,} \sin (\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
R_c''' &= -R_{,,,} \cos (\lambda_{,,,} - L_{,,,})
\end{aligned}\right\} VI$$

Nun werden die Konstanten ermittelt, die bei der Auflösung der Gleichung für $z$ in Betracht kommen; es wird zu berechnen sein:

$$\left.\begin{aligned}
A &= R_, \ \{ \operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin (\lambda_, - L_,) - \operatorname{tg}\beta_, \sin (\lambda_{,,,} - L_,) \} \\
B &= R_{,,,} \{ \operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin (\lambda_, - L_{,,,}) - \operatorname{tg}\beta_, \sin (\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \} \\
C &= R_{,,} \ \{ \operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin (\lambda_, - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_, \sin (\lambda_{,,,} - L_{,,}) \} \\
D &= R_{,,} \ \{ \operatorname{tg}\beta_, \cos (\lambda_{,,,} - L_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,,} \cos (\lambda_, - L_{,,}) \}
\end{aligned}\right\} VII$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\delta \sin\psi &= \sin\beta_{,,} \\
\sin\delta \cos\psi &= \cos\beta_{,,} \sin (\lambda_{,,} - L_{,,}) \\
\cos\delta &= -\cos\beta_{,,} \cos (\lambda_{,,} - L_{,,})
\end{aligned}\right\} VIII$$

$\delta$ ist stets kleiner als 180°, also $\sin\delta$ positiv

$$\left.\begin{aligned}
T \sin t &= D \\
T \cos t &= R_{,,} \sin (\lambda_{,,,} - \lambda_,) \\
S \sin (\delta + \sigma) &= C \sin\delta \\
S \cos (\delta + \sigma) &= T \sin (t + \psi) \sin\delta \\
M' &= \frac{1}{2 (R_{,,} \sin\delta)^3}
\end{aligned}\right\} IX$$

Hier wird man sich leicht überzeugen können, ob das Gewicht der Bahnbestimmung hinreichend gross ist. Man hat für den massgebenden Winkel ($x$), der stets kleiner als 180° angenommen werden kann

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} (t + \psi)}{\cos (\delta + \sigma)}$$

und für das Gewicht ($G$)

$$G = \sin x \sin\delta \text{*})$$

---

*) Um alle Umstände zu berücksichtigen, die auf die Sicherheit der Bahnbestimmung Einfluss nehmen, könnte man auch unter dem Worte Gewicht der Bahnbestimmung das Produkt:

$$\sin x \sin\delta \sin \Delta_{,,} (T_{,,,} - T_,)^3$$

verstehen, welcher Ausdruck dem im Texte gegebenen vorzuziehen wäre vermöge seiner umfassenderen Geltung.

Hiernach wird man die Berechnung der Grössen anschliessen, die von den Zwischenzeiten abhängig sind und so lange keine Abänderung erfahren, als diese nicht geändert werden; diese bleiben aber ungeändert, wenn man die Korrektion für Aberration entweder weglässt oder für alle drei Orte konstant annimmt. Hat man die Absicht die Zeiten für Aberration zu korrigiren, so wird man von hier ab kleinere Tafeln zur Rechnung benutzen.

$$\left.\begin{aligned} \tau_{,}^{0} &= (T_{'''}^{0} - T_{''}^{0})\,k \\ \tau_{''}^{0} &= (T_{'''}^{0} - T_{''}^{0})\,k \\ \tau_{'''}^{0} &= (T_{''}^{0} - T_{,}^{0})\,k \\ \log k &= 8.2355814 \end{aligned}\right\} X$$

$$\left.\begin{aligned} P^{0} &= \frac{\tau_{'''}^{0}}{\tau_{,}^{0}}. \qquad \frac{P^{0}+1}{A+P^{0}B}\,S = d_{0}^{0} \\ \Omega^{0}\sin\omega^{0} &= d_{0}^{0}\sin\sigma \\ \Omega^{0}\cos\omega^{0} &= d_{0}^{0}\cos\sigma - 1 \\ M''^{0} &= \frac{M'}{\Omega^{0}} \end{aligned}\right\} XI$$

Hiermit sind die Vorbereitungsrechnungen beendet und es beginnen die Hypothesen. Man wird setzen

$$\left.\begin{aligned} Y_{,} &= \tfrac{1}{3}(\tau_{''}^{2} - \tau_{'''}^{2}) \\ Y_{'''} &= \tfrac{1}{3}(\tau_{''}^{2} - \tau_{,}^{2}) \\ Q &= \frac{A\,Y_{'''} + PB\,Y_{,}}{A+PB} \\ M &= M''\,Q \end{aligned}\right\} XII$$

und die aufzulösende Gleichung, nebst der die Rechnung erleichternden Differentialformel zur Berechnung der Korrektion von $z$ sind:

$$\left.\begin{aligned} M\sin z^{4} &= \sin(z+\omega) \\ dz &= \frac{\log M + 4\log\sin z - \log\sin(z+\omega)}{d\log\sin(z+\omega) - 4\,d\log\sin z} = \frac{\Delta}{b-4a} \end{aligned}\right\} XIII$$

Ist $z$ gefunden, so wird

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{''} &= \frac{R_{''}}{\sin z}\sin(\delta - z) \\ r_{''} &= \frac{R_{''}}{\sin z}\sin\delta \end{aligned}\right\} XIV$$

Die Verhältnisse der Dreieckflächen finden sich dann nach:

$$\left.\begin{aligned} n'' &= \frac{\tau_{'''}}{\tau_{''}}\left\{1 + \frac{Y_{,}}{2r_{''}^{3}}\right\} \\ n &= \frac{\tau_{,}}{\tau_{''}}\left\{1 + \frac{Y_{'''}}{2r_{''}^{3}}\right\} \end{aligned}\right\} XV$$

und jetzt die geocentrischen Distanzen durch:

$$\left.\begin{aligned} n\,\varrho_{,} &= (N-n)\,a_{0}' + (N''-n'')\,b_{0}' + c_{0}'\,\varrho_{''} \\ n''\varrho_{'''} &= (N-n)\,a_{0}''' + (N''-n'')\,b_{0}''' + c_{0}'''\varrho_{''} \end{aligned}\right\} XVI$$

Hier kann man, wenn die Breiten nicht zu klein sind, als bequeme Probe einschalten

$$n\varrho_{,}\sin\beta_{,} + n''\varrho_{'''}\sin\beta_{'''} = \varrho_{''}\sin\beta_{''}$$

Nach der ersten Hypothese wird man meist schon mit Sicherheit die Korrektionen für Aberration einführen können, und die Berechnung hierfür nebst den daraus entstehenden Abänderungen werden zweckmässig gleich hier vorgenommen. Es wird sein

$$\left.\begin{array}{lll} T_{,} = T_{,}^{0} - \varrho_{,} s & \tau_{,} = (T_{,,,} - T_{,,})\, k & P = \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,}} \\ T_{,,} = T_{,,}^{0} - \varrho_{,,} s & \tau_{,,} = (T_{,,,} - T_{,})\, k & \frac{P+1}{A+PB} S = d_0 \\ T_{,,,} = T_{,,,}^{0} - \varrho_{,,,} s & \tau_{,,,} = (T_{,,} - T_{,})\, k & \Omega \sin \omega = d_0 \sin \sigma \\ \log s = 2.76056 & \log k = 8.2355814 & \Omega \cos \omega = d_0 \cos \sigma - 1 \\ & & M'' = \frac{M'}{\Omega} \end{array}\right\} XVII$$

wobei die Korrektionen der Zeiten durch die Annahme über $s$ in Einheiten der fünften Decimale des mittleren Sonnentages erhalten werden. Diese Korrektionen werden, wenn sie nach ihrem absoluten Werthe auch noch etwas fehlerhaft sind, für die Korrektion der Zwischenzeiten völlig ausreichend sein, weil die Differenz der Korrektionen, auf die es nur ankommt, wesentlich genauer gefunden wird.

Die heliocentrischen Orte finden sich für die äusseren Orte durch

$$\left.\begin{array}{rl} r_{,} \cos(l_{,} - \lambda_{,}) \cos b_{,} &= \varrho_{,} \cos \beta_{,} + R_{c}' \\ r_{,} \sin(l_{,} - \lambda_{,}) \cos b_{,} &= R_{s}' \\ r_{,} \sin b_{,} &= \varrho_{,} \sin \beta_{,} \\ r_{,,,} \cos(l_{,,,} - l_{,,,}) \cos b_{,,,} &= \varrho_{,,,} \cos \beta_{,,,} + R_{c}''' \\ r_{,,,} \sin(l_{,,,} - l_{,,,}) \cos b_{,,,} &= R'''_{s} \\ r_{,,,} \sin b_{,,,} &= \varrho_{,,,} \sin \beta_{,,,} \end{array}\right\} XVIII$$

und die heliocentrischen Bögen nach:

$$\left.\begin{array}{rl} \sin^2 f'' &= \sin^2 \tfrac{1}{2}(l_{,,,} - l_{,}) \cos b_{,} \cos b_{,,,} + \sin^2 \tfrac{1}{2}(b_{,,,} - b_{,}) \\ \sin 2f' &= \frac{r_{,}}{r_{,,}}\, n \sin 2f'' \\ \sin 2f''' &= \frac{r_{,,,}}{r_{,,}}\, n \sin 2f'' \end{array}\right\} XIX$$

Es muss stimmen

$$f' + f''' = f''$$

Jetzt wird man für die drei Kombinationen der Orte die Verhältnisse: $\frac{\text{Sector}}{\Delta}$ zu suchen haben. Man wird setzen in den folgenden Formeln

| statt: $\eta$ | $\eta_{,}$ | $\eta_{,,}$ | $\eta_{,,,}$ |
|---|---|---|---|
| ,, $\tau$ | $\tau_{,}$ | $\tau_{,,}$ | $\tau_{,,,}$ |
| ,, $f$ | $f'$ | $f''$ | $f'''$ |
| ,, $r$ | $r_{,,}$ | $r_{,}$ | $r_{,}$ |
| ,, $r'$ | $r_{,,,}$ | $r_{,,,}$ | $r_{,,}$ |

und dann haben

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{s^2}{(2\cos f\sqrt{rr'})^3} \\
\operatorname{tg}(45^\circ + \omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} \\
l &= \frac{\sin^2\frac{1}{2}f + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f} \\
h &= \frac{m}{\frac{5}{6} + l} & \log\tfrac{5}{6} &= 9.9208188 \\
\eta - 1 &= \frac{10}{11}\cdot\cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \text{etc.}}}} & \log\tfrac{11}{9} &= 0.0871502 \\
& & \log\tfrac{10}{11} &= 9.9586073
\end{aligned}\right\}\ XX$$

Dieser Kettenbruch wird bei 7stelliger Rechnung bei heliocentrischen Bewegungen von 20° völlig ausreichende Resultate geben, wendet man 6stellige Tafeln an., so werden selbst heliocentrische Bewegungen von 30° noch nicht die Rückkehr auf die strengen Formeln fordern. Will man streng rechnen, so wird man mit dem Näherungswerth (nur für Planeten geltend, sonst $\xi = 0$)

$$x \doteq \sin^2\tfrac{1}{2}f$$

aus Tafel $X$, $\xi$ entlehnen und haben

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

mit $h$ nimmt man aus Tafel $IX$, $\log\eta\eta$; man wird jetzt nachsehen ob die für $x$ angewendete Näherung ausreichend war, und berechnen

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l$$

und danach, wenn es nöthig sein sollte mit dem verbesserten Werthe von $\xi$ die Rechnung wiederholen. Hat man nach diesen strengen Formeln $\eta$ berechnet, so findet sich $(\eta - 1)$ mit der wünschenswerthen Genauigkeit nach

$$(\eta - 1) = \frac{h}{\eta^2}(\eta + \tfrac{1}{9})$$

Hat man nun nach einer und der anderen Weise die Werthe für die Verhältnisse der Dreiecksfläche gefunden, so wird man für die nächste Hypothese haben

$$\left.\begin{aligned}
Y_{,} &= \frac{(\eta_{,,} - 1) - (\eta_{,,,} - 1)}{\eta_{,,,}}\, 2r_{,,}^3 \\
Y_{,,,} &= \frac{(\eta_{,,} - 1) - (\eta_{,} - 1)}{\eta_{,}}\, 2r_{,,}^3
\end{aligned}\right\}\ XXI$$

worauf die Rechnung von Formel $XIII$ an wieder vorgenommen werden muss, und wird so lange fortzusetzen sein, bis die Einführung verbesserter Werthe für $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ keine wesentliche Aenderung mehr hervorbringt. Findet sich $n''$ und $n$ in zwei auf einander folgenden Hypothesen ungeändert, so kann an die Eruirung der Elemente gegangen werden. Bei Zwischenzeiten, wie man sie gewöhnlich bei ersten Bahnbestimmungen kleiner Planeten findet, wird selten genug eine dritte Hypothese nothwendig werden

und auf das oben hingewiesene Interpolationsverfahren (pag. 186) wird fast nie Gelegenheit sich bieten zurückzukommen.

Bei der ersten Hypothese wird man als zweckmässige Abkürzung kleinere Tafeln benutzen; doch wenn die Zwischenzeiten sehr klein sind (kleiner als in dem oben gewählten Beispiele) und die Beobachtungen einem kleinen Planeten angehören, so wird man in der ersten Hypothese schon genau rechnen, da in der That die Näherungswerthe fast völlig streng sind und meist, wenn nicht die grösste Genauigkeit gefordert wird, die erste Hypothese ausreicht; in diesen Fällen wird es nicht nöthig sein, die Aberration streng zu berücksichtigen, man wird nur, um dieselbe der Hauptsache nach mitzunehmen, von den Beobachtungszeiten die zu $\varrho_{\prime\prime}$ gehörige Lichtzeit abziehen und die Zwischenzeiten, auf die die vorausgehende Rechnung basirt war, ungeändert lassen; vernachlässigt man die Parallaxe und die Sonnenbreite, so ist die Bildung einer zweiten Hypothese bei kurzen Zwischenzeiten ($<30$ Tage) fast unlogisch, da die bereits gemachten Vernachlässigungen beträchtlicher sind, als der Fehler der ersten Hypothese. Ich kehre nun zu dem oben angefangenen Beispiel zurück und werde jetzt die wichtigsten Momente der weiteren Rechnung mittheilen.

Zunächst bilde ich die für die Folge nöthigen Längenunterschiede.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $L_{\prime\prime} - L_{\prime}$ | $15^\circ 27' 40''94$ | $\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime}$ | $193^\circ 59' 5''77$ |
| $L_{\prime\prime\prime} - L_{\prime}$ | $30\ 41\ 0.90$ | $\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime}$ | $163\ 18\ 4.87$ |
| $L_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime}$ | $15\ 13\ 19.96$ | $\lambda_{\prime} - L_{\prime}$ | $200\ 49\ 44.70$ |
| $\lambda_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime}$ | $-\ 6\ 50\ 38.93$ | $\lambda_{\prime} - L_{\prime\prime\prime}$ | $170\ 8\ 43.80$ |
| $\lambda_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime}$ | $-\ 3\ 29\ 29.61$ | $\lambda_{\prime} - L_{\prime\prime}$ | $185\ 22\ 3.76$ |
| $\lambda_{\prime\prime} - \lambda_{\prime}$ | $-\ 3\ 21\ 9.32$ | $\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime}$ | $178\ 31\ 24.83$ |

$$\lambda_{\prime\prime} - L_{\prime\prime} = 182^\circ 0' 54''44$$

Nach *I* finde ich

$$N'' = +0.521\ 6071 \qquad N = +0.515\ 8492$$

nach *II* wird

$$W' = -92^\circ 11' 41''31 \qquad W''' = -86^\circ 15' 59''19$$
$$\log \sin \varDelta_{\prime\prime} = 9.065\ 5446 \qquad \log \sin \varDelta_{\prime\prime} = 9.065\ 5446$$
$$W_0' = -88^\circ 5' 34''53 \qquad W_0''' = -82^\circ 2' 0''19$$
$$\log \sin \varDelta_{\prime} = 8.773\ 1678 \qquad \log \sin \varDelta_{\prime\prime\prime} = 8.759\ 5209$$

Nach *III* wird

$$F_{\prime} = -0^\circ 29' 58''50 \qquad F_{\prime\prime\prime} = 179^\circ 10' 17''05$$
$$\log f_{\prime} = 9.999\ 6978 \qquad \log f_{\prime\prime\prime} = 9.999\ 1227$$

nach *IV* und *V* wurde berechnet

$$\log a_0' = 0_n307\ 1007 \qquad \log a_0''' = 0.472\ 8649$$
$$\log b_0' = 0.411\ 9849 \qquad \log b_0''' = 0_n208\ 6452$$
$$\log c_0' = 9.706\ 5093 \qquad \log c_0''' = 9.692\ 7899$$

Hiermit sind die Hilfsgrössen erhalten, die man kennen muss, um aus $\varrho_{\prime\prime}$. $n$ und $n''$ die Grössen $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ abzuleiten.

Zum Uebergange vom geocentrischen auf den heliocentrischen Ort erhielt ich nach *VI*

$$\lg R_s' = 9_n556\ 1641 \qquad \lg R_s''' = 9.465\ 4048$$
$$\lg R_c' = 9.975\ 8718 \qquad \lg R_c''' = 9.988\ 3000$$

Aus *VII* wird gefunden

$$\lg A = 8_n454\ 7192 \qquad \lg C = 8_n449\ 0161$$
$$\lg B = 8_n410\ 4934 \qquad \lg D = 7.739\ 2137$$

nach *VIII*

$$\psi = 98^{\circ}\,29'\,59''03 \qquad \delta = 13^{\circ}\,23'\,24''30$$

und nach *IX*

$$t = 177^{\circ}\,24'\,9''36 \qquad \sigma = 179^{\circ}\,45'\,20''41$$
$$\log T = 9.082\ 9462 \qquad \log S = 8.456\ 8705$$
$$\lg M' = 1.585\ 8605$$

Den massgebenden Winkel und das Gewicht der Bahnbestimmung finde ich

$$x = 84^{\circ}\,15'$$
$$G = 0.23$$

so dass eine gute Bahnbestimmung zu erwarten steht, da keiner der Ausnahmefälle nahe bevorstehend ist, demnach die Unsicherheiten nur eine Folge der kurzen Zwischenzeiten sind.

Die nun folgenden Grössen wurden, da dieselben kleine Abänderungen erfahren, wenn man die Aberrationszeit berücksichtigt, vorläufig 5stellig gerechnet.

Es wird nach *X* und *XI*

$$\log \tau_,^{0} = 9.43792 \qquad \log P^{0} = 0.00487$$
$$\log \tau_{,,}^{0} = 9.74139 \qquad \log(1 + P^{0}) = 0.30347$$
$$\log \tau_{,,,}^{0} = 9.44279 \qquad \log d_0^{0} = 0_n02382$$
$$\omega^{0} = -4^{\circ}\,34'\,6'' \qquad \log \Omega_0 = 8.75249$$
$$\log M'''^{0} = 2.83337$$

und nun wurde an die Bildung der ersten Hypothese gegangen.

1. Hypothese. Es fand sich nach der Formel *XII*

$$\log Y_, = 8.87909 \qquad \lg Q = 8.88079$$
$$\log Y_{,,,} = 8.88234 \qquad \lg M = 1.71416$$

welche Werthe die Grundlage der ersten Hypothese bilden. Es fand sich weiter rasch durch Versuche (*XIII*)

$$z = 4^{\circ}\,42'\,8''$$

und dann nach *XIV* und *XV*

$$\log r_{,,} = 0.45735 \qquad \log n'' = 9.70211$$
$$\log \varrho_{,,} = 0.27177 \qquad \log n = 9.69722$$

Mit diesen Werthen wird nach *XVI*

$$\log \varrho_, = 0.28570 \qquad \log \varrho_{,,,} = 0.27360$$

und hierbei die bei *XVI* vorgeschlagene Probe angewendet, welche völlig zutreffend gefunden wurde. Es wurde nun der Einfluss der Aberration nach *XVII* eliminirt und gefunden.

$$\begin{array}{llll} & & & \text{Mai} \\ dT_{,} = & -1112.4 & T_{,} = & 18.420347 \\ dT_{,,} = & -1077.3 & T_{,,} = & 34.535060 \\ dT_{,,,} = & -1081.8 & T_{,,,} = & 50.469388 \\ \lg\tau_{,} = & 9.4379152 & \lg P = & 0.0048888 \\ \lg\tau_{,,} = & 9.7413965 & \lg(P+1) = & 0.3034813 \\ \lg\tau_{,,,} = & 9.4428040 & \lg d_0 = & 0_n0238259 \\ & \omega = -4^\circ 34' 4''70 & & \\ \log\Omega = & 8.7525391 & \log M'' = & 2.8333214 \end{array}$$

Um nun für $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ sofort verbesserte Werthe zu erhalten wurde die Rechnung mit *XVIII* fortgesetzt und gefunden:

$$\begin{array}{ll} l_{,} = 251^\circ 43' 28'' & l_{,,,} = 258^\circ \; 4' 52'' \\ b_{,} = +8^\circ 32' \; 4'' & b_{,,,} = +8^\circ 37' 23'' \\ \log r_{,} = 0.45990 & \log r_{,,,} = 0.45472 \end{array}$$

nach *XIX* wurde

$$2f'' = 6^\circ 17' 10'' \qquad 2f' = 3^\circ 8' 39'' \qquad 2f''' = 3^\circ 8' 31''$$

wobei die Probe, dass ist: $f' + f''' = f''$, völlig stimmt. Die Durchführung der Berechnung nach *XX* ergab für die drei in Betracht kommenden Kombinationen

| | ‴ | ″ | ′ |
|---|---|---|---|
| $\log m$ | 6.60714 | 7.20972 | 6.60513 |
| $\omega$ | $-0^\circ 2' 31''$ | $-0^\circ 5' 8''$ | $-0^\circ 2' 36''$ |
| $\log l$ | 6.27909 | 6.88206 | 6.28003 |
| $\log h$ | 6.68622 | 7.28850 | 6.68421 |
| $\log(\eta - 1)$ | 6.73172 | 7.33323 | 6.72971 |
| $\log\eta$ | 0.00023 | 0.00093 | 0.00023 |

woraus sich schliesslich nach *XXI* fand:

$$\log Y_{,} = 8.88096 \qquad \log Y_{,,,} = 8.88163$$

welche Werthe zur Bildung der zweiten Hypothese verwendet werden, die ich nun siebenstellig durchgeführt habe.

2. Hypothese. Es fand sich in derselben Anordnung wie früher

| | | |
|---|---|---|
| nach *XII* | $\log Q = 8.881\;3140$ | $\log M = 1.714\;6354$ |
| „ *XIII* | $z = 4^\circ 42' 7'' 518$ | |
| „ *XIV* und *XV* | $\log r_{,,} = 0.457\;3559$ | $\log n'' = 9.702\;1078$ |
| | $\log \varrho_{,,} = 0.271\;7870$ | $\log n = 9.697\;2201$ |
| „ *XVI* | $\log \varrho_{,} = 0.285\;7122$ | $\log \varrho_{,,,} = 0.273\;6263$ |

die oben angegebene Probe stimmt bis auf eine Einheit der siebenten Decimale. Die

Berechnung der Formeln *XVII* ist jetzt, da die Aberration schon hinlänglich scharf in Rechnung gezogen ist, nicht mehr nöthig. Weiter wird nach *XVIII*

$$l_{,} = 251^{\circ}43'28''31 \qquad l_{,,,} = 258^{\circ}\ 4'51''95$$
$$b_{,} = +8^{\circ}32'\ 4''29 \qquad b_{,,,} = +8^{\circ}37'23''36$$
$$\log r_{,} = 0.459\ 8989 \qquad \log r_{,,,} = 0.454\ 7323$$

Diese Zahlen stimmen schon so nahe mit denen der ersten Hypothese, dass man mit Recht die Rechnung als abgeschlossen betrachten darf und an die Eruirung der Elemente schreiten könnte. Um aber hier Alles so genau als möglich zu finden, gehe ich noch zur Bildung einer dritten Hypothese über und um diese vorzubereiten wurde ausgeführt (*XIX* und *XX*)

| | ‴ | ″ | ′ |
|---|---|---|---|
| $2f$ | $3^{\circ}8'31''16$ | $6^{\circ}17'9''60$ | $3^{\circ}8'38''44$ |
| $\log m$ | 6.607 1257 | 7.209 7176 | 6.605 0986 |
| $\omega$ | $-0^{\circ}2'30''96$ | $-0^{\circ}\ 5'6''74$ | $-0^{\circ}2'35''75$ |
| $\log l$ | 6.279 1032 | 6.882 0067 | 6.279 9708 |
| $\log h$ | 6.686 2078 | 7.288 5018 | 6.684 1805 |
| $\log(\eta - 1)$ | 6.731 7078 | 7.333 2315 | 6.729 6818 |
| $\log \eta$ | 0.000 2341 | 0.000 9344 | 0.000 2330 |

nach *XXI* wird

$$\log Y_{,} = 8.880\ 9774 \qquad \log Y_{,,,} = 8.881\ 6529$$

3. Hypothese (Schluss). In dieser Hypothese wurde der Werth von $z$ nach der Differentialformel ermittelt. Es war

$$\log Q = 8.8813306 \qquad dz = +0''021$$
$$d \log Q = \quad +166 \qquad z = 4^{\circ}42'7''539$$

*XIV* und *XV* liessen finden

$$\log r_{,,} = 0.457\ 3554 \qquad \log n'' = 9.702\ 1078$$
$$\log \varrho_{,,} = 0.271\ 7863 \qquad \log n = 9.697\ 2201$$

die Werthe von $n''$ und $n$ stimmen, wie es zu erwarten war, schon völlig mit denen, welche die zweite Hypothese gegeben hat; die Rechnung ist demnach als beendigt anzusehen und es kann an die Eruirung der Elemente geschritten werden; dieselben werden am zweckmässigsten dem ersten und dritten heliocentrischen Orte angeschlossen und zu diesem Ende wird auch die Berechnung der Formeln *XVIII* vorgenommen

$$\log \varrho_{,} = 0.285\ 7115 \qquad \log \varrho_{,,,} = 0.273\ 6256$$
$$l_{,} = 251^{\circ}43\ 28''29 \qquad l_{,,,} = 258^{\circ}\ 4'51''97$$
$$b_{,} = +8^{\circ}32'\ 4''27 \qquad b_{,,,} = +8^{\circ}37'23''35$$
$$\log r_{,} = 0.459\ 8985 \qquad \log r_{,,,} = 0.454\ 7318$$

Die Bestimmung der Elemente selbst werde ich später vornehmen.

Jetzt will ich den Fall vornehmen, wo genäherte Elemente schon bekannt sind und man verbesserte Elemente aus drei Orten ableiten will.

*Zweiter Fall.*

Nachdem man die Beobachtungszeiten auf denselben Meridian gebracht hat, subtrahirt man von denselben die Aberrationszeit. Dieselbe wird gefunden nach

$$Abrrzt = \varrho\sigma$$

wobei $\varrho$ die Distanz $\log \sigma = 2.69708$ ist, wodurch die Korrektion der Zeit in Zeitsekunden erhalten wird. Hierauf verwandelt man die so korrigirten Zeitangaben in Decimaltheile des Tages.

Die beobachteten Orte müssen nur für Parallaxe (pag. 32) korrigirt werden, die Korrektionen werden gefunden nach

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos(\theta - \alpha)}$$

$$d\alpha = \frac{\pi\varrho\cos\varphi'}{\varDelta} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\delta}$$

$$d\delta = \frac{\pi\varrho.\sin\varphi'}{\varDelta} \cdot \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin\gamma}$$

Die differentielle Aenderung der Distanz ($\varrho$) zu berechnen, um hieraus die Reduktion für die Lichtzeit auf das Erdcentrum zu erhalten, ist völlig ohne Nutzen, da diese Reduktion niemals $0^s02$ wesentlich übersteigen kann. Die so für Parallaxe korrigirten Beobachtungen werden zweckmässig auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges übertragen, da aber die Aberration schon berücksichtigt ist, so wird man nur zu setzen haben

$$\alpha = \alpha' - [f + g \sin(G + \alpha') \operatorname{tg}\delta']$$

$$\delta = \delta' - g\cos(G + \alpha')$$

Die so reducirten Orte werden nun mit der mittleren Schiefe in Länge und Breite umgesetzt.

Zu den für Aberration verbesserten Zeiten werden die Sonnenorte aus den Ephemeriden entlehnt und die Sonnenbreiten weggeschafft, indem man die beobachteten Breiten korrigirt um

$$d\beta = -\frac{\cos\beta}{\varrho} B$$

Eine merkbare Korrektion für die Lichtzeit kann daraus wieder nicht entstehen, indem diese selten genug auf $0^s003$ ansteigen würde.

Die Rechnung aus den so vorbereiteten Angaben wird sich ganz so wie im ersten Falle stellen, nur mit dem Unterschiede, dass die Berechnung der Formeln *X*, *XI* jetzt völlig strenge Resultate gibt, demnach die Berechnung der Formel *XVII* unterbleibt, und dass anstatt der Berechnung genäherter Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ aus *XII* sofort die genaueren Werthe aus den vorhandenen Elementen abgeleitet werden können; wie man zu diesen gelangt, werde ich jetzt zeigen.

Man berechnet mit den gegebenen Elementen für die Zeiten der Beobachtungen $r_{,}$ $r_{,,}$ $r_{,,,}$ und $v_{,}$ $v_{,,}$ $v_{,,,}$, welche letztere Werthe sofort $f'$ $f''$ und $f'''$ finden lassen. Es ist nämlich

$$v_{,,} - v_{,} = 2f'''$$

$$v_{,,,} - v_{,} = 2f''$$

$$v_{,,,} - v_{,,} = 2f'$$

und mit diesen Werthen wird sich die Berechnung $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ ausführen lassen; diese wird aber verschieden vorgenommen werden können, je nachdem die heliocentrische Bewegung mässig oder sehr gross ist. Ist die Bewegung mässig, so wird man die Formeln *XX* und *XXI* unmittelbar anwenden oder wenn man glaubt nicht mit Hansen's Kettenbruch auszureichen, so wird man nach den daselbst gegebenen Gauss'schen Verfahren vorgehen. Man kann hierbei bemerken, dass das Hansen'sche Verfahren innerhalb viel weiterer Grenzen, als dieselben oben gesteckt wurden, gestattet ist, da es nur auf die Ermittlung von Näherungswerthen ankommt, aus Elementen, die meistens beträchtlich von der Wahrheit abweichen. Mit diesen so gefundenen Werthen von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ wird die erste Hypothese durchgeführt und falls eine Verbesserung der angenommenen Werthe nöthig erscheinen sollte, eine zweite Hypothese gebildet, ganz nach den oben auseinandergesetzten Principien, und so lange mit der Rechnung fortgefahren, bis eine als hinreichend erachtete Annäherung erzielt ist.

Ist jedoch die heliocentrische Bewegung grösser als 90°, dann bietet dieses Verfahren der succesiven Verbesserung keine oder eine sehr geringe Konvergenz und es ist besser in diesem Falle sofort drei Hypothesen zu bilden, indem man für $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ zuerst die aus den vorhandenen Elementen bestimmten Werthe nimmt, dann in der zweiten Hypothese $Y_{,}$ ungeändert lässt, aber $Y_{,,,}$ nach Gutdünken ändert und schliesslich die dritte Hypothese mit abgeänderten $Y_{,}$ und ungeänderten $Y_{,,,}$ durchführt. Nach Schluss dieser Hypothese interpolirt man nach den am Schlusse des §. 5 (pag. 186) gegebenen Formeln die wahren Werthe. Bei so grossen Bögen (heliocentrische Bewegung) leitet man zweckmässig das Verhältniss (Sector : Dreieck) ab nach der Formel

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{p}}{rr' \sin 2f}$$

und man wird direkt zur Berechnung der ersten Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ haben

$$Y_{,} = \left\{ \frac{\tau_{,,}}{\tau_{,,,}} \cdot \frac{r_{,,} \sin 2f_{,,,}}{r_{,,,} \sin 2f_{,,}} - 1 \right\} 2 r_{,,}^{3}$$

$$Y_{,,,} = \left\{ \frac{\tau_{,,}}{\tau_{,}} \cdot \frac{r_{,,} \sin 2f_{,}}{r_{,} \sin 2f_{,,}} - 1 \right\} 2 r_{,,}^{3}$$

Man wird selten genug Veranlassung haben dieses Verfahren benutzen zu müssen, da man meist in diesen Fällen Hilfsmittel (Bahnverbesserung) zu Gebote hat, die rascher das Ziel erreichen lassen. In diesen Fällen kann es sich auch ereignen, dass die Sinusformeln für die Ermittlung von $f'$, $f''$ und $f'''$ nicht ausreichend sind. Mann kann dann auf die folgende Weise verfahren. Ist $\varrho_{,}$ $\varrho_{,,}$ und $\varrho_{,,,}$ ermittelt, so findet man für die drei Beobachtungen die heliocentrischen Orte nach

$$\begin{aligned}
r_{,} \cos(l_{,} - \lambda_{,}) \cos b_{,} &= \varrho_{,} \cos\beta_{,} - R_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,}) = \varrho_{,} \cos\beta_{,} + R_c'\\
r_{,} \sin(l_{,} - \lambda_{,}) \cos b_{,} &= R_{,} \sin(\lambda_{,} - L_{,}) = R_s'\\
r_{,} \sin b_{,} &= \varrho_{,} \sin\beta_{,}\\
r_{,,} \cos(l_{,,} - \lambda_{,,}) \cos b_{,,} &= \varrho_{,,} \cos\beta_{,,} - R_{,,} \cos(\lambda_{,,} - L_{,,}) = \varrho_{,,} \cos\beta_{,,} + R_c''\\
r_{,,} \sin(l_{,,} - \lambda_{,,}) \cos b_{,,} &= R_{,,} \sin(\lambda_{,,} - L_{,,}) = R_s''\\
r_{,,} \sin b_{,,} &= \varrho_{,,} \sin\beta_{,,}\\
r_{,,,} \cos(l_{,,,} - \lambda_{,,,}) \cos b_{,,,} &= \varrho_{,,,} \cos\beta_{,,,} - R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) = \varrho_{,,,} \cos\beta_{,,,} + R_c'''\\
r_{,,,} \sin(l_{,,,} - \lambda_{,,,}) \cos b_{,,,} &= R_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) = R_s'''\\
r_{,,,} \sin b_{,,,} &= \varrho_{,,,} \sin\beta_{,,,}
\end{aligned}$$

Man wird hierbei als wenig umfassende Probe benutzen können, dass $r_{\prime\prime}$ identisch hier gefunden wird mit:

$$\frac{R_{\prime\prime} \sin \delta}{\sin z}$$

Legt man nun durch zwei heliocentrische Orte einen grössten Kreis, so wird dadurch die Bestimmung des Knotens und der Neigung erhalten; man wird zu diesem Ende zwei Orte wählen, die möglichst nahe an 90° von einander abstehen; allzu nahe liegende oder nahe 180° von einander entfernte Orte werden wenig geeignet sein. Man bestimmt denn ☊ und $i$ nach

$$\operatorname{tg} b_{\prime} = \operatorname{tg} i \sin (l_{\prime} - ☊)$$

$$\frac{\operatorname{tg} b_{\prime\prime\prime} - \operatorname{tg} b_{\prime} \cos (l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime})}{\sin (l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime})} = \operatorname{tg} i \cos (l_{\prime} - ☊)$$

Man wird die Neigung ($i$) innerhalb der Grenzen 0° und 180° annehmen, so dass bei direkter Bewegung $\left(\frac{dl}{dt} \text{ positiv}\right)$ $\operatorname{tg} i$ positiv, bei retrograder Bewegung $\left(\frac{dl}{dt}\right.$ negativ$\left.\right)$, $\operatorname{tg} i$ negativ ist. In den eben angeführten Formeln wird bisweilen die Nothwendigkeit hervortreten, andere Accente anzusetzen in Rücksicht auf die obige Bemerkung über die Wahl der zwei Orte. Es kann als Probe benutzt werden, da die Bedingung der Ebene streng erfüllt ist:

$$\sin (l_{\prime\prime} - ☊) \operatorname{tg} i = \operatorname{tg} b_{\prime\prime}$$

Die Argumente der Breite finden sich je nach dem $\operatorname{tg} i$ kleiner oder grösser als die Einheit nach

$$\operatorname{tg} i < \pm 1$$

$$\operatorname{tg} u_{\prime} = \frac{\operatorname{tg} (l_{\prime} - ☊)}{\cos i} \qquad \operatorname{tg} u_{\prime\prime} = \frac{\operatorname{tg} (l_{\prime\prime} - ☊)}{\cos i} \qquad \operatorname{tg} u_{\prime\prime\prime} = \frac{\operatorname{tg} (l_{\prime\prime\prime} - ☊)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg} i > \pm 1$$

$$\operatorname{tg} u_{\prime} = \frac{\operatorname{tg} b_{\prime}}{\cos (l_{\prime} - ☊) \sin i} \qquad \operatorname{tg} u_{\prime\prime} = \frac{\operatorname{tg} b_{\prime\prime}}{\cos (l_{\prime\prime} - ☊) \sin i} \qquad \operatorname{tg} u_{\prime\prime\prime} = \frac{\operatorname{tg} b_{\prime\prime\prime}}{\cos (l_{\prime\prime\prime} - ☊) \sin i}$$

wobei $u$ in dem Quadranten zu nehmen ist, der einerseits dem Zeichen von $\operatorname{tg} u$ entspricht und andererseits muss $\sin u$ gleich bezeichnet mit $\sin b$ sein.

Nachdem diese Rechnungen ausgeführt sind, sind die heliocentrischen Bogen sofort bekannt, denn es ist

$$u_{\prime\prime} - u_{\prime} = 2 f'''$$

$$u_{\prime\prime\prime} - u_{\prime} = 2 f''$$

$$u_{\prime\prime\prime} - u_{\prime\prime} = 2 f'$$

Als Probe wird man benutzen können

$$n = \frac{r_{\prime\prime} r_{\prime\prime\prime} \sin (u_{\prime\prime\prime} - u_{\prime\prime})}{r_{\prime} r_{\prime\prime\prime} \sin (u_{\prime\prime\prime} - u_{\prime})} \qquad n'' = \frac{r_{\prime} r_{\prime\prime} \sin (u_{\prime\prime} - u_{\prime})}{r_{\prime} r_{\prime\prime\prime} \sin (u_{\prime\prime\prime} - u_{\prime})}$$

wobei die jetzt gefundenen Werthe von $n$ und $n''$ identisch sein müssen mit den früher aus $Y_{\prime}$ und $Y_{\prime\prime\prime}$ nach $XV$ abgeleiteten Werthen. Da jetzt die Werthe von $f'$ $f''$ und $f'''$ und die Radienvektoren bekannt sind, so berechnet man zum Schlusse daraus nach den strengen Gauss'schen Formeln ($E_{\prime\prime\prime} - E_{\prime}$ kann 132°50′ werden ohne die Grenzen der $\xi$-Tafel zu überschreiten) die Werthe von $\eta$ und daraus $Y_{\prime}$ und $Y_{\prime\prime\prime}$, wobei die

Unterschiede zwischen den Eingangs angenommenen Werthen von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ in den drei Hypothesen die Koefficienten $a$, $a_{,,}$ $a_{,,,}$ und $b$, $b_{,,}$ $b_{,,,}$ angeben, mit deren Hilfe man nach der im §. 5 angegebenen Formel (pag. 186) die definitiven Werthe von $Y_{,}$ und $Y_{,,,}$ interpoliren kann.

Ich werde nun die früher aufgestellten Formeln durch ein Beispiel erläutern und mich auf den einzig wichtigen Fall beschränken, wo die heliocentrische Bewegung noch so mässig ist, dass man mit Vortheil das Verfahren der successiven Annäherungen anwendet. Ich nehme dieselben Beobachtungen des Planeten »Elpis« vor, die ich früher gewählt habe und werde an dieselben nur die Korrektionen anbringen, welche die genäherte Kenntniss der Elemente gestattet. Die Beobachtungen sind wie oben:

| | Ort | Ortszeit | *A. R.* 59 | *Decl.* 59 |
|---|---|---|---|---|
| 1868 Mai 18 | Josefstadt (Wien) | $10^h 33^m 9^s$ | $17^h 16^m 20^s 36$ | $-10^\circ 13' 58'' 1$ |
| Juni 3 | Greenwich | 12 12 25 | 17 3 17.46 | — 9 30 32.4 |
| » 19 | Leiden | 10 55 51 | 16 49 33.48 | — 9 13 1.5 |

Die genäherten Elemente lassen finden

$$\log \varrho_{,} = 0.28571 \qquad \log r_{,} = 0.459898 \qquad 2f' = v_{,,,} - v_{,,} = 3^\circ\ 8' 38'' 4$$
$$\log \varrho_{,,} = 0.27179 \qquad \log r_{,,} = 0.457355 \qquad 2f'' = v_{,,,} - v_{,} = 6^\circ 17'\ 9'' 6$$
$$\log \varrho_{,,,} = 0.27363 \qquad \log r_{,,,} = 0.454732 \qquad 2f''' = v_{,,} - v_{,} = 3^\circ\ 8' 31'' 2$$

und daraus

$$\log Y_{,} = 8.8809774 \qquad \log Y_{,,,} = 8.8816529$$

Die für Aberration korrigirten Zeiten, die bei der vorstehenden Rechnung bereits berücksichtigt sind, und die Reduktionen für Parallaxe finden sich:

| 1868 Mai | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ |
|---|---|---|
| 18.420345 | $-2'' 17$ | $+3'' 83$ |
| 34.535059 | 0.00 | $+4'' 12$ |
| 50.469386 | 0.00 | $+4'' 12$ |

Die Reduktionen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges sind:

| $\alpha - \alpha'$ | $\delta - \delta'$ |
|---|---|
| $-9'' 60$ | $-7'' 46$ |
| $-11'' 97$ | $-7.06$ |
| $-14'' 51$ | $-6.35$ |

verwandelt man nun die auf das mittlere Aequinoctium 1868.0 bezogenen geocentrischen Rectascensionen und Declinationen in Länge und Breite ($\varepsilon = 23^\circ 27' 22'' 99$) so wird man finden:

| | $\lambda$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| 1 | $258^\circ 58' 47'' 83$ | $+12^\circ 48' 20'' 09$ |
| 2 | 255 37 41.95 | +13 14 29.07 |
| 3 | 252 8 11.39 | +13 9 8.18 |

Man wird in den reducirten Zeiten kleine Unterschiede gegen die frühere Rechnung finden, die nicht vorhanden sein sollten; dieselben sind ganz bedeutungslos und

die Ursache liegt darin, dass die Distanzen der ersten Hypothese noch etwas fehlerhaft waren; doch selbst bei siebenstelliger Rechnung entsteht daraus keine Aenderung des Resultates.

Jetzt entlehne ich aus dem Berliner Jahrbuche die Sonnenorte, an die keine weiteren Reduktionen anzubringen sind, da sich dieselben auf das oben gewählte mittlere Aequinoctium 1868.0 beziehen. Ich finde:

| | $L$ | $B$ | log $R$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 58° 8′ 23″55 | — 0″36 | 0.0052841 |
| 2 | 73 35 52.01 | + 0.66 | 0.0063992 |
| 3 | 88 49 0.90 | — 0.45 | 0.0070830 |

Um nun die Sonnenbreiten streng aus der Rechnung zu schaffen, korrigire ich nach den oben angesetzten Formeln die Breiten des Planeten und finde

| | $d\beta$ |
|---|---|
| 1 | +0″18 |
| 2 | —0″34 |
| 3 | +0″23 |

Man hat demnach für die weiteren Rechnungen die folgenden Fundamentalwerthe:

| 1868 Mai | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | log $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 18.420345 | 258° 58′ 47″83 | + 12° 48′ 20″27 | 58° 8′ 23″55 | 0.005 2841 |
| 34.535059 | 255 37 41.95 | + 13 14 28.73 | 73 35 52.01 | 0.006 3992 |
| 50.469386 | 252 8 11.39 | + 13 9 8.41 | 88 49 0.90 | 0.007 0830 |

Aus diesen Zahlen sollen nun dieselben Werthe für die Berechnung der Elemente erhalten werden, welche das vorige Beispiel geliefert hat; man wird aber eine völlige Uebereinstimmung nicht erwarten dürfen wegen der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung; man darf etwa nicht glauben, dass z. B. der Werth für $r_{\prime\prime}$, welche diese beiden Rechnungen geben, auf wenige Einheiten der siebenten Decimale stimmen werde; es kann diese Differenz bei dem vorliegenden Beispiele auf einige Einheiten der fünften Decimale (bei kürzeren Zwischenzeiten wird diess im erhöhten Masse der Fall sein und bei einem geringeren Gewicht der Bahnbestimmung) ansteigen, ohne dass ein Fehler ausser den unvermeidlichen Tafelfehlern sich eingeschlichen hat; die hauptsächliche Ursache dieser Differenz liegt in der Unsicherheit, mit der sich der Winkel $\omega$ bestimmt; sollte eine völlige Uebereinstimmung erhalten werden, so müsste $\omega$ auf mehr denn 0″01 genau bestimmbar sein mit Hilfe der angewandten logarithmischen Tafeln, während diese Unsicherheit im vorliegenden Falle leicht mehrere Zehntheile einer Bogensekunde betragen kann; die Ursache liegt in den verhältnissmässig kleinen Zwischenzeiten und gibt deutlich zu erkennen, dass man dieselben nicht zu kurz wählen darf, um ein annehmbares Resultat zu erhalten. Es braucht kaum erst bemerkt zu werden, dass wenn sich auch so bedeutende Differenzen herausstellen, die nicht in einem Rechenfehler begründet sind, dennoch beide Elementensysteme die Beobachtungen innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung (wenige Hunderttheile der Bogensekunde) genügen werden und genügen müssen; demnach im

Verlaufe der Rechnung gewisse Winkel übermässig genau bestimmen zu wollen, um den Beobachtungen Genüge zu thun, ist durchaus nicht nöthig und beruht auf einem Misskennen der Sachlage. Man wird zwar etwas geänderte Elemente erhalten, je nachdem man die Bestimmung durchführt, doch keine derselben werden eine grössere Wahrscheinlichkeit für sich haben, da beide Systeme den Beobachtungen genügen, innerhalb der unvermeidlichen Unsicherheiten der letzten Stelle. So wird im vorliegenden Falle ein Fehler von 0″01 in $\sigma$ nahezu den Logarithmus von $r_{\prime\prime}$ um 50 Einheiten der siebenten Decimale abändern, da aber dieser Werth mindestens um 0″02 und 0″03 unsicher sein kann in jeder der zwei Richtungen, so kann wohl die Differenz der Werthe von $r_{\prime\prime}$ der beiden Rechnungen auf 200 — 300 Einheiten der siebenten Decimale ansteigen. Hiermit findet die oben in §. 4 (pag. 176) gemachte Bemerkung über die Unsicherheit der Berechnung von $\omega$ ihre Erledigung. Die Durchführung der Rechnung nach den oben mitgetheilten Zahlen gibt

$$\log r_{\prime\prime} = 0.4573590$$

Dieser Werth stimmt bis auf 36 Einheiten der siebenten Decimale mit demjenigen, welchen die erste Rechnung gegeben hat, was nach dem oben Gesagten eine über Erwarten gute Uebereinstimmung ist; ich habe es unterlassen, das Detail der Rechnung anzuführen, da im Wesen Nichts gegen das vorausgehende Beispiel geändert erscheint.

## §. 8. Bestimmung der Elemente aus zwei heliocentrischen Orten.

Die Bestimmung der Bahnelemente ist nach dem Vorausgehenden reducirt auf die Ableitung derselben aus zwei heliocentrischen Orten. Es ist schon früher erwähnt worden, dass man jetzt schon zur Kenntniss gelangt ist, ob man es mit einer elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bahn zu thun hat. Die Grösse $x$ nämlich, die bestimmt war durch

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l$$

wird in der Ellipse positiv, in der Hyperbel negativ. Im speciellen Falle der Parabel wird dieselbe der Null gleich. Es ist demnach die Bahn eine

Ellipse wenn $\frac{m}{\eta^2} > l$

Parabel » $\frac{m}{\eta^2} = l$

Hyperbel » $\frac{m}{\eta^2} < l$

Für den Fall der Parabel ist die Bahnbestimmung aus zwei heliocentrischen Orten bereits im vorausgehenden Abschnitte dargelegt worden. Man wird sich aber auch mit Vortheil sehr differenter Methoden bedienen, je nachdem die Bahn nahe kreisförmig (Planetenbahn) oder sehr excentrisch (Kometenbahn) ist; das Kriterium hierfür, wenn nicht schon das Ansehen des Himmelskörpers die richtige Leitung geben würde, hätte man darin zu suchen, dass $x$ vielmals kleiner als $\sin^2 \frac{1}{2} f$ ist; ist dasselbe negativ,

so ist die Bahn eine Hyperbel, wodurch man sofort von dem nahe parabolischen Charakter der Bahn überzeugt wird.

Ich werde zuerst den Fall vornehmen, wenn die Bahn nahe kreisförmig ist. Es ist nach pag. 48 für die zwei heliocentrischen Orte

$$\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} v_{,} \sqrt{\tfrac{r_{,}}{a}} &= \sin \tfrac{1}{2} E_{,} \sqrt{1+e} \\
\cos \tfrac{1}{2} v_{,} \sqrt{\tfrac{r_{,}}{a}} &= \cos \tfrac{1}{2} E_{,} \sqrt{1-e} \\
\sin \tfrac{1}{2} v_{,,,} \sqrt{\tfrac{r_{,,,}}{a}} &= \sin \tfrac{1}{2} E_{,,,} \sqrt{1+e} \\
\cos \tfrac{1}{2} v_{,,,} \sqrt{\tfrac{r_{,,,}}{a}} &= \cos \tfrac{1}{2} E_{,,,} \sqrt{1-e}
\end{aligned}\right\} (a)$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin \frac{1}{2}(F+g)$, die zweite mit $\cos \frac{1}{2}(F+g)$, die dritte mit $\sin \frac{1}{2}(F-g)$ und endlich die vierte mit $\cos \frac{1}{2}(F-g)$ und addirt die ersteren und letzteren, so wird man erhalten, wenn man bedenkt, dass ist

$$\sqrt{1 \pm e} = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \pm \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$
$$F = \tfrac{1}{2}(v_{,,,}+v_{,}) \qquad f = \tfrac{1}{2}(v_{,,,}-v_{,})$$
$$G = \tfrac{1}{2}(E_{,,,}+E_{,}) \qquad g = \tfrac{1}{2}(E_{,,,}-E_{,})$$

die zwei Gleichungen

$$\sqrt{\tfrac{r_{,}}{a}} \cos \tfrac{1}{2}(f+g) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cos (\tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}G + g) - \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}(F+G)$$
$$\sqrt{\tfrac{r_{,,,}}{a}} \cos \tfrac{1}{2}(f+g) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cos (\tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}G - g) - \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}(F+G)$$

Diese beiden Gleichungen hat man von einander abzuziehen. Man wird aber bedenken, dass ist:

$$\sqrt{\tfrac{r_{,,,}}{a}} - \sqrt{\tfrac{r_{,}}{a}} = \sqrt[4]{\tfrac{r_{,}r_{,,,}}{aa}} \left(1 + \sqrt[4]{\tfrac{r_{,}}{r_{,,,}}}\right)\left(\sqrt[4]{\tfrac{r_{,,,}}{r_{,}}} - 1\right)$$

der Hilfswinkel $\omega$, der bereits früher schon (pag. 189) eingeführt wurde und bestimmt ist durch

$$\sqrt[4]{\tfrac{r_{,,,}}{r_{,}}} = \operatorname{tg}(45^\circ + \omega)$$

wird den eben erhaltenen Ausdruck weiter transformiren lassen, und zwar wird:

$$\sqrt{\tfrac{r_{,,,}}{a}} - \sqrt{\tfrac{r_{,}}{a}} = \sqrt[4]{\tfrac{r_{,}r_{,,,}}{aa}} \left\{ \operatorname{tg}(45^\circ+\omega) - \operatorname{cotg}(45^\circ+\omega) \right\} = 2\sqrt[4]{\tfrac{r_{,}r_{,,,}}{aa}} \operatorname{tg} 2\omega$$

Mit Rücksicht auf das eben Erwähnte wird die früher angedeutete Subtraktion ergeben:

$$\cos \tfrac{1}{2}(f+g) \operatorname{tg} 2\omega = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin g \sin \tfrac{1}{2}(F-G) \sqrt[4]{\tfrac{aa}{r_{,}r_{,,,}}} \quad . . (A)$$

Ganz ein ähnliches Verfahren wird man einschlagen können, um noch drei weitere Gleichungen zu erhalten; es hängt hierbei nur davon ab, mit welchen Coefficienten man die Gleichungen $(a)$ multiplicirt. Multiplicirt man der Reihe nach die Gleichungen in $(a)$ mit:

| | | |
|---|---|---|
| $+\cos\frac{1}{2}(F+g)$ | $+\sin\frac{1}{2}(F-g)$ | $+\cos\frac{1}{2}(F-g)$ |
| $-\sin\frac{1}{2}(F+g)$ | $+\cos\frac{1}{2}(F-g)$ | $-\sin\frac{1}{2}(F-g)$ |
| $-\cos\frac{1}{2}(F-g)$ | $+\sin\frac{1}{2}(F+g)$ | $-\cos\frac{1}{2}(F+g)$ |
| $+\sin\frac{1}{2}(F-g)$ | $+\cos\frac{1}{2}(F+g)$ | $+\sin\frac{1}{2}(F+g)$ |

so wird man ähnliche Reduktionen mit denselben durchführen können, hierbei wird man aber auch zu beachten haben, dass ist

$$\sqrt{\frac{r_,}{a}}+\sqrt{\frac{r_{,,,}}{a}}=\sqrt[4]{\frac{r_, r_{,,,}}{aa}}\left\{\operatorname{tg}(45^\circ+\omega)+\operatorname{cotg}(45^\circ+\omega)\right\}=\frac{2}{\cos 2\omega}\sqrt[4]{\frac{r_, r_{,,,}}{aa}}$$

Man hat demnach aus $(a)$ die folgenden Formen erhalten

$$\left.\begin{aligned}
(1) &= \cos\tfrac{1}{2}(f+g)\operatorname{tg}2\omega = \sin\tfrac{1}{2}(F-G)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}\\
(2) &= \sin\tfrac{1}{2}(f+g)\sec 2\omega = \cos\tfrac{1}{2}(F-G)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}\\
(3) &= \cos\tfrac{1}{2}(f-g)\operatorname{tg}2\omega = \sin\tfrac{1}{2}(F+G)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}\\
(4) &= \sin\tfrac{1}{2}(f-g)\sec 2\omega = \cos\tfrac{1}{2}(F+G)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}
\end{aligned}\right\}$$

Es ist ersichtlich, dass man aus diesen vier Gleichungen sicher und unzweideutig $F$, $G$ und $\varphi$ bestimmt; denn $\sin g\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}$ und $\sin g\sin\frac{1}{2}\varphi\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}$ müssen nothwendig positiv sein. Man erhält

$$\frac{(1)}{(2)}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(F-G)\qquad\frac{(3)}{(4)}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(F+G)$$

und es ist

$$\left.\begin{aligned}
v_{,,,} &= F+f & E_{,,,} &= G+g\\
v_, &= F-f & E_, &= G-g
\end{aligned}\right\}$$

Ist einmal $\frac{1}{2}(F-G)$ und $\frac{1}{2}(F+G)$ bekannt, so bestimmt man leicht

$$(5)=\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}$$

$$(6)=\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}$$

woraus sich findet

$$\frac{(6)}{(5)}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

Ist $\frac{1}{2}\varphi$ bekannt, so gestattet die Bestimmung von $\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}}$ die man jetzt fast ohne Mühe erhält, eine gute Controlle für die Rechnung. Es ist nach §. 6 (pag. 190)

$$\frac{1}{a}=\left(\frac{2\eta_{,,}\sin g\cos f''}{\tau_{,,}}\right)^2 r_, r_{,,,}$$

es ist also

$$\frac{\tau_{,,}}{2\eta_{,,}\cos f_{,,}(r_, r_{,,,})^{\frac{3}{4}}}=\frac{\sqrt{2m_{,,}\cos f''}}{\eta_{,,}}$$

Man wird demnach nachsehen, ob in der That der Relation

$$\sin g \sqrt[4]{\frac{aa}{r_, r_{,,,}}} = \frac{\sqrt{2m_{,,}\cos f''}}{\eta_{,,}}$$

genügt wird. $\eta_{,,}$ ist durch die vorausgehenden Rechnungen bekannt (nach XX des vorausgehenden §.). Man könnte auch als Probe anwenden, das Statthaben der Relationen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v_, = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E_, \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v_{,,,} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E_{,,,} \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

Der Parameter bestimmt sich in Rücksicht auf pag. 187 durch:

$$p = \left(\frac{\eta_{,,} r_, r_{,,,} \sin 2f''}{\tau_{,,}}\right)^2$$

und die halbe grosse Achse nach

$$a = \frac{p}{\cos \varphi^2}$$

und daraus die mittlere tägliche siderische Bewegung ($\mu$) durch

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \\ \log k &= 3.5500066 \end{aligned}\right\}$$

wodurch diese in Bogensekunden erhalten wird. Hier wird abermals eine gute Prüfung im Folgenden zu suchen sein. Die mittleren Anomalien erhält man nach:

$$\left.\begin{aligned} e'' &= \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \\ M_, &= E_, - e'' \sin E_, \\ M_{,,,} &= E_{,,,} - e'' \sin E_{,,,} \end{aligned}\right\}$$

und es wird sein müssen

$$\frac{M_{,,,} - M_,}{T_{,,,} - T_,} = \mu$$

Ist die Zwischenzeit grösser als circa 80 Tage, so ist der zuletzt erhaltene Werth für die mittlere tägliche siderische Bewegung genauer als der nach $a$ erhaltene, vorausgesetzt dass die Bahn einem kleinen Planeten angehört, und man wird gut thun, $a$ nach dem letzteren Werth von $\mu$ zu bestimmen.

Die letzte und beste Probe kann mit Hilfe der früher berechneten Werthe von $2f'$ und $2f'''$ erhalten werden. Es ist nämlich zu berechnen

$$\left.\begin{aligned} v_{,,} &= v_, + 2f''' = v_{,,,} - 2f' \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E_{,,} &= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v_{,,} \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) \\ M_{,,} &= E_{,,} - e'' \sin E_{,,} \end{aligned}\right\}$$

es wird dann sein müssen

$$M_{,,} = M_, + (T_{,,} - T_,)\,\mu = M_{,,,} - (T_{,,,} - T_{,,})\,\mu$$

Schliesslich kann man aus den Elementen die drei Radienvectoren berechnen und dieses Resultat mit den früher gefundenen Grössen vergleichen. Es wird sein müssen

$$\left.\begin{aligned} \log r_, &= a\,(1 - \sin\varphi \cos E_,) \\ \log r_{,,} &= a\,(1 - \sin\varphi \cos E_{,,}) \\ \log r_{,,,} &= a\,(1 - \sin\varphi \cos E_{,,,}) \end{aligned}\right\}$$

Die Bestimmung des Knotens, der Neigung und der Länge des Perihels kann ganz nach den bereits bekannten Formeln durchgeführt werden. Die Rechnung der Elemente aus den zwei heliocentrischen Orten stellt sich unter der Annahme der nahe kreisförmigen Bahn wie folgt:

$$\sin^2 f'' = \sin^2 \tfrac{1}{2} (l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime}) \cos b_{\prime} \cos b_{\prime\prime\prime} + \sin^2 \tfrac{1}{2} (b_{\prime\prime\prime} - b_{\prime})$$

$$\sin 2f' = \frac{r_{\prime}}{r_{\prime\prime}} n \sin 2 f''$$

$$\sin 2f''' = \frac{r_{\prime\prime\prime}}{r_{\prime\prime}} n'' \sin 2 f''$$

$$m_{\prime\prime} = \frac{\tau_{\prime\prime}^2}{(2 \cos f'' \sqrt{r_{\prime} r_{\prime\prime\prime}})^3}$$

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \omega'') = \sqrt[4]{\frac{r_{\prime\prime\prime}}{r_{\prime}}}$$

$$l_{\prime\prime} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f'' + \operatorname{tg}^2 2 \omega_{\prime\prime}}{\cos f''}$$

$$_{\prime\prime} = \frac{m_{\prime\prime}}{\frac{5}{6} + l_{\prime\prime} + \xi}$$

$\eta_{\prime\prime}^2$ nach Tafel *IX* durch $h_{\prime\prime}$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} g = \frac{m_{\prime\prime}}{\eta_{\prime\prime}^2} - l_{\prime\prime}$$

*I.*

$$\cos \tfrac{1}{2} (f'' + g) \operatorname{tg} 2 \omega'' = \sin \tfrac{1}{2} (F - G) \cos \tfrac{1}{2} \varphi \, (\gamma)^2$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (f'' + g) \sec 2 \omega'' = \cos \tfrac{1}{2} (F - G) \cos \tfrac{1}{2} \varphi \, (\gamma)^2$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (f'' - g) \operatorname{tg} 2 \omega'' = \sin \tfrac{1}{2} (F + G) \sin \tfrac{1}{2} \varphi \, (\gamma)^2$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (f'' - g) \sec 2 \omega'' = \cos \tfrac{1}{2} (F + G) \sin \tfrac{1}{2} \varphi \, (\gamma)^2$$

Probe:

$$(\gamma)^2 = \frac{\sqrt{2 m_{\prime\prime} \cos f''}}{\eta_{\prime\prime}}$$

*II.*

$$v_{\prime\prime\prime} = F + f'' \qquad E_{\prime\prime\prime} = G + g$$

$$v_{\prime} = F - f'' \qquad E_{\prime} = G - g$$

Probe:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v_{\prime} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E_{\prime} \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v_{\prime\prime\prime} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E_{\prime\prime\prime} \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi)$$

*III.*

$$p = \left( \frac{\eta_{\prime\prime} r_{\prime} r_{\prime\prime\prime} \sin 2 f''}{\tau_{\prime\prime}} \right)^2$$

$$a = p \sec^2 \varphi$$

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\log k = 3.550\,0066$$

*IV.*

$$e'' = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''}$$

$$M_{\prime} = E_{\prime} - e'' \sin E_{\prime}$$

$$M_{\prime\prime\prime} = E_{\prime\prime\prime} - e'' \sin E_{\prime\prime\prime}$$

*V.*

Als Proben

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{M_{\prime\prime\prime}-M_{\prime}}{T_{\prime\prime\prime}-T_{\prime}}=\mu\\
&v_{\prime\prime}=v_{\prime}+2f'''=v_{\prime\prime\prime}-2f'\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_{\prime\prime}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_{\prime\prime}\operatorname{tg}(45-\tfrac{1}{2}\varphi)\\
&M_{\prime\prime}=E_{\prime\prime}-e''\sin E_{\prime\prime}\\
&M_{\prime\prime}=M_{\prime}+(T_{\prime\prime}-T_{\prime})\mu=M_{\prime\prime\prime}-(T_{\prime\prime\prime}-T_{\prime\prime})\mu\\
&\log r_{\prime}=a(1-\sin\varphi\cos E_{\prime})\\
&\log r_{\prime\prime}=a(1-\sin\varphi\cos E_{\prime\prime})\\
&\log r_{\prime\prime\prime}=a(1-\sin\varphi\cos E_{\prime\prime\prime})
\end{aligned}\right\}\ VI.$$

Die Bahnlage wird bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}b_{\prime}=\operatorname{tg}i\sin(l_{\prime}-\Omega)\\
&\frac{\operatorname{tg}b_{\prime\prime\prime}-\operatorname{tg}b_{\prime}\cos(l_{\prime\prime\prime}-l_{\prime})}{\sin(l_{\prime\prime\prime}-l_{\prime})}=\operatorname{tg}i\cos(l_{\prime}-\Omega)\\
&\operatorname{tg}u_{\prime}=\frac{\operatorname{tg}(l_{\prime}-\Omega)}{\cos i}\qquad \operatorname{tg}u_{\prime\prime\prime}=\frac{\operatorname{tg}(l_{\prime\prime\prime}-\Omega)}{\cos i}\\
&\pi=u_{\prime}+\Omega-v_{\prime}=u_{\prime\prime\prime}+\Omega-v_{\prime\prime\prime}
\end{aligned}\right\}\ VII.$$

Ich werde zur Erläuterung dieser Formeln ein Beispiel hier einfügen und wähle hierzu die oben durchgeführte Bahnbestimmung der Elpis. Auf pag. (211) finden sich die zwei heliocentrischen Orte. Ich fand daraus nach *I.*

$$\begin{aligned}
2f'' &= 6^{\circ}17'\ 9''64\\
2f' &= 3^{\circ}\ 8'38''46\\
2f''' &= 3^{\circ}\ 8'31''18\\
\log m_{\prime\prime} &= 7.2097190\\
2\omega &= -0^{\circ}10'13''47\\
\log l_{\prime\prime} &= 6.8820081\\
\log h_{\prime\prime} &= 7.288\ 5032\\
\log \eta_{\prime\prime} &= 0.000\ 9344\\
\log\sin^2\tfrac{1}{2}g &= 6.930\ 2910\\
g &= 3^{\circ}20'40''99
\end{aligned}$$

Die Formeln *II* gaben mir:

$$\begin{aligned}
F &= 236^{\circ}22'35''98\\
G &= 242\ \ 23\ \ \ 4.18\\
\varphi &= 6\ \ 58\ 50.06\\
\log\gamma^2 &= 8.754\ 1131\\
\log\frac{\sqrt{2m_{\prime\prime}\cos f''}}{\eta_{\prime\prime}} &= 8.754\ 1132
\end{aligned}$$

nach *III* fand sich

$$\begin{aligned}
v_{\prime} &= 233^{\circ}14'\ \ 1''16 & v_{\prime\prime\prime} &= 239^{\circ}31'\,10''80\\
E_{\prime} &= 239\ \ \ 2\ 23.19 & E_{\prime\prime\prime} &= 245\ \ 43\ \ 45\ \ 17
\end{aligned}$$

Nach *IV*. $\log p = 0.427\,0982$

$\log a = 0.433\,5607$

$\log \mu = 793''7169$

Nach *V*. $M_{,} = 245^{\circ}0'39''56$ $M_{,,,} = 252^{\circ}4'37''42$

Die Proben nach *VI* ergaben die folgenden befriedigenden Resultate:

$\mu = 793''7166$

aus $v_{,,}$ wird $M_{,,} = 248^{\circ}33'50''08$

aus $\mu$ wird $M_{,,} = 248\ 33\ 50.08$

| | aus *VI* | frühere Rechnung |
|---|---|---|
| $\log r_{,}$ | 0.459 8985 | 0.459 8985 |
| $\log r_{,,}$ | 0.457 3555 | 0.457 3554 |
| $\log r_{,,}$ | 0.454 7318 | 0.454 7318 |

Endlich liess *VII* finden:

$i = 8^{\circ}37'46''24$ $\Omega = 170^{\circ}17'50''68$

$u_{,} = 81^{\circ}31'21''89$ $u_{,,,} = 87^{\circ}48'31''53$

$\pi = 18^{\circ}35'11''41$

Ich werde nun die Elemente zusammenstellen und mit Hilfe des Werthes von $\mu$ die mittlere Anomalie auf 1868 Juni 3.0 reduciren und finde so

(59) Elpis

Epoche = 1868 Juni 3.0 mittl. Berliner Zeit.

mittl. Aeq. 1868.0

$L = 267^{\circ}\ 1'56''80$

$M = 248\ 26\ 45.39$

$\pi = 18\ 35\ 11.41$

$\Omega = 170\ 17\ 50.68$

$i = 8\ 37\ 46.24$

$\varphi = 6\ 58\ 50.06$

$\log a = 0.433\,5607$

$\mu = 793''7167$

Ehe ich noch an die Ermittlung der Elemente schreite in einer nahe parabolischen Bahn, will ich noch über Prüfungen, die man sich für die Richtigkeit der Rechnung verschaffen kann, Einiges hinzufügen. Wiewol jetzt Alles hinlänglich geprüft erscheint, so ist doch als die durchgreifendste Prüfung der Gesammtrechnung die Rückrechnung der beobachteten Orte zu betrachten; man kann sogar hierbei die Umwandlung in Länge und Breite der Prüfung unterziehen, und wenn die hier in Vorschlag gebrachte Probe stimmt, so ist dies ein sicherer Beweis, dass kein Fehler sich in die Rechnung eingeschlichen hat; es erscheint Alles geprüft mit Ausnahme der Reduktion der Beobachtungszeiten auf einen bestimmten Meridian und der Verwandlung dieser in Decimaltheile des Tages.

Man wird nach pag, 17 zunächst aus den Elementen die Aequatorealkonstanten berechnen ($A$, $B$, $C$, und $a$, $b$, $c$), welche man ohnediess braucht, wenn man eine Ephemeride entwerfen will und mit diesen die heliocentrischen Coordinaten des Planeten berechnen; aus dem Berliner Jahrbuche interpolire man die rechtwinkligen Sonnencoordinaten für die wegen der Aberration verbesserten Zeiten, die auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges reducirt erscheinen; dann sind die geocentrischen Coordinaten des Planeten für die drei Orte gleichmässig

$$\varrho \cos \alpha \cos \delta = x + X$$
$$\varrho \sin \alpha \cos \delta = y + Y$$
$$\varrho \sin \delta = z + Z$$

wenn mit $x$, $y$, $z$ die heliocentrischen Coordinaten des Planeten, mit $X$, $Y$, $Z$ die geocentrischen Sonnencoordinaten bezeichnet werden. An die so berechneten $\alpha$ und $\delta$ ist vorerst die Parallaxe und dann die Reduktion auf das scheinbare Aequinoctium anzubringen (mit Weglassung der Aberrationsglieder). Die so berechneten Orte müssen innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung den zu Grunde gelegten Beobachtungen genügen. Ich erhalte nach (vergl. pag. 17):

$$-\operatorname{tg} \Omega \cos i = \operatorname{cotg} A \qquad \frac{\operatorname{tg} i}{\cos \Omega} = \operatorname{tg} N$$

$$\frac{\cos i \cos (N + \varepsilon)}{\operatorname{tg} \Omega \ \cos N \cos \varepsilon} = \operatorname{cotg} B$$

$$\frac{\cos i \sin (N + \varepsilon)}{\operatorname{tg} \Omega \ \cos N \sin \varepsilon} = \operatorname{cotg} C$$

$$\sin a = \frac{\cos \Omega}{\sin A}$$

$$\sin b = \frac{\sin \Omega \cos \varepsilon}{\sin B}$$

$$\sin c = \frac{\sin \Omega \sin \varepsilon}{\sin C}$$

$$\text{Probe:} \quad \operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}$$

aus den Elpiselementen die folgenden Werthe:

$$A = 260^\circ 24' 18''71 \qquad \log \sin a = 9.999\,8611$$
$$B = 170^\circ 47' 31''28 \qquad \log \sin b = 9\,985\,0580$$
$$C = 164\ 59\ 40.43 \qquad \log \sin c = 9.413\,4759$$

Die heliocentrischen Coordinaten wurden bestimmt nach:

$$x = r \sin a \sin (A + u)$$
$$y = r \sin b \sin (B + u)$$
$$z = r \sin c \sin (C + u)$$

und gefunden

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| 1 | — 0.894 1684 | — 2.654 1829 | — 0.685 2185 |
| 2 | — 0.738 2942 | — 2.680 8358 | — 0.696 4158 |
| 3 | — 0.581 7966 | — 2.698 5919 | — 0.705 2539 |

Das Berliner Jahrbuch gibt mir für die Sonnencoordinaten mit Rücksicht auf

die im Anhange gegebenen Verbesserungen und auf die in den Zahlen enthaltenen Druckfehler

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 1 | + 0.534 3090 | + 0.788 6918 | + 0.342 2175 |
| 2 | + 0.286 5701 | + 0.893 0912 | + 0.387 5227 |
| 3 | + 0.020 9869 | + 0.932 2498 | + 0.404 5080 |

| | $\alpha$ | $\delta$ |
|---|---|---|
| 1 | 259° 4′ 53″64 | — 10° 14′ 1″77 |
| 2 | 255 49 9.92 | — 9 30 35.33 |
| 3 | 252 23 7.71 | — 9 13 3.72 |

Die Summen der Korrektionen für Parallaxe und die Reduktionen auf das wahre Aequinoctium finden sich oben (pag. 215) bei der Durchführung des zweiten Falles (Elemente genähert bekannt) wie folgt:

| | $d\alpha$ | $d\delta$ |
|---|---|---|
| 1 | + 11″77 | + 3″63 |
| 2 | + 11.97 | + 2.94 |
| 3 | + 14.51 | + 2.23 |

und damit werden die errechneten Orte

| | $\alpha$ | $\delta$ |
|---|---|---|
| 1 | 259° 5′ 5″41 | — 10° 13′ 58″14 |
| 2 | 255 49 21.89 | — 9 30 32.39 |
| 3 | 252 23 22.22 | — 9 13 1.49 |

womit die beobachteten im Sinne (Beob. — Rechg.) so stimmen:

| | $d\alpha$ | $d\delta$ |
|---|---|---|
| 1 | — 0″01 | + 0″04 |
| 2 | + 0″01 | — 0.01 |
| 3 | — 0″02 | — 0.01 |

was eine über Erwarten gute Uebereinstimmung ist.

Ich gehe nun daran zu zeigen, wie man die Elemente bestimmen kann, wenn die Bahn des Kometen sich sehr einer Parabel annähert, gleichgiltig ob die Bahn hierbei elliptisch oder hyperbolisch ist. Den Parameter wird man sofort finden nach

$$p = \left(\frac{\eta_{,,} r_{,} r_{,,,} \sin 2f''}{\tau_{,,}}\right)^2$$

nun ist aber nach der Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

auch

$$e \cos v_{,} = \frac{p}{r_{,}} - 1$$

$$e \cos v_{,,,} = \frac{p}{r_{,,,}} - 1$$

Setzt man:

$$v_{,,,} = v_{,} + 2f''$$

so findet man unschwer

$$e \sin v_{,} = \left(\frac{p}{r_{,}} - 1\right) \operatorname{cotg} 2f'' - \left(\frac{p}{r_{,,,}} - 1\right) \operatorname{cosec} 2f''$$

$$e \cos v_{,} = \left(\frac{p}{r_{,}} - 1\right)$$

Diese Formeln, in der Form zur Bahnbestimmung verwendet, sind, wenn ich nicht irre, zuerst von Frischauf (Theorie der Bewegung der Himmelskörper) vorgeschlagen worden. Die Periheldistanz findet sich dann nach

$$q = \frac{p}{1 + e}$$

und die Perihelzeit aus $v_{,}$ nach irgend einem für nahe parabolische Bahnen geltenden Ausdrucke (pag. 55 u. ff.). Leitet man dieselbe auch aus $v_{,,,}$ ab, so wird durch die Uebereinstimmung beider Werthe eine gute Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung erhalten. Die Ableitung der Bahnelemente aus den zwei heliocentrischen Orten stellt sich demnach wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2 f'' &= \sin^2 \tfrac{1}{2}(l_{,,,} - l_{,}) \cos b_{,} \cos b_{,,,} + \sin^2 \tfrac{1}{2}(b_{,,,} - b_{,}) \\
m_{,,} &= \frac{\tau_{,,}^2}{(2 \cos f'' \sqrt{r_{,} r_{,,,}})^3} \\
\operatorname{tg}(45^\circ + \omega) &= \sqrt{\frac{r_{,,,}}{r_{,}}} \\
l_{,,} &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f'' + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f''} \\
h_{,,} &= \frac{m_{,,}}{\frac{5}{6} + l_{,,} + \xi}
\end{aligned}\right\} I$$

im ersten Versuch wird $\xi = 0$ gesetzt, welche Annahme bei sehr exentrischen Bahnen der Wahrheit sehr nahe kommt. Dann nimmt man mit $h_{,,}$ aus Tafel IX den Werth für $\log \eta\eta$ und kann nachsehen ob die Rechnung wegen $\xi$ einer Verbesserung bedarf, denn es ist $x$ das Argument der Tafel X, welche $\xi$ gibt; dieses findet sich aber aus

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l.$$

Weiter wird:

$$\left.\begin{aligned}
p &= \left(\frac{\eta_{,,} r_{,} r_{,,,} \sin 2f''}{\tau_{,,}}\right)^2 \\
e \sin v_{,} &= \left(\frac{p}{r_{,}} - 1\right) \operatorname{cotg} 2f'' - \left(\frac{p}{r_{,,,}} - 1\right) \operatorname{cosec} 2f''. \\
e \cos v_{,} &= \left(\frac{p}{r_{,}} - 1\right) \\
q &= \frac{p}{1 + e} \\
v_{,,,} &= v_{,} + 2f''
\end{aligned}\right\} II$$

Die Zeit des Perihels findet sich nach den auf pag. 64 angegebenen Formeln. Es wird zu berechnen sein:

$$\left.\begin{aligned}
i &= \frac{1 - e}{1 + e} & \gamma &= \frac{5(1 - e)}{1 + 9e} \\
\delta &= \sqrt{\frac{5(1 + e)}{1 + 9e}} & \varkappa &= q^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{10}{1 + 9e}}
\end{aligned}\right\} III$$

Einen sehr genäherten Werth von $\log C$ verschafft man sich aus der Tafel VII, wenn man setzt:

$$A = i\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} v, \qquad \text{das genaue Argument ist} \quad A = \gamma\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} w$$

Es berechnet sich dann $w$, welches als Argument für die Barker'sche Tafel benutzt wird, aus ($B$ mit dem Argument $A$ aus Tafel VII)

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} w_{,} = \dfrac{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2} v_{,}}{\delta C} & \mathrm{tg}\tfrac{1}{2} w_{,,,} = \dfrac{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2} v_{,,,}}{\delta C} \\ T = T_{,} - M_{,} B_{,} \varkappa & T = T_{,,,} - M_{,,,} B_{,,,} \varkappa \end{array}\right\} \; IV$$

Die beiden Werthe von $T$ müssen, soweit es die logarithmische Rechnung gestattet, übereinstimmen.

Die Bahnlage findet sich nach:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{tg}\, b_{,} = \mathrm{tg}\, i \sin(l_{,} - \Omega) \\ \dfrac{\mathrm{tg}\, b_{,,,} - \mathrm{tg}\, b_{,} \cos(l_{,,,} - l_{,})}{\sin(l_{,,,} - l_{,})} = \mathrm{tg}\, i \cos(l_{,} - \Omega) \end{array}\right\} \; V$$

Das Zeichen von $\mathrm{tg}\, i$ ist dasselbe, welches $\frac{dl}{dt}$ hat.

$$\left.\begin{array}{ll} & \mathrm{tg}\, i < \pm 1 \\ \mathrm{tg}\, u_{,} = \dfrac{\mathrm{tg}(l_{,} - \Omega)}{\cos i} & \mathrm{tg}\, u_{,,,} = \dfrac{\mathrm{tg}(l_{,,,} - \Omega)}{\cos i} \\ & \mathrm{tg}\, i > \pm 1 \\ \mathrm{tg}\, u_{,} = \dfrac{\mathrm{tg}\, b_{,}}{\cos(l_{,} - \Omega) \sin i} & \mathrm{tg}\, u_{,,,} = \dfrac{\mathrm{tg}\, b_{,,,}}{\cos(l_{,,,} - \Omega) \sin i} \end{array}\right\} \; VI$$

Der Quadrant von $u$ bestimmt sich, dass einerseits dem Zeichen von $\mathrm{tg}\, u$ genügt wird und andererseits $\sin u$ und $\sin b$ gleich bezeichnet sind:

$$\left.\begin{array}{l} \pi = u_{,} + \Omega - v_{,} \\ \pi = u_{,,,} + \Omega - v_{,,,} \end{array}\right\} \; VII$$

Für die Anwendung der vorstehenden Formeln wähle ich zwei heliocentrische Orte des Kometen III 1862. Diese sind:

| | $l$ | $b$ | $\lg r$ |
|---|---|---|---|
| 1862 Juli 29.0 m. Greenwicher Zeit. | 353° 50′ 31″8 | + 53° 40′ 5″8 | 0.022 095 |
| Sept. 12.0 » » » | 317 4 3.7 | — 0 52 17.7 | 0.009 483 |

Das Aequinoctium, auf welches sich diese Angaben beziehen, ist das mittlere 1862.0.

Ich habe die Rechnung sechsstellig geführt; eine Korrektion für $\xi$ einzuführen war nicht nöthig, da sich $\xi$ so wenig von der Null unterschied, dass eine Aenderung der sechsstelligen Rechnung sich nicht herausstellt. Es wurde gefunden nach ($I$):

$$\begin{aligned} 2f'' &= 62^\circ\, 28'\, 3''4 \\ \log m_{,,} &= 9.031\ 143 \\ 2\omega &= -\ 0^\circ\, 24'\, 57''6 \\ \log l_{,,} &= 8.928\ 482 \\ h_{,,} &= 0.117\ 012 \\ \log \eta\eta' &= 0.094\ 831 \end{aligned}$$

Nach *II*:

$$\log p = 0.276\,002$$

$$v_{,} = -34^{0}\,16'\,26''7 \qquad v''' = +28^{0}\,11'\,36''7$$

$$\log e = 9.982\,846 \qquad \log q = 9.983\,464$$

Nach *III*:

$$\log i = 8.2955 \qquad \log \delta = 0.003\,458$$

$$\log \gamma = 8.302\,403 \qquad \log \varkappa = 9.982\,900$$

Nach *IV*:

$$\log C_{,} = 0.000\,326 \qquad \log C_{,,,} = 0.000\,216$$

$$\log B_{,} = 0.000\,000 \qquad \log B_{,,,} = 0.000\,000$$

$$w_{,} = -33^{0}\,59'\,38''2 \qquad w_{,,,} = +27^{0}\,57'\,55''2$$

$$\Delta T_{,} = +24.9121 \qquad \Delta T_{,,,} = -20.0877$$

Die Perihelzeit ist nach $v_{,}$ = August 22.9121
» $v_{,,,}$ = » 22.9123
im Mittel $T$ = » 22.9122

Diese Uebereinstimmung ist für eine sechsstellige Rechnung völlig genügend.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nach *V* | $\Omega = 137^{0}\,26'\,53''2$ | $i = 113^{0}\,34'\,27''2$ |
| » *VI* | $u_{,} = 118\;\;29\;\;0''0$ | $u_{,,,} = 180\;\;57\;\;3''4$ |
| » *VII* | $\pi = 290\;\;12\;\;19''9$ | $\pi = 290\;\;12\;\;19''9$ |

Die Elemente des Kometen sind daher zusammengestellt:

☄ III 1862

$T$ = August 22.91220 m. Zeit Greenwich

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 290^{0}\,12'\,19''9 \\ \Omega &= 137\;\;26\;\;53''2 \\ i &= 113\;\;34\;\;27''2 \end{aligned}\right\}\ \text{mittl. Aeq. } 1862{,}0$$

$$\log q = 9.983\,464$$

$$e = 0.961\,272$$

Man wird bemerken, dass die gesammten bisherigen Ableitungen und Zusammenstellungen ganz gleichmässig benutzt werden können, gleichgiltig welcher Gattung der Kegelschnitt ist, und man ist der lästigen sonst hervortretenten Unterscheidung zwischen Ellipse und Hyperbel überhoben; ich habe nur einen Unterschied gemacht zwischen nahe kreisförmigen und nahe parabolischen Bahnen, da derselbe wegen der Verschiedenheit der geforderten Elemente (vgl. pag. 93) in der That ein durchgreifender ist.

### B. *Zweite Methode.*

Bei den sehr zahlreichen Bearbeitungen, die das Problem der ersten Bahnbestimmung erfahren hat, sollte man meinen, dass ein wesentlicher Fortschritt in der Lösung dieser Aufgabe nicht zu erwarten sei und es ist mehrfach die Ansicht geäussert worden, dass man die hierauf bezüglichen Untersuchungen als völlig abgeschlossen

betrachten darf. Ich habe vor einiger Zeit eine neue Lösung dieses Problems gefunden, welche um so mehr befriedigt, da dieselbe an Kürze und Konvergenz alle bisher bekannten Methoden nicht unwesentlich übertrifft. Diese Behauptung wird wol manchem Leser etwas gewagt erscheinen, ich sende desshalb eine Bemerkung voraus, die von der Anwendbarkeit und Kürze der vorliegenden Methode eine gute Vorstellung gibt. In dem dritten Beispiele der theoria motus, die Bahnbestimmung der Ceres, welches Beispiel Gauss nach seiner Methode vorgenommen hat, umfasst die Zwischenzeit 260 Tage und die Konvergenz ist so gering, dass nach der dritten Hypothese ein noch sehr wenig befriedigendes Resultat erlangt wird; ein nicht ganz einfaches Interpolationsverfahren, welches Gauss nun anwendet, lässt ihn mit der vierten Hypothese nahe das Ziel erreichen, wiewol zur völlig befriedigenden Uebereinstimmung eine fünfte nöthig wird. Würde man von dem Kunstgriffe der Interpolation keinen Gebrauch machen, so dürften kaum neun Hypothesen ausreichend sein. Meine Methode gibt schon nach der zweiten Hypothese eine fast in allen Fällen ausreichende Näherung und die dritte Hypothese gibt schon eine so genaue Lösung der Aufgabe, als dieselbe bei der Anwendung siebenstelliger Tafel erreicht werden kann. Es ist hierbei ganz wesentlich zu bemerken, dass nach meiner Methode die Vorbereitungsrechnungen viel kürzer sind und die Durchführung einer Hypothese etwa ebensoviel Zeit in Anspruch nimmt, als nach Gauss' Methode. (Zum Belege dieser Behauptungen habe ich unten die Berechnung des Ceresbeispiels in extenso aufgenommen.) Aus dem eben mitgetheilten Beispiele wird man leicht ableiten können, dass die Konvergenz meiner Methode so bedeutend ist, dass man selbst bei Zwischenzeiten von 40 Tagen mit der ersten Hypothese ein fast völlig ausreichendes Resultat erhält und wenn ich auch annehme, dass die so ausserordentliche Konvergenz in diesem Ceresbeispiele theilweise zufällig ist, so ist doch wesentlich die erhöhte Annäherung der angewandten Methode zuzuschreiben.

## §. 1. Aufstellung der Fundamentalgleichungen.

Bezeichnet man auf die bekannte Weise die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch

$$\frac{[r_{,,}\, r_{,,,}]}{[r_{,}\, r_{,,,}]} = n \qquad \frac{[r_{,}\, r_{,,}]}{[r_{,}\, r_{,,,}]} = n''$$

so wird die Bedingung der Ebene nach den Gleichungen (6) des §. 1 der parabolischen Bahnbestimmung (pag. 97) ausgedrückt sein durch die folgenden Gleichungen, in denen ich aber statt des willkührlichen Winkels $\Pi$ die Länge des zweiten Ortes ($\lambda_{,,}$) einführe. Es wird so:

$$\left.\begin{aligned}
n\{\varrho_{,} \sin(\lambda_{,}-\lambda_{,,}) \cos\beta_{,} - R_{,} \sin(L_{,}-\lambda_{,,})\} + n''\{\varrho_{,,,} \sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} - R_{,,,} \sin(L_{,,,}-\lambda_{,,})\} = \\
= - R_{,,} \sin(L_{,,} - \lambda_{,,}) \\
n\{\varrho_{,} \cos(\lambda_{,}-\lambda_{,,}) \cos\beta_{,} - R_{,} \cos(L_{,}-\lambda_{,,})\} + n''\{\varrho_{,,,} \cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} - R_{,,,} \cos(L_{,,,}-\lambda_{,,})\} = \\
= \varrho_{,,} \cos\beta_{,,} - R_{,,} \cos(L_{,,} - \lambda_{,,}) \\
n\, \varrho_{,} \sin\beta_{,} + n''\varrho_{,,,} \sin\beta_{,,,} = \varrho_{,,} \sin\beta_{,,}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $\sin\beta_{,,}$, die dritte mit $-\cos\beta_{,,}$ und addirt, so erhält man nebst der ersten Gleichung in (1), die nur $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ enthält, eine weitere Gleichung zwischen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$. Es wird so nach einer einfachen Umstellung:

$$\left.\begin{aligned}
&n\varrho_{,}\sin(\lambda_{,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,}+n''\varrho_{,,,}\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,,,}=\\
&\qquad=nR_{,}\sin(L_{,}-\lambda_{,,})-R_{,,}\sin(L_{,,}-\lambda_{,,})+n''R_{,,,}\sin(L_{,,,}-\lambda_{,,})\\
&n\varrho_{,}\{\cos(\lambda_{,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,}\sin\beta_{,,}-\sin\beta_{,}\cos\beta_{,,}\}+n''\varrho_{,,,}\{\cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,,,}\sin\beta_{,,}-\sin\beta_{,,,}\cos\beta_{,,}\}=\\
&\qquad=\{nR_{,}\cos(L_{,}-\lambda_{,,})-R_{,,}\cos(L_{,,}-\lambda_{,,})+n''R_{,,,}\cos(L_{,,,}-\lambda_{,,})\}\sin\beta_{,,}
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Um abzukürzen führe ich einige Hilfswinkel ein, deren geometrische Bedeutung leicht ersichtlich ist; ich setze nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\lambda_{,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,}\sin\beta_{,,}-\sin\beta_{,}\cos\beta_{,,}&=\sin\Delta_{,}\cos w_{,}\\
\sin(\lambda_{,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,}&=\sin\Delta_{,}\sin w_{,}\\
\cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,,,}\sin\beta_{,,}-\sin\beta_{,,,}\cos\beta_{,,}&=\sin\Delta_{,,,}\cos w_{,,,}\\
\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,,})\cos\beta_{,,,}&=\sin\Delta_{,,,}\sin w_{,,,}
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

dann verwandeln sich die Gleichungen (2) in:

$$\left.\begin{aligned}
&n\varrho_{,}\sin\Delta_{,}\sin w_{,}+n''\varrho_{,,,}\sin\Delta_{,,,}\sin w_{,,,}=\\
&\qquad=nR_{,}\sin(L_{,}-\lambda_{,,})-R_{,,}\sin(L_{,,}-\lambda_{,,})+n''R_{,,,}\sin(L_{,,,}-\lambda_{,,})\\
&n\varrho_{,}\sin\Delta_{,}\cos w_{,}+n''\varrho_{,,,}\sin\Delta_{,,,}\cos w_{,,,}=\\
&\qquad=\{nR_{,}\cos(L_{,}-\lambda_{,,})-R_{,,}\cos(L_{,,}-\lambda_{,,})+n''R_{,,,}\cos(L_{,,,}-\lambda_{,,})\}\sin\beta_{,,}
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Setzt man die Verhältnisse der Dreiecksflächen als bekannt voraus, so lässt sich aus diesen beiden Gleichungen $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ bestimmen. Ich werde dieselben aber zu diesem Zwecke weiteren Transformationen unterwerfen. Setzt man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta_{,,}\sin w_{,,,}&=g_{,}\sin G_{,} & \sin\beta_{,,}\sin w_{,}&=g_{,,,}\sin G_{,,,}\\
-\cos w_{,,,}&=g_{,}\cos G_{,} & -\cos w_{,}&=g_{,,,}\cos G_{,,,}\\
G_{,}-\lambda_{,,}&=F_{,} & G_{,,,}-\lambda_{,,}&=F_{,,,}\\
\frac{g_{,}}{\sin\Delta_{,}\sin(w_{,,,}-w_{,})}&=q_{,} & \frac{g_{,,,}}{\sin\Delta_{,,,}\sin(w_{,}-w_{,,,})}&=q_{,,,}\\
q_{,}R_{,}\sin(L_{,}+F_{,})&=A' & q_{,,,}R_{,,,}\sin(L_{,,,}+F_{,,,})&=A'''\\
-q_{,}R_{,,}\sin(L_{,,}+F_{,})&=B' & -q_{,,,}R_{,,}\sin(L_{,,}+F_{,,,})&=B'''\\
q_{,}R_{,,,}\sin(L_{,,,}+F_{,})&=C' & q_{,,,}R_{,}\sin(L_{,}+F_{,,,})&=C'''
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

so lassen sich die Gleichungen (4) in die folgenden umsetzen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{,}&=A'+\frac{1}{n}B'+\frac{n''}{n}C'\\
\varrho_{,,,}&=A'''+\frac{1}{n''}B'''+\frac{n}{n''}C'''
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Die Bestimmung von $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ ist jetzt abhängig von der Kenntniss der Verhältnisse der Dreiecksflächen. Dieselben lassen sich auf die bekannte Weise durch Reihen ersetzen, die nach den steigenden Potenzen der Zwischenzeiten geordnet sind; ich habe dieselben bei der Bestimmung einer parabolischen Bahn (pag. 110) entwickelt und setze hier die daselbst gefundenen Reihen nochmals an. Bezeichnet man nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
(T''-T')\,k&=\tau''' & (T'''-T'')\,k&=\tau'\\
(T'''-T')\,k&=\tau'' & \log k&=8.2355814
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

so wurde an der bezeichneten Stelle gefunden

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{\tau''}{\tau'}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\,\frac{\tau''^2 - \tau'^2}{r_{,,}^3} - \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau'''(\tau''\tau''' - \tau'^2)}{r_{,,}^4}\,\frac{dr_{,,}}{d\tau}\;\ldots\right\} \\
\frac{n''}{n} &= \frac{\tau'''}{\tau'}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\,\frac{\tau'''^2 - \tau'^2}{r_{,,}^3} - \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau'^2 + \tau'''^3}{r_{,,}^4}\,\frac{dr_{,,}}{d\tau}\;\ldots\right\} \\
\frac{1}{n''} &= \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\,\frac{\tau''^2 - \tau'''^2}{r_{,,}^3} + \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau'(\tau'\tau'' - \tau'''^2)}{r_{,,}^4}\,\frac{dr_{,,}}{d\tau}\;\ldots\right\} \\
\frac{n}{n''} &= \frac{\tau'}{\tau'''}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\,\frac{\tau'^2 - \tau'''^2}{r_{,,}^3} + \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau'^3 + \tau'''^3}{r_{,,}^4}\,\frac{dr_{,,}}{d\tau}\;\ldots\right\}
\end{aligned}
$$

Lässt man in den eben aufgestellten Reihen die Glieder vierter Ordnung weg, so kann gesetzt werden in denselben

$$
r_{,,} = \tfrac{1}{2}(r_{,} + r_{,,,}) - \tfrac{1}{2}\,\frac{\tau' - \tau'''}{\tau''}\,(r_{,,,} - r_{,})
$$

$$
\frac{dr_{,,}}{d\tau} = \frac{r_{,,,} - r_{,}}{\tau''}
$$

und es finden sich dann die folgenden Reihen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{\tau''}{\tau'}\left\{1 - \tfrac{4}{3}\,\frac{\tau''^2 - \tau'^2}{(r_{,} + r_{,,,})^3} - 4\,\frac{\tau'^2\tau'''}{\tau''}\,\frac{r_{,,,} - r_{,}}{(r_{,} + r_{,,,})^4} + \gamma_0\right\} \\
\frac{n''}{n} &= \frac{\tau'''}{\tau'}\left\{1 - \tfrac{4}{3}\,\frac{\tau'''^2 - \tau'^2}{(r_{,} + r_{,,,})^3} - 4\,\tau'\tau'''\,\frac{r_{,,,} - r_{,}}{(r_{,} + r_{,,,})^4} + \gamma_1\right\} \\
\frac{1}{n''} &= \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - \tfrac{4}{3}\,\frac{\tau''^2 - \tau'''^2}{(r_{,} + r_{,,,})^3} + 4\,\frac{\tau'\tau'''^2}{\tau''}\,\frac{r_{,,,} - r_{,}}{(r_{,} + r_{,,,})^4} + \gamma_2\right\} \\
\frac{n}{n''} &= \frac{\tau'}{\tau'''}\left\{1 - \tfrac{4}{3}\,\frac{\tau'^2 - \tau'''^2}{(r_{,} + r_{,,,})^3} + 4\,\tau'\tau'''\,\frac{r_{,,,} - r_{,}}{(r_{,} + r_{,,,})^4} + \gamma_3\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

in welchen Reihen durch die verschiedenen $\gamma$ die Reste der Reihen, die vierter Ordnung sind, ausgedrückt werden. Man kann bemerken, dass in dem Verhältnisse: $\frac{\text{Sect}}{\Delta}$, welches für das grosse Dreieck gilt, durch die von mir gewählte Form die Glieder dritter Ordnung völlig eliminirt sind.

Setzt man zur Abkürzung:

$$
\left.
\begin{aligned}
\tfrac{4}{3}(\tau''^2 - \tau'^2) &= \mu_0 & \frac{\tau'^2\tau'''}{\tau''} &= \nu_0 \\
\tfrac{4}{3}(\tau'''^2 - \tau'^2) &= \mu_1 & \tau'\tau''' &= \nu_1 \\
\tfrac{4}{3}(\tau''^2 - \tau'''^2) &= \mu_2 & \frac{\tau'\tau'''^2}{\tau''} &= \nu_2 \\
x &= \frac{4}{(r_{,} + r_{,,,})^3} & y &= \frac{r_{,,,} - r_{,}}{r_{,} + r_{,,,}}
\end{aligned}
\right\} \quad (9)
$$

so werden sich die obigen Reihen umgestalten in:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{\tau''}{\tau'}\{1 - \mu_0\,x - \nu_0\,xy + \gamma_0\} \\
\frac{n''}{n} &= \frac{\tau'''}{\tau'}\{1 - \mu_1\,x - \nu_1\,xy + \gamma_1\} \\
\frac{1}{n''} &= \frac{\tau''}{\tau'''}\{1 - \mu_2\,x + \nu_2\,xy + \gamma_2\} \\
\frac{n}{n''} &= \frac{\tau'}{\tau'''}\{1 + \mu_1\,x + \nu_1\,xy + \gamma_3\}
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

Die Grössen $\gamma$ sind vierter Ordnung und über ihren Werth lässt sich vor Ermittlung der genäherten Elemente nur so viel sagen, dass dieselben bei mässigen helio-

centrischen Bewegungen sehr klein sind und in der ersten Hypothese der Null gleich gesetzt werden können. Die Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung wird bei Planetenbahnen von wenig erheblicher Wirkung sein und es wird sich bisweilen die auffallende Thatsache zeigen, dass die Glieder vierter Ordnung oft merklicher sind, als die der dritten Ordnung; der Grund liegt in der meist kleinen Excentricität der Planetenbahnen. Bei Kometen wird die Mitnahme des Gliedes dritter Ordnung das Resultat sehr wesentlich verbessern; ich werde es aber auch bei der Bestimmung einer Planetenbahn stets mitnehmen, da die Berücksichtigung desselben ohne grosse Mühe und Zeitaufwand vorgenommen werden kann. Würde man es vorziehen dieses Glied dritter Ordnung wegzulassen, so könnte man auch zweckmässig die Einführung der verbesserten Verhältnisse der Dreiecksflächen auf die Form der $Y$ Funktionen der vorausgehenden Abtheilung bringen. Die hier vorgeschlagene Methode wird selbst bei heliocentrischen Bewegungen von 90° noch ziemlich konvergirende Hypothesen bilden lassen.

Die Werthe von $x$ und $y$ sind Funktionen der Distanzen $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ und es lässt sich auf die schon mehrfach angedeutete Weise die Verbindung dieser Werthe herstellen. Setzt man nämlich:

$$\left.\begin{array}{rlrl}
\cos\psi_, &= \cos\beta_, \cos(\lambda_, - L_,) & \cos\psi_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\sin\psi_, \cos P_, &= \cos\beta_, \sin(\lambda_, - L_,) & \sin\psi_{,,,} \cos P_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\sin\psi_, \sin P_, &= \sin\beta_, & \sin\psi_{,,,} \sin P_{,,,} &= \sin\beta_{,,,} \\
f_, &= R_, \cos\psi_, & f_{,,,} &= R_{,,,} \cos\psi_{,,,} \\
B_, &= R_, \sin\psi_, & B_{,,,} &= R_{,,,} \sin\psi_{,,,}
\end{array}\right\} \qquad (11)$$

so ist:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\varrho_, - f_,}{B_,} = \operatorname{tg}\theta_, & r_, = (\varrho_, - f_,) \operatorname{cosec}\theta_, \\
\dfrac{\varrho_{,,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} & r_{,,,} = (\varrho_{,,,} - f_{,,,}) \operatorname{cosec}\theta_{,,,}.
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Substituirt man nun die Werthe aus (10) in die Gleichungen (6) ein und setzt um abzukürzen:

$$\left.\begin{array}{r}
A' + \left(B' \dfrac{\tau''}{\tau'}\right) + \left(C' \dfrac{\tau'''}{\tau'}\right) = (I)_, \\
A''' + \left(B''' \dfrac{\tau''}{\tau'''}\right) + \left(C''' \dfrac{\tau'}{\tau'''}\right) = (I)_{,,,} \\
-\left\{\left(B' \dfrac{\tau''}{\tau'}\right)\mu_0 + \left(C' \dfrac{\tau'''}{\tau'}\right)\mu_1\right\} = (II)_, \\
\left\{\left(C''' \dfrac{\tau'}{\tau'''}\right)\mu_1 - \left(B''' \dfrac{\tau''}{\tau'''}\right)\mu_2\right\} = (II)_{,,,} \\
-\left\{\left(B' \dfrac{\tau''}{\tau'}\right)\nu_0 + \left(C' \dfrac{\tau'''}{\tau'}\right)\nu_1\right\} = (III)_, \\
\left\{\left(B''' \dfrac{\tau''}{\tau'''}\right)\nu_2 + \left(C''' \dfrac{\tau'}{\tau'''}\right)\nu_1\right\} = (III)_{,,,}
\end{array}\right\} \qquad (13)$$

so wird sich finden:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho_, = (I)_, + (II)_, \, x + (III)_, \, xy + \left(B' \dfrac{\tau''}{\tau'}\right)\gamma_0 + \left(C' \dfrac{\tau'''}{\tau'}\right)\gamma_1 \\
\varrho_{,,,} = (I)_{,,,} + (II)_{,,,} \, x + (III)_{,,,} \, xy + \left(B''' \dfrac{\tau''}{\tau'''}\right)\gamma_2 + \left(C''' \dfrac{\tau'}{\tau'''}\right)\gamma_3
\end{array}\right\} \qquad (14)$$

welche Gleichungen in Verbindung mit (12) die strenge Lösung des Problems enthalten, sobald die wahren Werthe von $y$ bekannt sind. Setzt man, wie man diess bei ersten Bahnbestimmungen zu thun genöthigt ist, die vier verschiedenen Werthe von $y$ der Null gleich, so enthalten die eben angeführten Gleichungen die Lösung der Aufgabe bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive, während sich die Gauss'sche Lösung auf die Grössen erster Ordnung beschränkt.

## §. 2. Auflösung der Fundamentalgleichungen.

Die Gleichungen (12) und (14) müssen durch Versuche gelöst werden und es müssen diejenigen Werthe von $x$ und $y$ gesucht werden, die in die Gleichungen (14) eingesetzt für $\varrho_,$ und $\varrho_{,,,}$ solche Werthe geben, dass die darnach berechneten Radienvektoren für den ersten und dritten Ort die Eingangs gewählten Grössen für $x$ und $y$ wieder finden lassen. Die Eruirung der Werthe für $x$ und $y$ macht sich sehr einfach, wiewol die Durchführung der Versuche mehr Zeit in Anspruch nimmt, als bei dem Gauss'schen Verfahren; doch die anderweitigen Abkürzungen der Rechnung kompensiren gänzlich diesen grösseren Zeitaufwand; ausserdem wird man aber eine so wesentlich grössere Konvergenz der Hypothesen erreichen, dass selbst bei einer viel grösseren Komplikation in den Versuchen noch immer ein Vortheil in der vorliegenden Methode zu finden wäre. Vorerst wird man bemerken, dass die mit $y$ multiplicirten Glieder, da dieselben konstant sind innerhalb einer Hypothese, mit dem konstanten Gliede $(I)$ vereinigt werden können vor dem Beginne der Versuche; in der ersten Hypothese wird man dieselben ganz unberücksichtigt lassen müssen und dieselben der Null gleich setzen. In der ersten Hypothese wird man bei den ersten Versuchen zweckmässig auch vorläufig $y$ der Null gleich annehmen und die Gleichungen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_, &= (I)_, + (II)_, \, x \\ \varrho_{,,,} &= (I)_{,,,} + (II)_{,,,} \, x \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

mindestens näherungsweise auflösen. Für $x$ wird man, wenn es sich um die Bestimmung einer Planetenbahn handelt, als Näherungswerth 0.04 setzen dürfen; wendet man diese Rechnungsform bei der Bestimmung einer Kometenbahn an, so wird man in der Regel einen Näherungswerth für $x$ aus den genähert bekannten Radienvektoren ableiten können; denn man wird selten genug die eben aufgestellten Rechnungsvorschriften auf die erste Bahnbestimmung eines Kometen anwenden, indem wol immer zuerst die parabolische Hypothese in Anwendung gebracht wird. Bezeichne ich nun den angenommenen Werth von $x$, mit dem ein Versuch durchgeführt wird mit $x_1$, den Werth jedoch den die Durchführung des Versuches für $x$ finden lässt mit $x_2$, so muss sein, wenn der wahre Werth von $x$ in Anwendung gebracht wird und ich vorläufig von $y$ absehe:

$$x_1 = x_2$$

Im Allgemeinen wird sich jedoch eine Differenz herausstellen, die weggeschafft werden muss durch Aenderungen von $x_1$.

Es ist aber:

$$d\varrho_{,} = (II)_{,}\ dx_1$$
$$d\varrho_{,,,} = (II)_{,,,}\ dx_1$$
$$dr_{,} = \sin\theta_{,}\ d\varrho_{,}$$
$$dr_{,,,} = \sin\theta_{,,,}\ d\varrho_{,,,}$$

andererseits ist aber:

$$x_2 = \frac{4}{(r_{,} + r_{,,,})^3}$$

$$dx_2 = -\frac{12}{(r_{,} + r_{,,,})^4}\,(dr_{,} + dr_{,,,})$$

oder

$$dx_2 = -\frac{12}{(r_{,} + r_{,,,})^4}\left\{(II)_{,}\sin\theta_{,} + (II)_{,,,}\sin\theta_{,,,}\right\} dx_1$$

Es wird aber sein müssen, wenn man sofort anstatt der Werthe für $x$ ihre Logarithmen in Betracht zieht:

$$d\log x_1 - d\log x_2 = \log x_2 - \log x_1$$

oder nach dem Obigen

$$d\log x_2 = -\frac{12}{(r_{,} + r_{,,,})^4}\left\{(II)_{,}\sin\theta_{,} + (II)_{,,,}\sin\theta_{,,,}\right\}\frac{x_1}{x_2}\,d\log x_1$$

woraus sich die Verbesserung von $\log x_1$ bestimmt nach:

$$\left. d\log x_1 = \frac{\log x_2 - \log x_1}{1 + \frac{12}{(r_{,} + r_{,,,})^4}\left\{(II)_{,}\sin\theta_{,} + (II)_{,,,}\sin\theta_{,,,}\right\}\frac{x_1}{x_2}} \right\} \quad (16)$$

Die Anwendung dieser ziemlich einfachen Differentialformel wird in der Regel eine so rasche Annäherung an die Wahrheit gestatten, dass schon der zweite Versuch das Ziel so nahe erreichen lässt, dass man darnach $y$ mit hinreichender Sicherheit berechnen kann. Es ist nämlich

$$y = \frac{r_{,,,} - r_{,}}{r_{,} + r_{,,,}}$$

Mit den so gefundenen Werthen wird man die Korrectionen berechnen, die $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,,}$ durch die Coefficienten, die mit dem Produkte $xy$ multiplicirt erscheinen, erfahren und wird diese Korrektion ebenfalls mit dem konstanten Gliede $(I)$ vereinigen, so dass wieder die Form der Gleichungen (15) hergestellt erscheint. Es wird nun der genaue Werth von $x$ ermittelt, der den aufgestellten Gleichungen völlig genügt; sollte es nöthig erscheinen den Werth von $y$ nochmals zu verbessern, so wird diess auf leichte Weise auf die eben angedeutete Weise geschehen können; übrigens sind die daraus entstehenden Aenderungen vierter Ordnung und könnten daher konsequenter Weise immer übergangen werden.

Ist die Auflösung für eine Hypothese gelungen, so wird sich, wenn nicht etwa die Rechnung mit dieser Hypothese abgeschlossen werden soll, die Aufgabe stellen, die Werthe von $y$ zu ermitteln, um für die folgende Hypothese wesentlich genauere Werthe zur Grundlage zu haben, wovon im nächsten Paragraphe gehandelt werden soll. Ist die Zwischenzeit aber kleiner als 40 — 50 Tage und bezieht sich die Bahn auf einen kleinen Planeten, so wird man wol meistens mit der ersten Hypothese $(y = 0)$ ausreichen.

Man kann allgemeiner sagen, dass die erste Hypothese ausreichend ist, wenn die heliocentrische Bewegung des Himmelskörpers kleiner als (10° — 12°) ist. Mit Rücksicht auf dieses habe ich eine Zusammenstellung der Formeln nach der vorliegenden Methode im Anhange aufgenommen.

Die Anwendung der eben aufgestellten Formeln wird unsicher, wenn einer der in der vorigen Abtheilung erwähnten Ausnahmefälle eintritt. Man wird demnach bei der Auswahl der Beobachtungen nach den daselbst angegebenen Principien (pag. 171) vorgehen. Liegen alle drei Beobachtungen in einem grössten Kreis so wird

$$\sin(w_{\prime\prime\prime} - w_{\prime}) = 0$$

und die eben aufgestellte Form unbrauchbar; es wäre aber ein Irrthum (vergl. pag. 164) behaupten zu wollen, dass dann eine Auflösung unmöglich wird, man wird nur die hier vorgeschlagene Auflösungsform verlassen müssen. Würde einmal dieser Fall eintreten oder sehr nahe stattfinden, so würde man $q_{\prime}$ und $q_{\prime\prime\prime}$ berechnen nach

$$\frac{g_{\prime}}{\sin \Delta_{\prime}} = q_{\prime} \qquad \frac{g_{\prime\prime\prime}}{\sin \Delta_{\prime\prime\prime}} = q_{\prime\prime\prime}$$

und dann die Gleichungen (6) schreiben

$$\varrho_{\prime} \sin(w_{\prime\prime\prime} - w_{\prime}) = A' + \frac{1}{n} B' + \frac{n''}{n} C'$$

$$\varrho_{\prime\prime\prime} \sin(w_{\prime} - w_{\prime\prime\prime}) = A''' + \frac{1}{n''} B''' + \frac{n}{n''} C'''$$

und jetzt die Werthe $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime\prime}$ als unbekannte zur Berechnung der Verhältnisse der Dreiecksflächen benutzen. Die Distanzen berechnen sich dann nach

$$\cos\theta_{\prime} = \frac{B_{\prime}}{r_{\prime}} \qquad \cos\theta_{\prime\prime\prime} = \frac{B_{\prime\prime\prime}}{r_{\prime\prime\prime}}$$

$$\varrho_{\prime} = B_{\prime} \operatorname{tg}\theta_{\prime} + f_{\prime} \qquad \varrho_{\prime\prime\prime} = B_{\prime\prime\prime} \operatorname{tg}\theta_{\prime\prime\prime} + f_{\prime\prime\prime}$$

Es wird aber $w_{\prime\prime\prime} - w_{\prime}$ sehr klein sein können, ehe man gezwungen sein wird von dieser Abänderung Gebrauch zu machen.

## §. 3. Bestimmung der Werthe $\gamma$.

Um zur Kenntniss der Werthe von $\gamma$ zu gelangen, wird man ähnlich wie früher die Verhältnisse: $\frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}}$ zu ermitteln haben. Ich bezeichne wieder dieses Verhältniss mit $\eta$ und unterscheide für die verschiedenen Dreiecke dieses Verhältniss durch entsprechende Accente. Es wird sein:

$\eta'''$ für das Dreieck zwischen dem 1. und 2. Ort
$\eta''$ » » » » » 1. » 3. »
$\eta'$ » » » » » 2. » 3. »

Vorerst wird man die heliocentrischen Bogen zwischen dem ersten und dritten Orte zu ermitteln haben; es ist hierfür die Kenntniss der heliocentrischen Orte nöthig. Setzt man:

$$\left.\begin{array}{ll} R_s' = R_{\prime} \sin(\lambda_{\prime} - L_{\prime}) & R_s''' = R_{\prime\prime\prime} \sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime}) \\ R_c' = - R_{\prime} \cos(\lambda_{\prime} - L_{\prime}) & R_c''' = - R_{\prime\prime\prime} \cos(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime}) \end{array}\right\} \quad (17)$$

und bezeichnet mit $l$ und $b$ die heliocentrischen Längen und Breiten, so wird sein:

$$\left.\begin{aligned} r_, \cos(l_, - \lambda_,) \cos b_, &= \varrho_, \cos\beta_, + R_c' \\ r_, \sin(l_, - \lambda_,) \cos b_, &= R_s' \\ r_, \sin b_, &= \varrho_, \sin\beta_, \\ r_{,,,} \cos(l_{,,,} - \lambda_{,,,}) \cos b_{,,,} &= \varrho_{,,,} \cos\beta_{,,,} + R_c''' \\ r_{,,,} \sin(l_{,,,} - \lambda_{,,,}) \cos b_{,,,} &= R_s''' \\ r_{,,,} \sin b_{,,,} &= \varrho_{,,,} \sin\beta_{,,,} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Nennt man den heliocentrischen Bogen zwischen dem

1. und 3. Orte : $2f''$
1. » 2. » : $2f'''$
2. » 3. » : $2f'$

so ist zunächst:

$$\sin^2 f'' = \sin^2 \tfrac{1}{2}(l_{,,,} - l_,) \cos b_, \cos b_{,,,} + \sin^2 \tfrac{1}{2}(b_{,,,} - b_,) \quad (19)$$

Nach der ersten und dritten Formel der Gleichung (10) wird sich $n$ und $n''$ leicht berechnen lassen. Es ist aber:

$$n = \frac{[r_{,,} r_{,,,}]}{[r_, r_{,,,}]} = \frac{r_{,,} \sin 2f'}{r_, \sin 2f''}$$

$$n'' = \frac{[r_, r_{,,}]}{[r_, r_{,,,}]} = \frac{r_{,,} \sin 2f'''}{r_{,,,} \sin 2f''}$$

daraus findet sich leicht

$$\left.\begin{aligned} r_{,,} \sin 2f''' &= r_{,,,} n'' \sin 2f'' \\ r_{,,} \cos 2f''' &= r_, n + r_{,,,} n'' \cos 2f'' \end{aligned}\right\} \quad (20)a$$

damit ist auch $2f'$ bestimmt, da nothwendig ist:

$$2f'' - 2f''' = 2f'$$

Man kann aber zur Controlle berechnen:

$$\left.\begin{aligned} r_{,,} \sin 2f' &= r_, n \sin 2f'' \\ r_{,,} \cos 2f' &= r_{,,,} n'' + r_, n \cos 2f'' \end{aligned}\right\} \quad (20)b$$

Es wird nach beiden Formeln $r_{,,}$ identisch gefunden werden müssen und ausserdem wird erfüllt sein müssen:

$$2f' + 2f''' = 2f''$$

Kleine von der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung herrührende Differenzen werden gleichmässig auf $f'$ und $f'''$ vertheilt werden können.

Sind auf die angegebene Weise die heliocentrischen Bogen und die Radienvektoren ermittelt, so werden ganz auf dieselbe Weise, wie diess bei der vorausgehenden Methode durchgeführt wurde (pag. 206, 207), die drei verschiedenen Werthe für $\eta$ ermittelt. Sind die heliocentrischen Bogen kleiner als 20°, so wird man Hansen's Kettenbruch mit Vortheil anwenden, durch den man sofort den zur genauen Berechnung nothwendigen Werth von $(\eta - 1)$ kennen lernt. Will man die strengen Gauss'schen Formeln anwenden, durch die man unmittelbar zur Kenntniss von $\eta$ gelangt, so wird man, um Alles scharf bestimmen zu können, anwenden:

$$(\eta - 1) = \frac{h}{\eta^2} (\eta + \tfrac{1}{9})$$

Es ist aber weiter:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{\tau''}{\tau'} \cdot \frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\tau''}{\tau'}\left\{1 - \frac{(\eta''-1)-(\eta'-1)}{\eta''}\right\} \\
\frac{n''}{n} &= \frac{\tau'''}{\tau'} \cdot \frac{\eta'}{\eta'''} = \frac{\tau'''}{\tau'}\left\{1 - \frac{(\eta'''-1)-(\eta'-1)}{\eta'''}\right\} \\
\frac{1}{n''} &= \frac{\tau''}{\tau'''} \cdot \frac{\eta'''}{\eta''} = \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - \frac{(\eta''-1)-(\eta'''-1)}{\eta''}\right\} \\
\frac{n}{n''} &= \frac{\tau'}{\tau'''} \cdot \frac{\eta'''}{\eta'} = \frac{\tau'}{\tau'''}\left\{1 - \frac{(\eta'-1)-(\eta'''-1)}{\eta'}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Mit Hilfe der zweiten Form wird sich $\gamma$ hinlänglich scharf ermitteln lassen, da die Werthe von $(\eta - 1)$ sich nach der oben angedeuteten Weise sehr scharf ermitteln lassen.

Vergleicht man diese Formeln mit (10), so wird man daraus leicht ableiten:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mu_0 x + \nu_0 xy - \frac{(\eta''-1)-(\eta'-1)}{\eta''} \\
\gamma_1 &= \mu_1 x + \nu_1 xy - \frac{(\eta'''-1)-(\eta'-1)}{\eta'''} \\
\gamma_2 &= \mu_2 x - \nu_2 xy - \frac{(\eta''-1)-(\eta'''-1)}{\eta''} \\
\gamma_3 &= -\mu x_1 - \nu_1 xy - \frac{(\eta'-1)-(\eta'''-1)}{\eta'}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Sind auf diese Weise die Werthe von $\gamma$ ermittelt, so beginnt die Rechnung wieder mit der Aufsuchung der Werthe von $x$ und $y$. Die Formeln (13) können aber unter Umständen eine kleine Abänderung erfahren und müssen nochmals gerechnet werden, wenn man die Aberration streng berücksichtigen will und dieselbe nicht vor Beginn der Rechnung mit Hilfe genäherter Distanzen wegschaffen konnte; es entstehen nämlich ganz nach den auf pag. 206 angeführten Formeln Korrektionen der Beobachtungszeiten, die etwas die Werthe der Zwischenzeiten alteriren.

Hat man die Beobachtungen völlig scharf für Aberration zu korrigiren, so wird $\varrho_{\prime\prime}$ ermittelt werden müssen. Mit voller Schärfe kann diess nach der zweiten und dritten Gleichung in (1) geschehen, meist wird es ausreichend sein, die dritte Gleichung allein zu benutzen, man hat dann einfach:

$$\varrho_{\prime\prime} = n \frac{\sin\beta_\prime}{\sin\beta_{\prime\prime}} \varrho_\prime + n'' \frac{\sin\beta_{\prime\prime\prime}}{\sin\beta_{\prime\prime}} \varrho_{\prime\prime\prime}$$

oder man berechnet $\varrho_{\prime\prime}$ aus den geocentrischen polaren Coordinaten und $r_{\prime\prime}$ nach:

$$\varrho_{\prime\prime} = R_{\prime\prime} \cos(\lambda_{\prime\prime} - L_{\prime\prime}) \cos\beta_{\prime\prime} \pm \sqrt{\{R_{\prime\prime} \cos(\lambda_{\prime\prime} - L_{\prime\prime}) \cos\beta_{\prime\prime}\}^2 + r_{\prime\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2}$$

Die Entscheidung, welches Zeichen die Wurzel erhält, wird selten zweifelhaft sein; bei kleinen Planeten wird man immer das positive Zeichen zu wählen haben.

Hat man sich der Wahrheit durch Bildung neuer Hypothesen hinreichend angenähert oder hält man die erste Hypothese für ausreichend, so beginnt die Berechnung der Elemente aus den heliocentrischen Orten auf die bekannte Weise (vgl. pag. 221 und pag. 225).

## §. 4. Zusammenstellung der Formeln.

Ich werde vorerst die Formeln so stellen, wie man dieselben anzuwenden hätte, wenn man eine völlige Genauigkeit erzielen wollte, ohne dass über die Elemente etwas Näheres bekannt ist. Ich setze demnach voraus, dass die Beobachtungen nach den im vorigen Abschnitt gegebenen Vorschriften (pag. 200 und ff.) streng für die Rechnung vorbereitet sind. Man wird dann zu berechnen haben:

$$\left.\begin{array}{ll}
\cos\psi_{\prime} = \cos\beta_{\prime} \cos(\lambda_{\prime} - L_{\prime}) & \cos\psi_{\prime\prime\prime} = \cos\beta_{\prime\prime\prime} \cos(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime}) \\
\sin\psi_{\prime} \cos P_{\prime} = \cos\beta_{\prime} \sin(\lambda_{\prime} - L_{\prime}) & \sin\psi_{\prime\prime\prime} \cos P_{\prime\prime\prime} = \cos\beta_{\prime\prime\prime} \sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime}) \\
\sin\psi_{\prime} \sin P_{\prime} = \sin\beta_{\prime} & \sin\psi_{\prime\prime\prime} \sin P_{\prime\prime\prime} = \sin\beta_{\prime\prime\prime} \\
f_{\prime} = R_{\prime} \cos\psi_{\prime} & f_{\prime\prime\prime} = R_{\prime\prime\prime} \cos\psi_{\prime\prime\prime} \\
B_{\prime} = R_{\prime} \sin\psi_{\prime} & B_{\prime\prime\prime} = R_{\prime\prime\prime} \sin\psi_{\prime\prime\prime} \\
R_s' = R_{\prime} \sin(\lambda_{\prime} - L_{\prime}) & R_s''' = R_{\prime\prime\prime} \sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime}) \\
R_c' = - R_{\prime} \cos(\lambda_{\prime} - L_{\prime}) & R_c''' = - R_{\prime\prime\prime} \cos(\lambda_{\prime\prime\prime} - L_{\prime\prime\prime})
\end{array}\right\} \text{I}$$

Hieran schliesst sich die Berechnung der Hilfsgrössen, die von den Zwischenzeiten unabhängig sind.

$$\left.\begin{array}{rl}
\cos(\lambda_{\prime} - \lambda_{\prime\prime}) \cos\beta_{\prime} \sin\beta_{\prime\prime} - \sin\beta_{\prime} \cos\beta_{\prime\prime} & = \sin\Delta_{\prime} \cos w_{\prime} \\
\sin(\lambda_{\prime} - \lambda_{\prime\prime}) \cos\beta_{\prime} & = \sin\Delta_{\prime} \sin w_{\prime} \\
\cos(\lambda_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime}) \cos\beta_{\prime\prime\prime} \sin\beta_{\prime\prime} - \sin\beta_{\prime\prime\prime} \cos\beta_{\prime\prime} & = \sin\Delta_{\prime\prime\prime} \cos w_{\prime\prime\prime} \\
\sin(\lambda_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime}) \cos\beta_{\prime\prime\prime} & = \sin\Delta_{\prime\prime\prime} \sin w_{\prime\prime\prime}
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin\beta_{\prime\prime} \sin w_{\prime\prime\prime} = g_{\prime} \sin G_{\prime} & \sin\beta_{\prime\prime} \sin w_{\prime} = g_{\prime\prime\prime} \sin G_{\prime\prime\prime} \\
- \cos w_{\prime\prime\prime} = g_{\prime} \cos G_{\prime} & - \cos w_{\prime} = g_{\prime\prime\prime} \cos G_{\prime\prime\prime} \\
G_{\prime} - \lambda_{\prime\prime} = F_{\prime} & G_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime} = F_{\prime\prime\prime} \\
\dfrac{g_{\prime}}{\sin\Delta_{\prime} \sin(w_{\prime\prime\prime} - w_{\prime})} = q_{\prime} & \dfrac{g_{\prime\prime\prime}}{\sin\Delta_{\prime\prime\prime} \sin(w_{\prime} - w_{\prime\prime\prime})} = q_{\prime\prime\prime} \\
q_{\prime} R_{\prime} \sin(L_{\prime} + F_{\prime}) = A' & q_{\prime\prime\prime} R_{\prime\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime\prime} + F_{\prime\prime\prime}) = A''' \\
- q_{\prime} R_{\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime} + F_{\prime}) = B' & - q_{\prime\prime\prime} R_{\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime} + F_{\prime\prime\prime}) = B''' \\
q_{\prime} R_{\prime\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime\prime} + F_{\prime}) = C' & q_{\prime\prime\prime} R_{\prime} \sin(L_{\prime} + F_{\prime\prime\prime}) = C'''
\end{array}\right\} \text{II}$$

Die Berechnung der folgenden Hilfsgrössen wird noch einmal vorgenommen werden müssen, wenn man im Verlaufe der Rechnung die Aberration einführt.

$$\left.\begin{array}{ll}
(T'' - T')\,k = \tau''' & (T''' - T'')\,k = \tau' \\
(T''' - T')\,k = \tau'' & \log k = 8.2355814 \\
\frac{1}{3}(\tau''^2 - \tau'^2) = \mu_0 & \dfrac{\tau'^2 \tau'''}{\tau''} = \nu_0 \\
\frac{1}{3}(\tau'''^2 - \tau'^2) = \mu_1 & \tau' \tau''' = \nu_1 \\
\frac{1}{3}(\tau''^2 - \tau'''^2) = \mu_2 & \dfrac{\tau' \tau'''^2}{\tau''} = \nu_2 \\
A' + \left(B' \frac{\tau''}{\tau'}\right) + \left(C' \frac{\tau'''}{\tau'}\right) = (\text{I})_{\prime} & A''' + \left(B''' \frac{\tau''}{\tau'''}\right) + \left(C''' \frac{\tau'}{\tau'''}\right) = (\text{I})_{\prime\prime\prime} \\
- \left\{\left(B' \frac{\tau''}{\tau'}\right)\mu_0 + \left(C' \frac{\tau'''}{\tau'}\right)\mu_1\right\} = (\text{II})_{\prime} & \left\{\left(C''' \frac{\tau'}{\tau'''}\right)\mu_1 - \left(B''' \frac{\tau''}{\tau'''}\right)\mu_2\right\} = (\text{II})_{\prime\prime\prime} \\
- \left\{\left(B' \frac{\tau''}{\tau'}\right)\nu_0 + \left(C' \frac{\tau'''}{\tau'}\right)\nu_{\prime}\right\} = (\text{III})_{\prime} & \left\{\left(B''' \frac{\tau'''}{\tau''}\right)\nu_2 + \left(C''' \frac{\tau'}{\tau'''}\right)\nu_1\right\} = (\text{III})_{\prime\prime\prime}
\end{array}\right\} \text{III}$$

Die nachträgliche Einführung der Aberration wird die wiederholte Berechnung der Formeln III fordern. Die zur Berechnung der Aberrationszeit nöthige Kenntniss der Distanzen fordert nur die Berechnung von $\varrho_{\prime\prime}$, da $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ immer sofort bei der Auflösung der Gleichung hervortreten. Es wird sein:

$$\left.\begin{array}{lll} \varrho_{\prime\prime} = n \frac{\sin\beta_{\prime}}{\sin\beta_{\prime\prime}} \varrho_{\prime} + n'' \frac{\sin\beta_{\prime\prime\prime}}{\sin\beta_{\prime\prime}} \varrho_{\prime\prime\prime} & & \\ \varDelta T' = -\varrho_{\prime}\, s & \log s = 2.76056 & \\ \varDelta T'' = -\varrho_{\prime\prime}\, s & \text{die Zeitkorrektionen werden in Einheiten} & \\ \varDelta T''' = -\varrho_{\prime\prime\prime}\, s & \text{der 5. Decimale des Tages erhalten} & \end{array}\right\} \text{IV}$$

In den vorausgehenden Formeln sind die gesammten Vorbereitungsrechnungen enthalten, und es kann nun an die Bildung der Hypothesen geschritten werden. Zunächst wird die Auflösung der höheren Gleichung vorgenommen werden müssen und $x$ und $y$ nach der auf pag. 233 angegebenen Weise gesucht werden. Man wird haben für die Bestimmung dieser Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll} K' = (\mathrm{I})_{\prime} + \left(B' \frac{\tau''}{\tau'}\right)\gamma_0 + \left(C' \frac{\tau'''}{\tau'}\right)\gamma_1 & \\ K''' = (\mathrm{I})_{\prime\prime\prime} + \left(B''' \frac{\tau''}{\tau'''}\right)\gamma_2 + \left(C''' \frac{\tau'}{\tau'''}\right)\gamma_3 & \\ \varrho_{\prime} = K' + (\mathrm{II})_{\prime}\, x + (\mathrm{III})_{\prime}\, xy & \\ \varrho_{\prime\prime\prime} = K''' + (\mathrm{II})_{\prime\prime\prime}\, x + (\mathrm{III})_{\prime\prime\prime}\, xy & \\ \frac{\varrho_{\prime} - f_{\prime}}{B_{\prime}} = \operatorname{tg}\theta_{\prime} & r_{\prime} = (\varrho_{\prime} - f_{\prime}) \operatorname{cosec}\theta_{\prime} \\ \frac{\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime}}{B_{\prime\prime\prime}} = \operatorname{tg}\theta_{\prime\prime\prime} & r_{\prime\prime\prime} = (\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime}) \operatorname{cosec}\theta_{\prime\prime\prime} \\ x = \frac{4}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} & y = \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}} \end{array}\right\} \text{V}$$

Die Werthe von $\gamma$ müssen in der ersten Hypothese der Null gleich gesetzt werden. Die Gleichungen V bestimmen dadurch die Werthe von $x$ und $y$, dass diese in die Ausdrücke für $\varrho_{\prime}$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ eingesetzt mit Benutzung der Relation zwischen $\varrho$ und $r$, sich aus dem letzteren wieder finden lassen. Hierbei wird die folgende Gleichung gute Dienste leisten.

$$d\log x_1 = \frac{\log x_2 - \log x_1}{1 + \frac{12}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^4}\left\{(\mathrm{II})_{\prime} \sin\theta_{\prime} + (\mathrm{II})_{\prime\prime\prime} \sin\theta_{\prime\prime\prime}\right\}\frac{x_1}{x_2}}$$

Die Ermittlung der heliocentrischen Orte ist die nächste Aufgabe. Man hat:

$$\left.\begin{array}{rl} r_{\prime} \cos(l_{\prime} - \lambda_{\prime}) \cos b_{\prime} &= \varrho_{\prime} \cos\beta_{\prime} + R_c' \\ r_{\prime} \sin(l_{\prime} - \lambda_{\prime}) \cos b_{\prime} &= R_s' \\ r_{\prime} \sin b_{\prime} &= \varrho_{\prime} \sin\beta_{\prime} \\ r_{\prime\prime\prime} \cos(l_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime\prime}) \cos b_{\prime\prime\prime} &= \varrho_{\prime\prime\prime} \cos\beta_{\prime\prime\prime} + R_c''' \\ r_{\prime\prime\prime} \sin(l_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime\prime}) \cos b_{\prime\prime\prime} &= R_s''' \\ r_{\prime\prime\prime} \sin b_{\prime\prime\prime} &= \varrho_{\prime\prime\prime} \sin\beta_{\prime\prime\prime} \end{array}\right\} \text{VI}$$

Die Ermittlung der heliocentrischen Bogen fordert die Kenntniss von $n$ und $n''$, und es wird zweckmässig sein gleich hier die Berechnung der Grössen vorzunehmen, die später zur Eruirung der differenten Werthe von $\gamma$ nöthig sind.

Es wird sein:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_0 &= \mu_0 x + \nu_0 xy \\ \Gamma_1 &= \mu_1 x + \nu_1 xy \\ \Gamma_2 &= \mu_2 x - \nu_2 xy \\ \Gamma_3 &= - \mu_1 x - \nu_1 xy \\ n &= \frac{\tau'}{\tau''} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_0 + \gamma_0} \\ n'' &= \frac{\tau'''}{\tau''} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_2 + \gamma_2} \end{aligned}\right\} \text{VII}$$

Die heliocentrischen Bogen werden gefunden durch:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 f'' &= \sin^2 \tfrac{1}{2} (l_{\prime\prime\prime} - l_\prime) \cos b_\prime \cos b_{\prime\prime\prime} + \sin^2 \tfrac{1}{2} (b_{\prime\prime\prime} - b_\prime) \\ r_{\prime\prime} \sin 2 f''' &= r_{\prime\prime\prime} n'' \sin 2 f'' \\ r_{\prime\prime} \cos 2 f''' &= r_\prime n + r_{\prime\prime\prime} n'' \cos 2 f'' \\ r_{\prime\prime} \sin 2 f' &= r_\prime n \sin 2 f'' \\ r_{\prime\prime} \cos 2 f' &= r_{\prime\prime\prime} n'' + r_\prime n \cos 2 f'' \\ 2 f' + 2 f''' &= 2 f'' \end{aligned}\right\} \text{VIII}$$

Die Berechnung der drei verschiedenen Werthe von $\eta$ geschieht nach den folgenden Formeln, wobei für die drei Fälle zu setzen ist:

| statt: $\eta$ | $\eta'$ | $\eta''$ | $\eta'''$ |
|---|---|---|---|
| » $\tau$ | $\tau'$ | $\tau''$ | $\tau'''$ |
| » $f$ | $f'$ | $f''$ | $f'''$ |
| » $r$ | $r_{\prime\prime}$ | $r_\prime$ | $r_\prime$ |
| » $r'$ | $r_{\prime\prime\prime}$ | $r_{\prime\prime\prime}$ | $r_{\prime\prime}$ |

$$m = \frac{\tau^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3} \qquad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r'}{r}}$$

$$l = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f} \qquad h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

$$(\eta - 1) = \frac{h}{\eta^2} (\eta + \tfrac{1}{9}) \qquad \text{IX}$$

$\xi$ wird mit Hilfe der Tafel X, $\log \eta^2$ aus $h$ nach Tafel IX gefunden (vgl. pag. 193).

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 &= \Gamma_0 - \frac{(\eta'' - 1) - (\eta' - 1)}{\eta''} \\ \gamma_1 &= \Gamma_1 - \frac{(\eta''' - 1) - (\eta' - 1)}{\eta'''} \\ \gamma_2 &= \Gamma_2 - \frac{(\eta'' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta''} \\ \gamma_3 &= \Gamma_3 - \frac{(\eta' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta'} \end{aligned}\right\} (\text{X})_a$$

welche Werthe von $\gamma$ zur genaueren Ermittlung von $\varrho_\prime$ und $\varrho_{\prime\prime\prime}$ dienen werden und unmittelbar die Berechnung von $K'$ und $K'''$ gestatten.

Es wird aber mit Recht bezweifelt werden können, ob die Fortsetzung der Rechnung nach $(\text{X})_a$ die bequemste ist; vielmehr wird sich das folgende Verfahren empfehlen. Setzt man ähnlich, wie in der ersteren Methode:

$$\frac{1}{n} = \frac{\tau''}{\tau'}\left\{1 - x\, Y'''\right\}$$
$$\frac{n''}{n} = \frac{\tau'''}{\tau'}\left\{1 - x\, Y''\right\}$$
$$\frac{1}{n''} = \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - x\, Y'\right\}$$
$$\frac{n}{n''} = \frac{\tau'}{\tau'''}\left\{1 - x\, Y_{,,}\right\}$$

so wird sein:

$$\left.\begin{array}{ll} Y''' = \dfrac{(\eta''-1)-(\eta'-1)}{\eta'' x} & Y' = \dfrac{(\eta''-1)-(\eta'-1)}{\eta'' x} \\ Y'' = \dfrac{(\eta'''-1)-(\eta'-1)}{\eta''' x} & Y_{,,} = \dfrac{(\eta'-1)-(\eta'''-1)}{\eta' x} \end{array}\right\} (\mathrm{X})_b$$

und man hat zur Bestimmung der Distanzen viel einfacher als früher:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho' = (I)_, - \left\{\left(\frac{\tau''}{\tau'} B'\right) Y''' + \left(\frac{\tau'''}{\tau'} C'\right) Y''\right\} x \\ \varrho''' = (II)_{,,,} - \left\{\left(\frac{\tau''}{\tau'''} B'''\right) Y' + \left(\frac{\tau'}{\tau'''} C'''\right) Y_{,,}\right\} x \end{array}\right\} (\mathrm{XI})_a$$

welche Gleichungen in Verbindung mit Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\varrho_, - f_,}{B_,} = \operatorname{tg}\theta_, & r_, = (\varrho_, - f_,)\operatorname{cosec}\theta_, \\ \dfrac{\varrho_{,,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} & r_{,,,} = (\varrho_{,,,} - f_{,,,})\operatorname{cosec}\theta_{,,,} \\ x = \dfrac{4}{(r_, + r_{,,,})^3} & \end{array}\right\} (\mathrm{XI})_b$$

die Lösung des Problems enthält; die Rechnung wird dann mit (VI) fortgesetzt, eventuell wiederholt.

Hat man sich der Wahrheit hinreichend genähert, so bricht die Berechnung der letzten Hypothese mit der Formel VI ab; aus den zwei heliocentrischen Orten wird die Eruirung der Elemente vorgenommen, worüber das Nöthige bei der ersteren Methode ausführlich behandelt wurde (vgl. pag. 221 und pag. 226); ich unterlasse es desshalb hier die dort angesetzten Formeln nochmals herzuschreiben.

Als erläuterndes Beispiel für die strenge Anwendung dieser Formeln wähle ich das von Gauss ausführlich behandelte Ceresbeispiel, um genügende Vergleichspunkte für beide Methoden zu erhalten und um die Anwendung meines Verfahrens an einem extremen Beispiele zu zeigen. Ich entlehne für die Rechnung aus der Theoria motus die folgenden Angaben:

| | m. Pariser Zeit | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1805 Sept. | 5.51336 | 95° 32′ 18″56 | — 0° 59′ 34″06 | 162° 54′ 56″00 | 0.003 1514 |
| » | 139.42711 | 99 49 5.87 | + 7 16 36.80 | 297 12 43.25 | 9.992 9861 |
| » | 265.39813 | 118 5 28.85 | + 7 38 49.39 | 61 58 50.71 | 0.005 6974 |

Ich finde nach $I$:

$$\begin{array}{llll} f_, = +\,0.387\,4081 & & f_{,,,} = +\,0.559\,9304 \\ \log B_, = 9.968\,3909 & & \log B_{,,,} = 9.926\,5640 \\ \log R'_s = 9_n968\,3796 & & \log R'''_s = 9.924\,8359 \\ \log R'_c = 9_n588\,2339 & & \log R'''_c = 9_n752\,0136 \end{array}$$

nach *II*.

$$\begin{array}{rlrl}
\log\sin\Delta_{,} = & 9.208\,7683 & \log\sin\Delta_{,,,} = & 9.492\,7890 \\
w_{,} = & -27^\circ 28' 35''62 & w_{,,,} = & 92^\circ 21' 25''25 \\
G_{,} = & 71\;59\;52.54 & G_{,,,} = & 183\;46\;7.38 \\
F_{,} = & -27\;49\;13.33 & F_{,,,} = & 83\;57\;1.51 \\
\log g_{,} = & 9.124\,0861 & \log g_{,,,} = & 9.948\,9615 \\
\log q_{,} = & 9.977\,0613 & \log q_{,,,} = & 0_n517\,9160 \\
\log A' = & 9.828\,9750 & \log A''' = & 0_n271\,9475 \\
\log B' = & 9.970\,0229 & \log B''' = & 0.068\,4252 \\
\log C' = & 9.732\,1173 & \log C''' = & 0.484\,6609
\end{array}$$

Aus den Zwischenzeiten finden sich die Grössen nach *III*, die keiner spätern Korrection bedürfen, da die Aberrationszeiten bereits berücksichtigt sind:

$$\begin{array}{rlrl}
\log\mu_0 = & 0.707\,2919 & \log\nu_0 = & 0.383\,748 \\
\log\mu_1 = & 9.308\,7931 & \log\nu_1 = & 0.698\,259 \\
\log\mu_2 = & 0.689\,5864 & \log\nu_2 = & 0.410\,303 \\
(I)_{,} = & +3.173\,6263 & (I)_{,,,} = & +3.272\,8839 \\
\log(II)_{,} = & 0_n996\,9638 & \log(II)_{,,,} = & 1_n022\,5037 \\
\log(III)_{,} = & 0_n876\,368 & \log(III)_{,,,} = & 1.304\,869
\end{array}$$

Hiermit sind die Vorbereitungsrechnungen beendet und ich gehe an die Bildung der ersten Hypothese, in der $y=0$ gesetzt wird; ich führe diese Hypothese nur sechsstellig durch.

1. Hypothese. Die Versuche nach *V* liessen mich bestimmen:

$$\begin{array}{rlrl}
\log xy = & 6_n8498 & \log\varrho_{,,,} = & 0.471\,842 \\
\log x = & 8.447\,099 & \log r_{,} = & 0.428\,134 \\
\log\varrho_{,} = & 0.462\,539 & \log r_{,,,} = & 0{,}406\,169
\end{array}$$

Vergleicht man diese Werthe mit denen der theoria motus, so sieht man, dass ich schon jetzt der Wahrheit näher bin, als Gauss nach Abschluss der dritten Hypothese, indessen halte ich die so ausserordentlich auffallend starke Konvergenz in diesem Beispiele theilweise für zufällig.

Nach *VI*, *VII* und *VIII* fand ich

$$\begin{array}{rlrl}
\log r_{,} = & 0.428\,134 & \log r_{,,,} = & 0.406\,169 \\
l_{,} = & 75^\circ 14' 5''8 & l_{,,,} = & 137^\circ 36' 42''4 \\
b_{,} = & -1^\circ 4' 28''7 & b_{,,,} = & +8^\circ 54' 17''4 \\
\log n = & 9.751\,485 & \log n'' = & 9.776\,944
\end{array}$$

$$f'' = 31^\circ 27' 53''6$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log r'' = & 0.413\,330 & \log r'' = & 0.413\,330 \\
2f''' = & 31^\circ 36' 21''3 & 2f' = & 31^\circ 19' 25''7
\end{array}$$

$2f'''$ und $2f'$ wurden um $0''1$ vergrössert, um der Relation

$$2f'' = 2f' + 2f'''$$

zu genügen.

Nach $IX$ erhielt ich:

$$\log \eta''' = 0.021\,292 \qquad \eta''' - 1 = 0.050\,2485$$
$$\log \eta'' = 0.086\,163 \qquad \eta'' - 1 = 0.219\,4470$$
$$\log \eta' = 0.020\,364 \qquad \eta' - 1 = 0.048\,0056$$

und damit nach $X$

$$\gamma_0 = +0.000\,3877 \qquad \gamma_2 = +0.000\,0588$$
$$\gamma_1 = +0.000\,0320 \qquad \gamma_3 = -0.000\,0274$$

2. **Hypothese.**

$$K' - (I)_, = +0.000\,7648 \qquad K''' - (I)_{,,,} = +0.000\,0549$$
$$\log xy = 6_n 85197 \qquad \log \varrho_{,,,} = 0.471\,8661$$
$$\log x = 8.446\,8344 \qquad \log r_, = 0.428\,2797$$
$$\log \varrho_, = 0.462\,6822 \qquad \log r_{,,,} = 0.406\,1966$$

Würde man, wie es bequemer ist, die Formeln $(X)_b$, $(XI)_a$ und $(XI)_b$ benutzt haben, so hätte man erhalten:

$$\log x = 8.446\,817$$
$$\log \varrho_, = 0.462\,679 \qquad \log r_, = 0.428\,277$$
$$\log \varrho_{,,,} = 0.471\,879 \qquad \log r_{,,,} = 0.406\,211$$

Man sieht, dass durch diese Abkürzung der Konvergenz nicht allzusehr geschadet wird.

$$\log r_, = 0.428\,2797 \qquad \log r_{,,,} = 0.406\,1966$$
$$l_, = 75^\circ 14' 31'' 33 \qquad l_{,,,} = 137^\circ 36' 37'' 92$$
$$b_, = -1^\circ\ 4' 28'' 73 \qquad b_{,,,} = +8^\circ 54' 17'' 21$$
$$\log n = 9.751\,2407 \qquad \log n'' = 9.776\,8777$$
$$f'' = 31^\circ 27' 38'' 84$$
$$\log r'' = 0.413\,2801 \qquad \log r'' = 0.413\,2801$$
$$2f''' = 31^\circ 36' 15'' 21 \qquad 2f' = 31^\circ 19' 2'' 47$$

$$\log \eta''' = 0.021\,2854 \qquad \eta''' - 1 = +0.050\,2324$$
$$\log \eta'' = 0.086\,1168 \qquad \eta'' - 1 = +0.219\,3176$$
$$\log \eta' = 0.020\,3643 \qquad \eta' - 1 = +0.048\,0074$$

$$\gamma_0 = +0.000\,3846 \qquad \gamma_2 = +0.000\,0627$$
$$\gamma_1 = +0.000\,0282 \qquad \gamma_3 = -0.000\,0237$$

3. **Hypothese** (Schluss).

$$K' - (I)_, = +0.000\,7567 \qquad K''' - (I)_{,,,} = +0.000\,0745$$
$$\log xy = 6_n 851\,892 \qquad \log \varrho_{,,,} = 0.471\,8698$$
$$\log x = 8.446\,8301 \qquad \log r_, = 0.428\,2788$$
$$\log \varrho_, = 0.462\,6813 \qquad \log r_{,,,} = 0.406\,2006$$

$$\log r_{,} = 0.428\,2788 \qquad \log r_{,,,} = 0.406\,2006$$
$$l_{,} = 75^{\circ}14'31''16 \qquad l_{,,,} = 137^{\circ}36'37''24$$
$$b_{,} = -1^{\circ}4'28''73 \qquad b_{,,,} = +8^{\circ}54'17''18$$
$$f'' = 31^{\circ}27'38''605$$

welche Werthe zur Eruirung der Elemente verwendet werden können. Um aber das vorliegende Beispiel allseitig zu erschöpfen, habe ich, um die rasche Konvergenz anschaulich vor die Augen treten zu lassen, aus jeder der drei Hypothesen die resultirenden Elemente berechnet und gefunden

| Hypoth. | I | II | III |
|---|---|---|---|
| $M_1$ | 297° 39′ 19″ 7 | 297° 40′ 49″ 03 | 297° 41′ 17″ 46 |
| $\pi$ | 146 0 6.6 | 146 1 43.92 | 146 1 12.34 |
| ☊ | 80 58 25.6 | 80 58 49.23 | 80 58 49.05 |
| $i$ | 10 37 29.7 | 10 37 32.93 | 10 37 32.96 |
| $\varphi$ | 4 36 31.4 | 4 37 58.20 | 4 37 57.54 |
| $\mu$ | 770″ 282 | 769″ 6939 | 769″ 6850 |
| $\log n$ | 9.751 485 | 9.751 2407 | 9.751 2417 |
| $\log n''$ | 9.776 944 | 9.776 8777 | 9.776 8749 |

Welche überwiegende Vortheile die so eben vorgeschlagene Methode gegenüber dem ersteren Verfahren darbietet, braucht kaum mehr hervorgehoben zu werden; wie man sieht, gibt schon die zweite Hypothese ein völlig ausreichendes Resultat; doch halte ich, wie schon oben bemerkt wurde, diese ausserordentlich rasche Konvergenz in diesem Beispiele für theilweise zufällig.

Es wird aber nicht immer nöthig sein von den oben aufgestellten strengen Formeln Gebrauch zu machen und besonders bei der ersten Bahnbestimmung eines Planeten, die für gewöhnlich nur zur Bildung einer Ephemeride unternommen und selten über 40 — 50 Tage hinausgeschoben wird, kann man wol die erste Hypothese als ausreichend betrachten, in dieser Hinsicht kann man dann von dem im Anhange aufgenommenen Schema Gebrauch machen. Bei der Vorbereitung der Beobachtungen für die Rechnung kann man entweder auf die oben mitgetheilte strenge Weise (pag. 200) verfahren, oder man wird, wie es dem vorliegenden Zwecke etwas anpassender ist, nur näherungsweise vorgehen; man wird hierbei etwa folgenden Weg einschlagen können.

Man verwandelt die Ortszeiten der Beobachtungen in Zeiten des Normalmeridians (gewöhnlich Berlin) und setzt dieselben in Decimaltheile des Tages um. Man nimmt nun aus dem Berliner Jahrbuch die auf den Jahresanfang bezogenen Längen der Sonne und die zugehörigen geocentrischen Entfernungen; die Sonnenbreite wird ganz fortgelassen; ferner entlehnt man aus diesem Jahrbuche die Nutation und Präcession (seit dem Jahresanfange) und die scheinbare Schiefe (diese Angaben finden sich in den neueren Jahrgängen des Berliner Jahrbuches auf pag. 100); mit letzterer setzt man die beobachteten Rectascensionen und Declinationen in Längen und Breiten um. Von den

Längen subtrahirt man die bereits aus dem Jahrbuche entlehnte Präcession und Nutation, die Breiten lässt man ungeändert. Den Einfluss der Fixsternaberration wird man übergehen dürfen, indem derselbe durch die Vernachlässigung der Planetenaberration in der Regel grossen Theils aufgehoben wird.

Will man nicht den locus fictus einführen, so wird die Ausserachtlassung der Parallaxe ebenfalls gestattet sein, wiewol diese Vernachlässigung in der Regel die bedeutendste ist.

Die Berechnung gestaltet sich nun ganz nach den im Anhange aufgenommenen Formeln, die ich hier nicht ansetze; wol aber werde ich hier ein nach diesen Formeln berechnetes Beispiel vollständig aufnehmen, damit die Kürze und bequeme Anordnung der Rechnung deutlich hervortritt; die Formelbezeichnung bezieht sich auf die im Anhange gewählte Zählung derselben.

Ich wähle als Beispiel drei Beobachtungen des Planeten »Helena«, die von ihrem Entdecker Watson in Ann Arbor wie folgt beobachtet wurde:

| | m. Zt. Ann Arbor. | app. A. R. (101) | app. Decl. (101) |
|---|---|---|---|
| 1868 Aug. 15 | $14^h 30^m 10^s$ | $358^\circ 24' 0''7$ | $-0^\circ 48' 22''3$ |
| Sept. 16 | 10 46 23 | 351 25 38 8 | −0 22 53.8 |
| Octob. 12 | 8 2 0 | 346 12 41.2 | −0 24 2.4 |

Ich habe absichtlich die Zwischenzeiten beträchtlich grösser, als nach der bestimmten Grenze (<50 Tage) und dieselben wesentlich ungleich genommen, wiewol mir das zu Gebote stehende Beobachtungsmaterial nahezu völlige Gleichheit zu erlangen erlaubt hätte, um zu zeigen, dass auch unter diesen ungünstigen Verhältnissen die Methode ein sehr brauchbares Resultat gibt; die Zwischenzeiten noch ungleicher annehmen zu wollen, ist aus anderen Gründen wenig empfehlenswerth, indem dann die Beobachtungsfehler allzu nachtheilig einwirken. Aus den früher erwähnten Gründen wird die Darstellung der mittleren Beobachtung weniger genügend sein, als diess hier gewöhnlich der Fall sein dürfte; trotzdem ist die erreichte Genauigkeit völlig befriedigend und der Fehler kaum grösser als die vernachlässigten kleinen Korrektionen. Für die oben angesetzten Beobachtungszeiten gibt mir das Berliner Jahrbuch die folgenden Reduktionselemente:

| | scheinb. Schiefe | Nutation | Praecess. |
|---|---|---|---|
| 1. | $23^\circ 27' 15''1$ | $-8''7$ | $+31''4$ |
| 2. | $15''6$ | −10.0 | +35.8 |
| 3. | 15.6 | −11.4 | +39.3 |

Die Verwandlung obiger Coordinaten in scheinbare Länge und Breite stellt sich nach *I* wie folgt:

| | *I* | *II* | *III* |
|---|---|---|---|
| tg $\delta$ | $8_n 148\ 346$ | $7_n 823\ 505$ | $7_n 844\ 667$ |
| sin $\alpha$ | $8_n 445\ 888$ | $9_n 173\ 366$ | $9_n 377\ 196$ |
| tg $N$ | 9.702 458 | 8.650 139 | 8.467 471 |
| $N$ | $26^\circ 44' 58''5$ | $2^\circ 33' 0''4$ | $1^\circ 40' 50''2$ |
| $N-\varepsilon$ | 3 17 43.4 | −20 53 45.2 | −21 46 25.4 |

| | *I* | *II* | *III* |
|---|---|---|---|
| $\cos(N-\varepsilon)$ | 9.999 281 | 9.970 454 | 9.967 855 |
| $\sec N$ | 0.049 157 | 0.000 433 | 0.000 187 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $8_n446\ 058$ | $9_n178\ 245$ | $9_n389\ 895$ |
| $\operatorname{tg}\lambda$ | $8_n494\ 496$ | $9_n149\ 132$ | $9_n357\ 937$ |
| $\lambda$ | $358^\circ 12' 41''6$ | $351^\circ 58' 32''8$ | $347^\circ 9' 21''8$ |
| — (Nut. + Praec.) | — 22.7 | — 25.8 | — 27.9 |
| $\sin\lambda$ | $8_n494\ 285$ | $9_n144\ 860$ | $9_n346\ 932$ |
| $\operatorname{tg}(N-\varepsilon)$ | 8.760 263 | $9_n581\ 814$ | $9_n601\ 451$ |
| $\operatorname{tg}\beta$ | $7_n254\ 548$ | 8.726 674 | 8.948 383 |
| $\beta$ | $-0^\circ 6' 10''6$ | $+3^\circ 3' 2''2$ | $+5^\circ 4' 27''2$ |

Die obigen Zeitangaben wurden auf den Berliner Meridian reducirt; die Zeit in Decimaltheile des Tages (Tafel *II*) verwandelt und anstatt des Monatstages überall der Jahrestag (Tafel *I*) angesetzt; aus dem Berliner Jahrbuch wurden die auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfangs reducirten Längen der Sonne und die Radienvectoren entnommen. Da die Sonnenbreiten und die Parallaxe ausser Acht gelassen wurden, so stellen sich demnach die Grundlagen für die weiteren Rechnungen wie folgt:

| 1868 | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|
| 228.87407 | $358^\circ 12' 18''9$ | $-0^\circ 6' 10''6$ | $143^\circ 40' 12''4$ | 0.005 256 |
| 260.71867 | 351 58 7.0 | +3 3 2.2 | 174 31 38.5 | 0.001 923 |
| 286.60451 | 347 8 53.9 | +5 4 27.2 | 199 59 58.6 | 9.998 709 |

Die Bahnbestimmung wird trotz der ziemlich grossen Zwischenzeiten wol etwas unsicher ausfallen, da die Breiten sehr klein sind, demnach das Gewicht der Bahnbestimmung (vergl. pag. 204) sehr klein wird; doch sind diese Umstände bei der Genauigkeit der Planetenbeobachtungen von geringerem Belange.

Ich beginne nun die Rechnung mit (*I*), indem ich die für den ersten und dritten Ort analogen Werthe neben einander stelle und die Kolumnen der Rechnung mit entsprechenden Accenten versehe.

| | ' | ''' |
|---|---|---|
| $\cos\beta$ | 9.999 999 | 9.998 295 |
| $\sin\beta$ | $7_n254\ 5..$ | 8.946 679 |
| $(\lambda - L)$ | $214^\circ 32' 6''5$ | $147^\circ 8' 55''3$ |
| $\sin(\lambda - L)$ | $9_n753\ 515$ | 9.734 369 |
| $\cos(\lambda - L)$ | $9_n915\ 810$ | $9_n924\ 321$ |
| $\sin\psi\cos P$ | $9_n753\ 514$ | 9.732 664 |
| $\operatorname{tg} P$ | 7.501 0.. | 9.214 015 |
| $\cos P$ | $9_n999\ 998$ | 9.994 259 |
| $\sin\psi$ | 9.753 516 | 9.738 405 |
| $\cos\psi$ | $9_n915\ 809$ | $9_n922\ 616$ |
| $\log f$ | $9_n921\ 065$ | $9_n921\ 325$ |

| | ′ | ‴ |
|---|---|---|
| $f$ | —0.833 806 | —0.834 306 |
| log $B$ | 9.758 772 | 9.737 114 |
| log $R_s$ | $9_n$758 771 | 9.733 078 |
| log $R_c$ | 9.921 066 | 9.923 030 |

Jetzt schreibe ich an den untern Rand eines Zettelchens die Werthe log sin $\beta_{\prime\prime}$ und log cos $\beta_{\prime\prime}$ und beginne die Berechnung der Formeln $II$, die ich ebenfalls in zwei Columnen führe. Bei der Berechnung von $g$ und $G$ hat man wol auf den Wechsel der Accente zu achten und ebenso am Schlusse der Rechnung. Es wird:

| | ′ | ‴ |
|---|---|---|
| $\lambda - \lambda_{\prime\prime}$ | +6° 14′ 11″9 | —4° 49′ 13″1 |
| cos $(\lambda - \lambda_{\prime\prime})$ | 9.997 422 | 9.998 461 |
| sin $(\lambda - \lambda_{\prime\prime})$ | 9.035 970 | $8_n$924 439 |
| log 1. Theil | 8.723 480 | 8.722 815 |
| log 2. Theil | $7_n$253 9.. | 8.946 063 |
| Gauss Log. | 0.014 485 | 0.172 602 |
| sin $\Delta$ cos $w$ | 8.737 965 | $8_n$550 213 |
| sin $w$ | 9.950 937 | $9_n$964 083 |
| sin $\Delta$ sin $w$ | 9.035 969 | $8_n$922 734 |
| $w$ | 63°16′29″8 | 247°1′3″7 |
| sin $\Delta$ | 9.085 032 | 8.958 651 |
| $g$ sin $G$ | $8_n$690 142 | 8.676 996 |
| cos $G$ | 9.996 608 | $9_n$997 588 |
| $g$ cos $G$ | 9.591 562 | $9_n$652 932 |
| $G$ | —7°9′7″9 | 173°57′59″0 |
| $F$ | 0° 52′ 45″1 | 181 59 52.0 |
| log $g$ | 9.594 954 | 9.655 344 |
| sin $(w_{\prime\prime\prime} - w_{\prime})$ | $8_n$814 759 | 8.814 759 |
| log *Nenn.* | $7_n$899 791 | 7.773 410 |
| log $q$ | $1_n$695 163 | 1.881 934 |
| $L_{\prime} + F$ | 144°32′57″5 | 325°40′4″4 |
| $L_{\prime\prime} + F$ | 175 24 23.6 | 356 31 30.5 |
| $L_{\prime\prime\prime} + F$ | 200 52 43.7 | 21 59 50.6 |
| sin$(L_{\prime} + F)$ | 9.763 430 | $9_n$751 270 |
| $q R_{\prime}$ | $1_n$700 419 | 1.887 190 |
| sin $(L_{\prime\prime} + F)$ | 8.903 550 | $8_n$782 549 |
| $-q R_{\prime\prime}$ | 1.697 086 | $1_n$883 857 |
| sin$(L_{\prime\prime\prime} + F)$ | $9_n$551 928 | 9.573 526 |
| $q R_{\prime\prime\prime}$ | $1_n$693 872 | 1.880 643 |
| log $A$ | $1_n$463 849 | 1.454 169 |
| log $B$ | 0.600 636 | 0.666 406 |
| log $C$ | 1.245 800 | $1_n$638 460 |

Der erste Theil der Rechnungen nach *III* muss in einer Kolumne geführt werden, der zweite wieder unter Berücksichtigung des analogen Verhaltens in zwei. Es wird:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T'' - T'$ | 31.84 460 | $\log \tau'''$ | 9.738 617 |
| $T''' - T'$ | 57.73 044 | $\log \tau''$ | 9.996 986 |
| $T''' - T''$ | 25.88 584 | $\log \tau'$ | 9.648 643 |
| $\log(T''-T')$ | 1.503 036 | $\log \tau'''^2$ | 9.477 234 |
| $\log(T'''-T')$ | 1.761 405 | $\log \tau''^2$ | 9.993 972 |
| $\log(T'''-T'')$ | 1.413 062 | $\log \tau'^2$ | 9.297 286 |
| $\log \tau'^2 \tau'''$ | 9.035 903 | $\log 3\mu_0$ | 9.896 489 |
| $\log \tau' \tau'''^2$ | 9.125 877 | $\log 3\mu_1$ | 9.007 726 |
| $\log \nu_0$ | 9.038 917 | $\log 3\mu_2$ | 9.836 411 |
| $\log \nu_1$ | 9.387 260 | $\log \mu_0$ | 9.419 368 |
| $\log \nu_2$ | 9.128 891 | $\log \mu_1$ | 8.530 605 |
| | | $\log \mu_2$ | 9.359 290 |

| | ′ | ‴ |
|---|---|---|
| $\log(\tau'' : \tau')$ | 0.348 343 | 0.258 369 |
| $\log(\tau''' : \tau')$ | 0.089 974 | 9.910 026 |
| log (1) | 0.948 979 | 0.924 775 |
| log (2) | 1.335 774 | $1_n$548 486 |
| $A$ | −29.09 707 | +28.45 567 |
| (1) | +8.89 158 | + 8.40 960 |
| (2) | +21.66 575 | −35.35 785 |
| (*I*) | +1.46 026 | + 1.50 742 |
| $I - f$ | + 2.294 066 | + 2.341 726 |
| $\log (1)\mu$ | 0.368 347 | 0.284 065 |
| $\log (2)\mu$ | 9.866 379 | $0_n$079 091 |
| Gauss Log. | 0.118 859 | 0.210 525 |
| log (*II*) | $0_n$487 206 | $0_n$494 590 |
| $\log (1)\nu$ | 9.987 896 | 0.053 666 |
| $\log (2)\nu$ | 0.723 034 | $0_n$935 746 |
| Gauss Log. | 0.073 359 | 0.061 078 |
| log (*III*) | $0_n$796 4.. | $0_n$874 7.. |

Die Vorbereitungsrechnungen sind beendet und es kann sofort an die Bildung der Versuche geschritten werden; ich bin hierbei in folgender Weise verfahren. Im ersten Versuche wurde $\log x = 8.60\,2060$ ($x = 0.04$) angenommen; die oben angesetzte Differentialformel liess nach Durchführung des ersten Versuches den Werth für den zweiten finden. Nach diesem zweiten Versuche, der nahehin schon genügend war, wurde $y$ ermittelt und berechnet

$$d\varrho_{\prime} = (III)_{\prime}\, xy \qquad d\varrho_{\prime\prime\prime} = (III)_{\prime\prime\prime}\, xy$$

mit Rücksicht auf die daraus entstehenden Aenderungen in $r_{,}$ und $r_{,,,}$ und der gefundenen Differenz zwischen $\log x_1$ und $\log x_2$ wurde der dritte Versuch gebildet; da die Aenderungen in $y$ merkbar waren, so wurden neue Werthe für $d\varrho_{,}$ und $d\varrho_{,,,}$ ermittelt und damit der letzte Versuch durchgeführt. Die eben erörterte Rechnung stellt sich wie folgt:

| | *I* | *II* | *III* | *IV* |
|---|---|---|---|---|
| $\log x_{,}$ | 8.602 060 | 8.640 640 | 8.642 210 | 8.642 182 |
| $(II)_{,} x$ | —0.122 819 | —0.134 229 | —0.134 715 | —0.134 706 |
| $(II)_{,,,} x$ | —0.124 925 | —0.136 531 | —0.137 025 | —0.137 016 |
| $\varrho_{,}-f_{,}$ | 2.171 147 | 2.159 837 | 2.157 106 | 2.157 131 |
| $\varrho_{,,,}-f_{,,,}$ | 2.216 801 | 2.205 195 | 2.202 013 | 2.202 041 |
| $\log(\varrho_{,}-f_{,})$ | 0.336 709 | 0.334 421 | 0.333 871 | 0.333 876 |
| $\log(\varrho_{,,,}-f_{,,,})$ | 0.345 727 | 0.343 447 | 0.342 820 | 0.342 825 |
| $\operatorname{tg}\theta_{,}$ | 0.577 937 | 0.575 649 | 0.575 099 | 0.575 104 |
| $\operatorname{tg}\theta_{,,,}$ | 0.608 613 | 0.606 333 | 0.605 706 | 0.605 711 |
| $\sin\theta_{,}$ | 9.985 340 | 9.985 190 | 9.985 154 | 9.985 154 |
| $\sin\theta_{,,,}$ | 9.987 215 | 9.987 085 | 9.987 048 | 9.987 049 |
| $\log r_{,}$ | 0.351 369 | 0.349 231 | 0.348 717 | 0.348 722 |
| $\log r_{,,,}$ | 0.358 512 | 0.356 362 | 0.355 772 | 0.355 776 |
| *Add.* log | 0.297 473 | 0.297 479 | 0.297 517 | 0.297 517 |
| $\log(r_{,}+r_{,,,})$ | 0.655 985 | 0.653 839 | 0.653 289 | 0.653 293 |
| $\log(r_{,}+r_{,,,})^3$ | 1.967 955 | 1.961 517 | 1.959 867 | 1.959 879 |
| $\log x_2$ | 8.634 105 | 8.640 543 | 8.642 193 | 8.642 181 |
| $\log x_2 - \log x_1$ | +32 045 | — 97 | — 17 | — 1 |
| $d\varrho_{,}$ | .. | —0.002 245 | —0.002 229 | .. |
| $d\varrho_{,,,}$ | .. | —0.002 688 | —0.002 670 | .. |

Es ist demnach für die weitere Rechnung anzunehmen:

$$\log\varrho_{,} = 0.121\,666 \qquad \log\varrho_{,,,} = 0.136\,002$$

Die Durchführung der Rechnung nach *V* liess mich finden:

| | , | ,,, |
|---|---|---|
| $\varrho\cos\beta$ | 0.121 665 | 0.134 297 |
| Gauss Log. | 0.212 211 | 0.208 118 |
| $r\cos b\cos(l-\lambda)$ | 0.333 876 | 0.342 415 |
| cos / sin | 9.985 154 | 9.987 257 |
| $r\cos b\sin(l-\lambda)$ | $9_n758\,771$ | 9.733 078 |
| $r\sin b$ | $7_n376\,2..$ | 9.082 681 |
| $\cos b$ | 0.000 000 | 9.999 382 |
| $r\cos b$ | 0.348 722 | 0.355 158 |
| $\operatorname{tg}(l-\lambda)$ | $9_n424\,895$ | 9.390 663 |
| $(l-\lambda)$ | $-14^\circ 53' 46''2$ | $+13^\circ 48' 43''3$ |

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | $343^{\circ}18'32''7$ | $0^{\circ}57'37''2$ |
| $\operatorname{tg} b$ | $7_n027\,5..$ | $8.727\,523$ |
| $b$ | $-0^{\circ}\;3'39''7$ | $+3^{\circ}\;3'23''6$ |
| $\log r$ | $0.348\,722$ | $0.355\,776$ |

| | |
|---|---|
| $l_{,,,}-l_{,}=17^{\circ}39'4''5$ | $\frac{1}{2}(l_{,,,}-l_{,})=8^{\circ}49'32''25$ |
| $b_{,,,}-b_{,}=3\;\;7\;\;3.3$ | $\frac{1}{2}(b_{,,,}-b_{,})=1^{\circ}33'31''65$ |
| $\sin^2\frac{1}{2}(l_{,,,}-l_{,})=8.371\,808$ | $\sin^2 f''=8.384\,651$ |
| $\cos b_{,}\cos b_{,,,}=9.999\,382$ | $\sin f''=9.192\,325$ |
| $\log$ 1. Thl. $=8.371\,190$ | $f''=8^{\circ}57'29''3$ |
| $\sin^2\frac{1}{2}(b_{,,,}-b_{,})=6.869\,224$ | $2f''=17^{\circ}54'58''6$ |
| $\log Add=0.013\,461$ | $\frac{1}{2}f''=4^{\circ}28'44''7$ |

Da die heliocentrische Bewegung nahe an 18° ist, während früher als Grenze 12° gesetzt wurde, so wird die Darstellung der mittleren Beobachtung nicht als sehr gut erwartet werden dürfen; die trotzdem sehr nahe Darstellung der mittleren Beobachtung, wie diess später sich herausstellt, gibt einen Beweis für die rasche Convergenz der vorliegenden Methode. Die weitere Berechnung auf $V$ liess finden:

| | |
|---|---|
| $\log r_{,}r_{,,,}=0.704\,498$ | $\log h=8.126\,092$ |
| $\log r_{,,,}:r_{,}=0.007\,054$ | $\log \frac{10}{9} h=8.213\,242$ |
| $\operatorname{tg}(45^{\circ}+\omega)=0.001\,763{,}5$ | *Add. Tfl.* $=-0.007\,039$ |
| $\omega=0^{\circ}\;6'56''3$ | . . $=8.206\,203$ |
| $2\omega=0\;13\;52.6$ | *Add. Tfl.* $=-0.006\,927$ |
| $\operatorname{tg} 2\omega^2=5.212\,028$ | . . $=8.206\,315$ |
| $\sin\frac{1}{2}f^2=7.785\,248$ | *Add. Tfl.* $=-0.006\,928$ |
| $\log Add=0.001\,159$ | Grenze $=8.206\,314$ |
| $\log Zahl.=7.786\,407$ | $\log(\eta-1)=8.164\,921$ |
| $\cos f''=9.994\,670$ | $\log\eta=0.006\,303$ |
| $\lg l=7.791\,737$ | $\log\eta^2=0.012\,606$ |
| $\lg Add=0.003\,214$ | $\log m:\eta^2=8.037\,519$ |
| $\lg\frac{5}{6}+l=9.924\,033$ | $\log Subt.=0.118\,563$ |
| $2\cos f''=0.295\,700$ | $\sin\frac{1}{2}g^2=7.673\,174$ |
| $\sqrt{r r_{,,,}}=0.352\,249$ | $\sin\frac{1}{2}g=8.836\,587$ |
| $\log(Nenn)=0.647\,949$ | $\frac{1}{2}g=3^{\circ}56'\;9''5$ |
| $\log(Nenn)^3=1.943\,847$ | $\frac{1}{2}f=4\;28\;44.7$ |
| $\log m_{,,}=8.050\,125$ | $g=7\;52\;19.0$ |

nach $VI$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}(f+g)$ | $=8^{\circ}24'54''2$ | $\frac{1}{2}(f-g)$ | $=0^{\circ}32'35''2$ |
| $\sin\frac{1}{2}(f+g)$ | $=9.165\,372$ | $\cos\frac{1}{2}(f+g)$ | $=9.995\,299$ |
| $\sec 2\omega$ | $=0.000\,004$ | $\operatorname{tg} 2\omega$ | $=7.606\,014$ |
| $\sin\frac{1}{2}(f-g)$ | $=7.976\,759$ | $\cos\frac{1}{2}(f-g)$ | $=9.999\,980$ |
| $(\gamma)^2\sin\frac{1}{2}(-)\cos\frac{1}{2}\varphi$ | $=7.601\,313$ | $(\gamma)^2\sin\frac{1}{2}(+)\sin\frac{1}{2}\varphi$ | $=7.605\,994$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ | = 9.999 838 | | $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ | = 9.963 815 |
| $(\gamma)^2 \cos\frac{1}{2}\,(-)\cos\frac{1}{2}\varphi$ | = 9.165 376 | | $(\gamma)^2 \cos\frac{1}{2}\,(+)\sin\frac{1}{2}\varphi$ | = 7.976 763 |
| $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(F-G)$ | = 8.435 937 | | $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(F+G)$ | = 9.629 231 |
| $(\gamma)^2 \sin\frac{1}{2}\varphi$ | = 8.012 948 | | $\frac{1}{2}(F+G)$ | = 23° 3′ 55″8 |
| $\cos\frac{1}{2}\varphi$ | = 9.998 927 | | $\frac{1}{2}(F-G)$ | = 1 33 46.7 |
| $(\gamma)^2 \cos\frac{1}{2}\varphi$ | = 9.165 538 | | $F$ | = 24 37 42 5 |
| $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ | = 8.847 410 | | $G$ | = 21 30 9.1 |
| $\frac{1}{2}\varphi$ | = 4° 1′ 31″7 | | $\log (\gamma)^2$ | = 0.166 611 |
| $\varphi$ | = 8° 3′ 3″4 | | Probe | = 0.166 610 |
| $\sin\varphi$ | = 9.146 294 | | | |
| $\log e''$ | = 4.460 719 | | | |

weiter wurde nach *VII*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin 2f''$ | = 9.488 025 | $\cos\varphi^2$ | = 9.991 396 |
| $\eta_{\prime\prime} r_{\prime} r_{\prime\prime\prime}$ | = 0.710 801 | $\log a$ | = 0.412 284 |
| $\sin 2f'' \eta_{\prime\prime} r_{\prime} r_{\prime\prime\prime}$ | = 0.198 826 | $\log\sqrt{a}$ | = 0.206 142 |
| $\log\sqrt{p}$ | = 0.201 840 | $\log a^{\frac{3}{2}}$ | = 0.618 426 |
| $\log p$ | = 0.403 680 | $\log\mu$ | = 2.931 581 |

| | $'$ | $'''$ |
|---|---|---|
| $v$ | 15° 40′ 13″2 | 33° 35′ 11″8 |
| $E$ | 13 37 50.1 | 29 22 28.1 |
| $\sin E$ | 9.372 288 | 9.690 653 |
| $\log e'' \sin E$ | 3.833 007 | 4.151 372 |
| $\Delta E$ | −1° 53′ 27″8 | −3° 56′ 10″1 |
| $M$ | 11° 44′ 22″3 | 25° 26′ 18″0 |
| $\Delta M$ = | 49315″7 | $\log\mu$ = 2.931 580 |
| $\log dM$ = | 4.692 985 | $\mu$ = 854″240 |

nach *VIII*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(l_{\prime\prime\prime}-l_{\prime})$ | = 9.979 056 | $\mathrm{tg}\,i$ | = 9.253 951 |
| $\log$ 2. Thl. | = $7_n$0066 . . | $i$ | = 10° 10′ 25″0 |
| $\lg$ *Add* | = 0.008 181 | $\cos i$ | = 9.993 117 |
| $\log$ (*Zähl.*) | = 8.735 704 | $(l_{\prime\prime\prime}-\Omega)$ | = 17° 18′ 39″8 |
| $\sin(l_{\prime\prime\prime}-l_{\prime})$ | = 9.481 761 | $\mathrm{tg}(l_{\prime\prime\prime}-\Omega)$ | = 9.493 705 |
| $\mathrm{tg}\,i\cos(l_{\prime}-\Omega)$ | = 9.253 943 | $\mathrm{tg}\,u_{\prime}$ | = $7_n$780 5 . . |
| $\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$ | = 9.999 992 | $\mathrm{tg}\,u_{\prime\prime\prime}$ | = 9.500 588 |
| $\mathrm{tg}\,i\sin(l_{\prime}-\Omega)$ | = $7_n$027 5 . . | $u_{\prime}$ | = − 0° 20′ 44″3 + 0″1 |
| $\mathrm{tg}(l_{\prime}-\Omega)$ | = $7_n$773 6 . . | $u_{\prime\prime\prime}$ | = + 17° 34′ 14″5 − 0″1 |
| $(l_{\prime}-\Omega)$ | = − 0° 20′ 24″7 | $\pi$ | = 327° 38′ 0″0 |
| $\Omega$ | = 343° 38′ 57″4 | | |

32*

Durch die Formeln $IX$ erhielt ich die folgende Darstellung der mittlern Beobachtung im Sinne (Beob. — Rechg.)

$$d\lambda = + 5''9$$
$$d\beta = - 0''7$$

Die Darstellung kann als hinreichend betrachtet werden und ist von derselben Ordnung wie die vernachlässigte Parallaxe. Bei der grossen heliocentrischen Bewegung (nahe 18°, $T''' - T'$ nahe 58 Tage) muss diese gute Uebereinstimmung als neuer Beweis der Brauchbarkeit der zweiten Methode angesehen werden. Ich nehme als Epoche August 15.0 und erhalte so die folgenden Elemente:

(101) Helena

$$\begin{aligned} M &= 11^\circ 31' \; 55''6 \\ \pi &= 327 \; 38 \; 0.0 \\ \Omega &= 343 \; 38 \; 57.4 \\ i &= 10 \; 10 \; 25.0 \\ \varphi &= 8 \; 3 \; 3.4 \\ \mu &= 854''240 \\ \log a &= 0.412\,285 \end{aligned}$$

($\pi$, $\Omega$, $i$: m. Aequinoct. 1868.0)

Bevor ich mit der Methode der Bahnbestimmung aus drei Orten abschliesse, will ich noch einen in der Praxis häufig vorkommenden Fall näher betrachten. Häufig genug sind genäherte Elemente bekannt; die Benutzung derselben zur Bildung der ersten Hypothese wird schon gewöhnlich so gute Resultate geben, dass man mit Rücksicht auf die starke Convergenz der vorliegenden Methode, meist wird mit dieser die Rechnung abschliessen können. Das Verfahren hierfür wird sich leicht aus dem Vorausgehenden ableiten lassen. Man wird die Berechnung der Formeln $I$ und $II$ (pag. 238) zunächst ausführen, dann mit Hilfe der genähert bekannten Elemente nach $(IX)$, $(X)_b$, $(XI)_a$ und $(XI)_b$ (pag. 240, 241) die Werthe der Coefficienten von $x$ bestimmen; jetzt wird die Rechnung mit der Auflösung der Gleichungen $(V)$ (pag. 239) begonnen und auf die bekannte Weise fortgesetzt, eventuell mit verbesserten Werthen wiederholt.

Sehr ähnlich wird man verfahren können, wenn es sich bei der Bestimmung einer Kometenbahn zeigt, dass die Parabel den drei zu Grunde gelegten Beobachtungen nicht befriedigend genügt und man den die Beobachtungen darstellenden Kegelschnitt finden will. Man kann bei der Bestimmung auf sehr differente Weise vorgehen, der Weg, den die in diesem Bande vorgetragenen Methoden zu verfolgen gestatten, wird sich etwa auf die folgende Weise gestalten. Man bestimmt zunächst mit Hilfe der besten parabolischen Elemente die Verhältnisse der Sektoren zu den Dreiecken nach: (pag. 102, 104)

$$\sin\theta = \frac{6\,kt}{2^{\frac{3}{2}}(r+r')^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{3}\theta\sqrt{2}$$
$$(\eta - 1) = \tfrac{4}{3}\cdot\frac{\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma}$$

und wird jetzt in der Lage sein, sehr nahe richtige Werthe für die Verhältnisse der Dreiecksflächen einzusetzen nach der oben angedeuteten Weise.

---

Ich hatte während des Druckes dieses Werkes Gelegenheit die Genauigkeit und Kürze der eben angewendeten Methode neuerdings zu erproben an dem Planeten »Hecuba (108)«, und ich setze, um die eben vorgetragene Methode zu empfehlen, die Hauptmomente der Rechnung hier an. Die zu Grunde gelegten Beobachtungsdaten und die Sonnenorte waren:

| mittl. Berl. Zeit | | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1869 April | 2.44541 | 182° 21′ 2″2 | — 1° 35′ 32″3 | 13° 11′ 30″8 | 0.000190 |
| | 13.50525 | 180 23 58.8 | — 1 48 47.6 | 24 2 58.1 | 0.001573 |
| | 31.43145 | 178 23 2.6 | — 2 4 46.9 | 41 30 5.7 | 0.003616 |

aus diesen Daten erhielt ich, ohne mich allzusehr zu beeilen, nach einer Stunde die folgenden Werthe:

$$\log x = 8.286946 \qquad \log \varrho' = 0.290511$$
$$\log y = 6.00 \qquad \log \varrho''' = 0.533318$$

aus welchen Werthen auf die bekannte Weise die Elemente ermittelt wurden. Ich fand für dieselben:

(108) Hecuba

Epoche 1869, Mai 0.0 mittl. Berl. Zeit

$$\begin{aligned} M &= 50^\circ\ 9'\ 57''0 \\ \pi &= 129\ 11\ 8.5 \\ \Omega &= 352\ 53\ 11.7 \\ i &= 4\ 38\ 32.2 \\ \varphi &= 7\ 14\ 7.6 \\ \mu &= 621''730 \\ \log a &= 0.504270 \end{aligned} \qquad (\pi, \Omega, i:\ \text{m. Aeq. } 1869.0)$$

Die Darstellung der mittleren Beobachtung war:

$$d\lambda = -0''6$$
$$d\beta = 0''0$$

so dass der Fehler der Hypothese nicht merklich grösser war, als die unvermeidliche Unsicherheit einer sechsstelligen logarithmischen Rechnung. Bedenkt man, dass die Zwischenzeit nahe an 29 Tage ist, so kann man wol behaupten, dass durch diese Methode Alles erreicht ist, was nur gefordert werden kann.

---

## 2. Abtheilung.

### Bahnbestimmung aus vier Beobaohtungen.

Bei der Bahnbestimmung aus drei Orten treten nicht selten Fälle (Ausnahmefälle) ein, welche die Bahnbestimmung entweder unmöglich, oder nicht mit der wünschenswerthen Genauigkeit durchzuführen gestatten; im Allgemeinen wird eine geänderte Auswahl der Beobachtungen den Nachtheil mindestens theilweise heben; ist jedoch die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik sehr klein, so dass die geocentrischen Breiten stets sehr nahe Null sind, so wird niemals eine Bahnbestimmung aus drei Orten mit Sicherheit möglich sein, es ist für diesen Fall desshalb nothwendig, eine Methode zu besitzen, um auch hier das Ziel mit Sicherheit zu erlangen. Man wird zu diesem Ende vier Beobachtungen der Bahnbestimmung zu Grunde legen, da aber diese acht Bestimmungsstücke geben, während nur sechs Elemente zu bestimmen sind, so wird man zwei Bestimmungsstücke als nicht vorhanden betrachten müssen. Gauss hat in Rücksicht auf die Anwendung bei den kleinen Planeten zwei Breiten fortgelassen und um eine grössere Convergenz in den Hypothesen zu erzielen, die Breiten, welche zu den äusseren Beobachtungen gehören. Ich bin aber in der Lage, ein Verfahren anzugeben, welches selbst anwendbar ist, wenn die geocentrische Bewegung des Himmelskörpers ausschliesslich in der Breite stattfindet (Gauss Methode ist dann nicht brauchbar) und stelle die äusseren Beobachtungen vollständig dar, ohne dass der raschen Convergenz allzusehr geschadet und die nothwendige Rechnung allzu weitläufig wird.

### §. 1. Aufstellung der Fundamentalgleichungen.

Da vier Beobachtungen acht Bestimmungsstücke enthalten, aber nur sechs Elemente als willkürliche Constanten vorhanden sind, so ist das Problem durch vier Beobachtungen mehr als bestimmt; da fast nothwendig wegen den Beobachtungsfehlern und Störungen allen acht Coordinaten durch ein Elementensystem nicht genügt werden kann, so wird man zwei Bestimmungsstücke zweckentsprechend weglassen und sich begnügen, den übrigen sechs Coordinaten ein System anzuschliessen. Ich werde ähnlich wie bei dem Kometenprobleme verfahren; es soll nämlich den beiden mittleren Beobachtungen dadurch Genüge geleistet werden, dass der Himmelskörper zu den Zeiten der zweiten und dritten Beobachtung in gewissen grössten Kreisen steht, die vorläufig ihrer Lage nach nur theilweise bestimmt erscheinen, indem an dieselben die Bedingungen geknüpft sind, dass der eine durch die zweite, der andere durch die dritte Beobachtung hindurchgelegt erscheint; die äusseren Beobachtungen sollen durch die Elemente völlig

genau dargestellt werden. Man kann hierbei bemerken, dass die Formeln auch dann das Ziel erreichen lassen, wenn eine beliebige Kombination der vollständigen und unvollständigen Beobachtungen vorgelegt ist.

Die der Rechnung zu Grunde zu legenden Daten, ganz so vorbereitet, wie diess in der vorausgehenden Abtheilung erläutert wurde, seien dargestellt durch das folgende Schema:

| | Beob.-Zeit | Beob. Länge | Beob. Breite | Sonnenlänge | Entfg. d. ⊙ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T'$ | $\lambda'$ | $\beta'$ | $L'$ | $R'$ |
| 2 | $T''$ | $\lambda''$ | $\beta''$ | $L''$ | $R''$ |
| 3 | $T_0''$ | $\lambda_0''$ | $\beta_0''$ | $L_0''$ | $R_0''$ |
| 4 | $T'''$ | $\lambda'''$ | $\beta'''$ | $L'''$ | $R'''$ |

Die Bedingung, dass der eine grösste Kreis durch die zweite Beobachtung hindurchgeht, ist ausgedrückt durch:

$$\operatorname{tg} J \sin(\lambda'' - \Pi) = \operatorname{tg} \beta''$$

für den durch die dritte Beobachtung hindurchgelegten grössten Kreis wird ähnlich sein

$$\operatorname{tg} J_0 \sin(\lambda_0'' - \Pi_0) = \operatorname{tg} \beta_0''$$

Die nähere Bestimmung und Fixirung der Lage dieser beiden grössten Kreise verschiebe ich auf den §. 4.

Bei der Bestimmung parabolischer Elemente (pag. 98, 99) wurde eine Relation zwischen $\varrho'$ und $\varrho'''$ (den Distanzen) aufgestellt mit Rücksicht auf die Coordinaten des ersten und dritten Ortes und auf den durch die mittlere Beobachtung hindurchgelegten grössten Kreis; betrachte ich einmal die zweite, das anderemal die dritte Beobachtung der vorliegenden vier Beobachtungen als die mittlere, so werden sich zwei Relationen zwischen $\varrho'$ und $\varrho'''$ ergeben, die sofort die wahren Werthe für die Distanzen finden liessen, wenn die in den Gleichungen auftretenden Verhältnisse der Dreiecksflächen vor der Auflösung des Problems genau bekannt wären; da aber hinreichende Näherungen substituirt werden können, so werden die zwei Gleicungen sofort für $\varrho'$ und $\varrho'''$ Näherungswerthe finden lassen. Setzt man

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{[r'r'']}{[r'r''']} = n'' & \dfrac{[r'r_0'']}{[r'r''']} = n_0'' \\[2ex]
\dfrac{[r''r''']}{[r'r''']} = n & \dfrac{[r_0''r''']}{[r'r''']} = n_0 \\[2ex]
\mathfrak{F}' = \sin\beta' \cos J - \sin(\lambda' - \Pi) \cos\beta' \sin J; & \mathfrak{F}_0' = \sin\beta' \cos J_0 - \sin(\lambda' - \Pi_0) \cos\beta' \sin J_0 \\
\mathfrak{F}''' = \sin(\lambda''' - \Pi) \cos\beta''' \sin J - \sin\beta''' \cos J; & \mathfrak{F}_0''' = \sin(\lambda''' - \Pi_0) \cos\beta''' \sin J_0 - \sin\beta''' \cos J_0 \\[2ex]
\dfrac{\sin J}{\mathfrak{F}'''} R' \sin(L' - \Pi) = A & \dfrac{\sin J_0}{\mathfrak{F}_0'''} R' \sin(L' - \Pi_0) = A_0 \\[2ex]
\dfrac{\sin J}{\mathfrak{F}'''} R'' \sin(L'' - \Pi) = B & \dfrac{\sin J_0}{\mathfrak{F}_0'''} R_0'' \sin(L_0'' - \Pi_0) = B_0 \\[2ex]
\dfrac{\sin J}{\mathfrak{F}'''} R''' \sin(L''' - \Pi) = C & \dfrac{\sin J_0}{\mathfrak{F}_0'''} R''' \sin(L''' - \Pi_0) = C_0 \\[2ex]
\dfrac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}'''} = D & \dfrac{\mathfrak{F}_0'}{\mathfrak{F}_0'''} = D_0
\end{array}\right\} \quad (1)$$

so gestalten sich dann die beiden Relationen zwischen $\varrho'$ und $\varrho'''$ (vgl. pag. 99) wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}\varrho''' &= \frac{n}{n''}A - \frac{1}{n''}B + C + \frac{n}{n''}D\varrho' \\ \varrho''' &= \frac{n_0}{n_0''}A_0 - \frac{1}{n_0''}B_0 + C_0 + \frac{n_0}{n_0''}D_0\varrho'\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

## §. 2. Auflösung der Gleichungen.

Die Auflösung der Gleichungen (2) setzt voraus, dass die Verhältnisse der Dreiecksflächen auf Glieder von mindestens zweiter Ordnung inclusive in Bezug auf die Zwischenzeiten genau bekannt sein müssen. Auf pag. 110 finden sich die hier in Anwendung zu bringenden Ausdrücke. Setzt man mit Rücksicht auf die hier gewählte Bezeichnung (vgl. pag. 255)

$$\left.\begin{array}{ll}\tau' = k(T''' - T'') & \tau_0' = k(T''' - T_0'') \\ \tau''' = k(T'' - T') & \tau_0''' = k(T_0'' - T') \\ \multicolumn{2}{c}{\tau'' = k(T''' - T')} \\ \frac{1}{6}(\tau'^2 - \tau'''^2) = \mu_1 & \frac{1}{6}(\tau_0'^2 - \tau_0'''^2) = \mu_1^0 \\ \frac{1}{6}(\tau''^2 - \tau'''^2) = \mu_2 & \frac{1}{6}(\tau''^2 - \tau_0'''^2) = \mu_2^0 \\ \tau'\tau''' = \nu_1 & \tau_0'\tau_0''' = \nu_1^0 \\ \frac{\tau'\tau'''^2}{\tau''} = \nu_2 & \frac{\tau_0'\tau_0'''^2}{\tau''} = \nu_2^0 \\ x = \frac{4}{(r_, + r_{,,,})^3} & y = \frac{r_{,,,} - r_,}{r_, + r_{,,,}}\end{array}\right\} \quad (3)$$

so ist streng: (vergl. pag. 231)

$$\left.\begin{aligned}\frac{n}{n''} &= \frac{\tau'}{\tau'''}\left\{1 - \mu_1 x + \nu_1 xy + \gamma_1\right\} \\ \frac{1}{n''} &= \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - \mu_2 x + \nu_2 xy + \gamma_2\right\} \\ \frac{n_0}{n_0''} &= \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}\left\{1 - \mu_1^0 x + \nu_1^0 xy + \gamma_1^0\right\} \\ \frac{1}{n_0''} &= \frac{\tau''}{\tau_0'''}\left\{1 - \mu_2^0 x + \nu_2^0 xy + \gamma_2^0\right\}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Vor Beginn der Rechnung sind die Werthe von $\gamma$ unbekannt, können aber, da dieselben vierter Ordnung sind, in der ersten Hypothese der Null gleich gesetzt werden. Es ist aber, wenn wie früher durch $\eta$ das Verhältniss: $\frac{Sect.}{\Delta}$ bezeichnet wird (vgl. p. 237)

$$\left.\begin{aligned}\frac{n}{n''} &= \frac{\tau'}{\tau'''}\cdot\frac{\eta'''}{\eta'} = \frac{\tau'}{\tau'''}\left\{1 - \frac{(\eta'-1) - (\eta'''-1)}{\eta'}\right\} \\ \frac{1}{n''} &= \frac{\tau''}{\tau'''}\cdot\frac{\eta'''}{\eta''} = \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - \frac{(\eta''-1) - (\eta'''-1)}{\eta''}\right\} \\ \frac{n_0}{n_0''} &= \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}\cdot\frac{\eta_0'''}{\eta_0'} = \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}\left\{1 - \frac{(\eta_0'-1) - (\eta_0'''-1)}{\eta_0'}\right\} \\ \frac{1}{n_0''} &= \frac{\tau''}{\tau_0'''}\cdot\frac{\eta_0'''}{\eta''} = \frac{\tau''}{\tau'''}\left\{1 - \frac{(\eta''-1) - (\eta_0'''-1)}{\eta''}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Sind genäherte Elemente bekannt, so findet sich unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \{\mu_1 x - \nu_1 xy\} - \frac{(\eta' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta'} \\ \gamma_2 &= \{\mu_2 x - \nu_2 xy\} - \frac{(\eta'' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta''} \\ \gamma_1{}^0 &= \{\mu_1{}^0 x - \nu_1{}^0 xy\} - \frac{(\eta_0' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta_0'} \\ \gamma_2{}^0 &= \{\mu_2{}^0 x - \nu_2{}^0 xy\} - \frac{(\eta'' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta''} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

welche Formeln man ähnlich wie bei der zweiten Methode der vorausgehenden Abtheilung zur Berechnung von $\gamma$ benutzen wird bei der Bildung einer zweiten oder ferneren Hypothese.

Substituirt man die Werthe aus (4) in (2), so finden sich, wenn man Alles gehörig ordnet und zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau'}{\tau'''} A &= (1) & \qquad \frac{\tau_0'}{\tau_0'''} A_0 &= (1)_0 \\ -\frac{\tau''}{\tau'''} B &= (2) & \qquad -\frac{\tau''}{\tau_0'''} B_0 &= (2)_0 \\ \frac{\tau'}{\tau'''} D &= (3) & \qquad \frac{\tau_0'}{\tau_0'''} D_0 &= (3)_0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho''' &= (1) + (2) + C - \{(1)\mu_1 + (2)\mu_2\} x + \{(1)\nu_1 + (2)\nu_2\} xy + (1)\gamma_1 + (2)\gamma_2 + \\ &\qquad + (3)\{1 - \mu_1 x + \nu_1 xy + \gamma_1\}\varrho' \\ \varrho''' &= (1)_0 + (2)_0 + C_0 - \{(1)_0\mu_1{}^0 + (2)_0\mu_2{}^0\} x + \{(1)_0\nu_1{}^0 + (2)_0\nu_2{}^0\} xy + (1)_0\gamma_1{}^0 + (2)_0\gamma_2{}^0 + \\ &\qquad + (3)_0\{1 - \mu_1{}^0 x + \nu_1{}^0 xy + \gamma_1{}^0\}\varrho' \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Um diese Gleichungen etwas einfacher zu gestalten, setze ich statt dieser die folgenden an:

$$\left.\begin{aligned} \varrho''' &= a + bx + c\,xy + \Gamma + (3)\{1 - \mu_1 x + \nu_1 xy + \gamma_1\}\varrho' \\ \varrho''' &= a_0 + b_0 x + c_0 xy + \Gamma_0 + (3)_0\{1 - \mu_1{}^0 x + \nu_1{}^0 xy + \gamma_1{}^0\}\varrho' \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Eine Vergleichung der Ausdrücke (8) und (9) wird sofort die Bedeutung der neu eingeführten Bezeichnungen erkennen lassen. Setzt man nun weiter

$$\begin{aligned} a - a_0 &= (I), \\ \tfrac{1}{2}(a + a_0) &= (I)_m \\ b - b_0 &= (II), \\ \tfrac{1}{2}(b + b_0) &= (II)_m \\ c - c_0 &= (III), \\ \tfrac{1}{2}(c + c_0) &= (III)_m \\ (3)_0 - (3) &= (IV), \\ \tfrac{1}{2}\{(3)_0 + (3)\} &= (IV)_m \\ \mu_1(3) - \mu_1{}^0(3)_0 &= (V), \\ -\tfrac{1}{2}\{\mu_1(3) + \mu_1{}^0(3)_0\} &= (V)_m \\ \nu_1{}^0(3)_0 - \nu_1(3) &= (VI), \\ \tfrac{1}{2}\{\nu_1{}^0(3)_0 + \nu_1(3)\} &= (VI)_m \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(I)_{,} + (\Gamma - \Gamma_0) = K' \\
&(I)_{,,,} + \tfrac{1}{2}(\Gamma + \Gamma_0) = K''' \\
&(IV)_{,} + (3)_0\gamma_1{}^0 - (3)\gamma_1 = N' \\
&(IV)_{,,,} + \tfrac{1}{2}\{(3)\gamma_1 + (3)_0\gamma_1{}^0\} = N'''
\end{aligned}
$$

so findet sich ohne Schwierigkeit durch Subtraktion und Addition der Gleichungen (9)

$$
\left.\begin{aligned}
\varrho' &= \frac{K' + (II)_{,}\, x + (III)_{,}\, xy}{N' + (V)_{,}\, x + (VI)_{,}\, xy} \\
\varrho''' &= K''' + (II)_{,,,}\, x + (III)_{,,,}\, xy + \varrho'\{N''' + (V)_{,,,}\, x + (VI)_{,,,}\, xy\}
\end{aligned}\right\} \quad (11)
$$

Man könnte $\varrho'''$ auf eine ähnliche Form bringen wie $\varrho'$, indem man in etwas abgeänderter Weise eliminirt; man wird hierbei öfters eine etwas grössere Convergenz in den Hypothesen erzielen, doch ist die Zunahme der letzteren so unbedeutend und so wenig mit Sicherheit zu erwarten, als dass dieselbe im Gleichgewicht mit der daraus entstehenden Mehrarbeit stände.

Die Gleichungen (11) enthalten die Lösung des Problems, denn $x$ und $y$ lassen sich leicht als Funktionen von $\varrho'$ und $\varrho'''$ darstellen; die hierher gehörigen Formeln sind schon bei der Bahnbestimmung aus drei Orten benutzt worden. Es wird zu setzen sein (vgl. pag. 106)

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\psi_{,} &= \cos\beta' \cos(\lambda' - L') & \cos\psi_{,,,} &= \cos\beta''' \cos(\lambda''' - L''') \\
\sin\psi_{,} \cos P_{,} &= \cos\beta' \sin(\lambda' - L') & \sin\psi_{,,,} \cos P_{,,,} &= \cos\beta''' \sin(\lambda''' - L''') \\
\sin\psi_{,} \sin P_{,} &= \sin\beta' & \sin\psi_{,,,} \sin P_{,,,} &= \sin\beta''' \\
f_{,} &= R' \cos\psi_{,} & f_{,,,} &= R''' \cos\psi_{,,,} \\
B_{,} &= R' \sin\psi_{,} & B_{,,,} &= R''' \sin\psi_{,,,}
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

dann berechnet sich bekanntlich $r'$ und $r'''$ aus:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\varrho' - f_{,}}{B_{,}} &= \operatorname{tg}\theta_{,} & \frac{\varrho''' - f_{,,,}}{B_{,,,}} &= \operatorname{tg}\theta_{,,,} \\
r' &= (\varrho' - f_{,}) \operatorname{cosec}\theta_{,} & r''' &= (\varrho''' - f_{,,,}) \operatorname{cosec}\theta_{,,,}
\end{aligned}\right\} \quad (13)
$$

Die Auflösung der Gleichungen (11) und (13) durch Versuche wird in der Praxis fast gar keinen Schwierigkeiten unterliegen. Die Werthe von $x$ und $y$ sind allerdings unbekannt, doch wird es wesentlich die Lösung erleichtern, wenn man von $y$ vorerst absieht und zuerst einen Näherungswerth für $x$ sucht; ist ein solcher ermittelt, so wird derselbe, da jetzt $r'$ und $r'''$ näherungsweise bekannt sind, sofort die Berechnung von $y$ ermöglichen; mit dem gefundenen Werthe von $xy$ berechnet man die Korrektionen, die aus den Gliedern der dritten Ordnung entstehen und sucht neuerdings den jetzt genügenden Werth von $x$; es kann eine nochmalige Verbesserung der Glieder dritter Ordnung merkbare Aenderungen hervorbringen; doch sind dieselben offenbar vierter Ordnung und könnten konsequenter Weise fortgelassen werden; da es aber in der Regel befriedigender ist einer Gleichung völlig zu genügen, so wird es rathsam erscheinen, durch nochmalige Abänderung die völlige Uebereinstimmung herzustellen.

Wie man sieht ist jede Schwierigkeit gehoben, sobald $x$ näherungsweise bekannt ist; eine solche Näherung wird man sich aber auf die folgende Weise verschaffen können. Wendet man diese Methode auf die Bestimmung einer Kometenbahn an, so wird wol durch die vorausgehenden Untersuchungen (parabolische Elemente) meistens ein Näherungswerth für $r'$ und $r'''$ bekannt sein; bei den kleinen Planeten, wo diese Methode besonders zu empfehlen ist, wird man für $x$ setzen dürfen im ersten Versuche

$$x = 0.04$$

da als plausibler Werth gelten kann

$$r' = r''' = \sqrt[3]{12.5}\cdot$$

Die Durchführung dieses ersten Versuches wird aber sofort ein Hilfsmittel an die Hand geben, sich im zweiten Versuche der Wahrheit schon sehr anzunähern. Es ist, wenn ich mit $x_1$ den Werth von $x$ bezeichne, mit dem der Versuch begonnen wurde, mit $x_2$ dagegen den Werth, der sich nach der Durchführung des Versuches aus $r'$ und $r'''$ fand, mit Weglassung der mit $y$ multiplicirten Glieder,

$$d\varrho' = \frac{\{(IV)_, + (V)_, x\}\,(II)_, - \{(I)_, + (II)_, x\}\,(V)_,}{\{(IV)_, + (V)_, x\}^2}\cdot dx_1 = s\,dx_1$$

$$d\varrho''' = [\,(II)_{,,,} + \varrho'\,(V)_{,,,} + \{\,(IV)_{,,,} + (V)_{,,,}\,x\}\,s\,]\,dx_1 = t\,dx_1$$

Die Berechnung von $s$ und $t$ macht sich sehr schnell, da ein grosser Theil der Coefficienten im ersten Versuche schon berechnet ist. Weiter ist aber

$$dr' = \sin\theta_,\,d\varrho'$$
$$dr''' = \sin\theta_{,,,}\,d\varrho'''$$
$$dx_2 = -\frac{12}{(r'+r''')^4}\,(dr' + dr''')$$

demnach

$$x_2\,d\log x_2 = -\frac{12}{(r'+r''')^4}\,\{s\sin\theta_, + t\sin\theta_{,,,}\}\,x_1\,d\log x_1$$

oder da sein muss, um eine auftretende Differenz zwischen $x_1$ und $x_2$ wegzuschaffen

$$\log x_2 - \log x_1 = d\log x_1 - d\log x_2$$

so wird die Verbesserung von $\log x_1$ gefunden nach (vgl. pag. 234)

$$d\log x_1 = \frac{\log x_2 - \log x_1}{1 + \frac{12}{(r'+r''')^4}\left\{s\sin\theta_, + t\sin\theta_{,,,}\right\}\frac{x_1}{x_2}}$$

Der zweite Versuch wird in der Regel der Wahrheit schon so nahe kommen, dass man aus der Differenz der Radienvectoren $y$ mit hinlänglicher Schärfe wird berechnen können; die aus der Multiplikation mit $xy$ entstehenden Glieder wird man beziehungsweise mit $(I)_,$ $(IV)_,$ und $(I)_{,,,}$ $(IV)_{,,,}$ verbinden und den jetzt genügenden Werth von $x$ suchen; sollten so beträchtliche Aenderungen eintreten, dass daraus merkliche Korrektionen in den mit $xy$ multiplicirten Gliedern entstehen sollten, so wird man zweckmässig nochmals die Rechnung wiederholen; bei kleineren Zwischenzeiten wird selten diese zweite Korrection (vierter Ordnung nöthig sein.

### §. 3. Verbesserung der Verhältnisse der Dreiecksflächen.

Sind nun für $\varrho'$ und $\varrho'''$ die der Hypothese genügenden Werthe ermittelt, so berechnet man ganz so, wie diess bei der Methode der Bahnbestimmung aus drei Orten geschehen ist, für die äusseren Orte die heliocentrischen Koordinaten; es wird sich finden, wenn man vorerst setzt:

$$\left.\begin{array}{ll} R_s' = \phantom{-}R' \sin(\lambda' - L') & R_s''' = \phantom{-}R''' \sin(\lambda''' - L''') \\ R_c' = -R' \cos(\lambda' - L') & R_c''' = -R''' \cos(\lambda''' - L''') \end{array}\right\} \quad (14)$$

für die verlangte Transformation

$$\left.\begin{array}{ll} r' \cos(l' - \lambda') \cos b' = \varrho' \cos\beta' + R_c' & r''' \cos(l''' - \lambda''') \cos b''' = \varrho''' \cos\beta''' + R_c''' \\ r' \sin(l' - \lambda') \cos b' = R_s' & r''' \sin(l''' - \lambda''') \cos b''' = R_s''' \\ r' \sin b' = \varrho' \sin\beta' & r''' \sin b''' = \varrho''' \sin\beta''' \end{array}\right\} \quad (15)$$

Die Werthe von $r'$ und $r'''$ müssen identisch mit denjenigen Werthen gefunden werden, welche die Durchführung der Versuche gegeben hat. Den heliocentrischen Bogen $(2f'')$ zwischen den beiden Orten findet man mit Hilfe der Formel

$$\sin^2 f'' = \sin^2 \tfrac{1}{2} (l''' - l') \cos b' \cos b''' + \sin^2 \tfrac{1}{2} (b''' - b') \qquad (16)$$

Um nun die heliocentrischen Bögen zwischen den übrigen Orten zu finden, wird man die angenommenen Verhältnisse der Dreiecksflächen zu Hilfe nehmen. Dieselben berechnen sich, da jetzt $x$ und $y$ bekannt sind, leicht nach den Formeln (4), wodurch man zur Kenntniss der Werthe $\frac{n}{n''}$, $\frac{1}{n''}$, $\frac{n_0}{n_0''}$ und $\frac{1}{n_0''}$ gelangt, aus denen sofort sich die Werthe für $n$, $n''$, $n_0$ und $n_0''$ finden lassen. Die Werthe selbst gestatten einen sicheren Schluss ob eine Fortsetzung der Hypothesen nöthig ist; ist die Aenderung dieser Werthe der Verhältnisse der Dreiecksflächen gegen diejenigen, welche die vorausgehende Hypothese gegeben hat, so gering, dass man mit Sicherheit erwarten darf, dass der Uebergang auf die nächste Hypothese keine merkliche Aenderung der letzten Decimale dieser Grössen nach sich ziehen wird, so kann man die Näherungen als abgeschlossen betrachten.

Bezeichne ich nun mit:

$2f'''$ den heliocentrischen Bogen zwischen dem ersten und zweiten Orte
$2f'$ » » » » » zweiten » vierten »
$2f_0'''$ » » » » » ersten » dritten »
$2f_0'$ » » » » » dritten » vierten »

so wird sein

$$n'' = \frac{[r'\, r'']}{[r'\, r''']} = \frac{r'' \sin 2f'''}{r''' \sin 2f''}$$

$$n = \frac{[r''\, r''']}{[r'\, r''']} = \frac{r'' \sin 2f'}{r' \sin 2f''}$$

$$n_0'' = \frac{[r'\, r_0'']}{[r'\, r''']} = \frac{r_{\prime\prime}^{0} \sin 2f_0'''}{r''' \sin 2f''}$$

$$n_0 = \frac{[r_0''\, r''']}{[r'\, r''']} = \frac{r_0'' \sin 2f_0'}{r' \sin 2f''}$$

Aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen leitet man ab

$$r'' \sin 2f''' = r''' n'' \sin 2f''$$
$$r'' \sin 2(f'' - f''') = r' n \sin 2f$$
$$r'' \sin 2(f''' - f') = r''' n'' \sin 2f''$$
$$r'' \sin 2f' = r' n \sin 2f''$$

Daraus wird man leicht finden:

$$\left.\begin{aligned} r'' \sin 2f''' &= r''' n'' \sin 2f'' \\ r'' \cos 2f''' &= r' n + r''' n'' \cos 2f'' \end{aligned}\right\} \quad (17)_1$$

zur Kontrolle wird man auch berechnen können

$$\left.\begin{aligned} r'' \sin 2f' &= r' n \sin 2f'' \\ r'' \cos 2f' &= r''' n'' + r' n \cos 2f'' \end{aligned}\right\} \quad (17)_2$$

Es wird ausserdem, dass man für $r''$ identische Werthe finden muss, der Bedingung genügt werden müssen

$$f' + f''' = f''$$

Ganz ähnliche Formeln erhält man für den dritten Ort. Man wird leicht finden hierfür

$$\left.\begin{aligned} r_0'' \sin 2f_0''' &= r''' n_0'' \sin 2f'' \\ r_0'' \cos 2f_0''' &= r' n_0 + r''' n_0'' \cos 2f'' \\ r_0'' \sin 2f_0' &= r' n_0 \sin 2f'' \\ r_0'' \cos 2f_0' &= r''' n_0'' + r' n_0 \cos 2f'' \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Grössen $r$ und $f$ werden gestatten, nun die fünf verschiedenen Werthe von $\eta$ zu berechnen und ich verweise hierbei auf die in §. 6 des vorigen Abschnittes (pag. 195 ff.) vorgetragenen Methoden Aus den Werthen von $\eta$ und $(\eta - 1)$ wird man nach den Formeln (6) die Werthe für $\gamma$ ableiten können und hiermit eine neue Hypothese beginnen. Ist man in der Annäherung so weit vorgeschritten, dass man die Bildung einer neuen Hypothese umgehen kann, so wird die Rechnung mit der Formel (16) abgeschlossen und auf die bekannte Weise aus den zwei äusseren heliocentrischen Orten die Bahnelemente abgeleitet.

Hat man die Beobachtungszeiten nicht vor Beginn der Rechnung für Aberration korrigiren können, so muss diess im Verlaufe der Rechnung geschehen. Es sind zu diesem Zwecke die Entfernungen zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung zu berechnen. Man wird hierbei zweckmässig auf die folgende Weise verfahren. Man berechnet zunächst aus den zwei äusseren heliocentrischen Orten den aufsteigenden Knoten und die Neigung der Bahn nach

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} b' &= \operatorname{tg} i \sin (l' - \Omega) \\ \frac{\operatorname{tg} b''' - \operatorname{tg} b' \cos(l''' - l')}{\sin (l''' - l')} &= \operatorname{tg} i \cos (l' - \Omega) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und daraus die Argumente der Breiten nach

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} u' &= \operatorname{tg} (l' - \Omega) \sec i \\ \operatorname{tg} u''' &= \operatorname{tg} (l''' - \Omega) \sec i \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Ist die Rechnung richtig durchgeführt, so wird sein:

$$u''' - u' = 2f''$$

Man wird mit den Formeln (20) stets ausreichen, da man bei Planeten stets mit relativ kleinen Neigungen zu thun hat; bei Kometen wird dieser Theil der Rechnung wol niemals zur Anwendung kommen, da genäherte Distanzen in diesem Falle stets bekannt sein werden (parabolische Elemente), wenn man eine Kometenbahn ohne irgend eine Voraussetzung über die Excentricität abzuleiten versucht.

Sind $u'$ und $u'''$ bekannt, so finden sich die Argumente der Breite für die mittleren Beobachtungen nach:

$$\left.\begin{aligned} u' + 2f''' &= u'' = u''' - 2f' \\ u' + 2f_0''' &= u_0'' = u''' - 2f_0' \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

und daraus nach den bekannten Formeln zum Uebergange vom heliocentrischen auf den geocentrischen Ort

$$\begin{aligned} \varrho'' \cos\beta'' \cos(\lambda'' - \Omega) &= r'' \cos u'' + R' \cos(L'' - \Omega) \\ \varrho'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \Omega) &= r'' \sin u'' \cos i + R' \sin(L'' - \Omega) \\ \varrho'' \sin\beta'' &= r'' \sin u'' \sin i \\ \varrho_0'' \cos\beta_0'' \cos(\lambda_0'' - \Omega) &= r_0'' \cos u_0'' + R_0'' \cos(L_0'' - \Omega) \\ \varrho_0'' \cos\beta_0'' \sin(\lambda_0'' - \Omega) &= r_0'' \sin u_0'' \cos i + R_0'' \sin(L_0'' - \Omega) \\ \varrho_0'' \sin\beta_0'' &= r_0'' \sin u_0'' \sin i \end{aligned}$$

Da man sich, wie diess der nächstfolgende Paragraph zeigen wird, meistens bei Planetenbahnbestimmungen begnügen kann mit der Darstellung der Längen, so wird man für die praktische Anwendung die Formeln zweckmässig in die folgenden überführen:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho'' \cos\beta'' = r'' \{\cos u'' \cos(\lambda'' - \Omega) + \sin u'' \sin(\lambda'' - \Omega) \cos i\} + R' \cos(\lambda'' - L'') \\ &\varrho'' \sin\beta'' = r'' \sin u'' \sin i \\ &\varrho_0'' \cos\beta_0'' = r_0'' \{\cos u_0'' \cos(\lambda_0'' - \Omega) + \sin u_0'' \sin(\lambda_0'' - \Omega) \cos i\} + R_0'' \cos(\lambda_0'' - L'') \\ &\varrho_0'' \sin\beta_0'' = r_0'' \sin u_0'' \sin i \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

wobei man auch eine Einsicht erlangt in die zu erwartende Darstellung der unberücksichtigt gebliebenen Breiten.

## §. 4. Ueber die Wahl der grössten Kreise.

Ganz dieselbe Bestimmung über die Lage des zu wählenden grössten Kreises, welcher in §. 7 der parabolischen Bahnbestimmung (pag. 115 ff.) angegeben ist, wird auch hier angewendet werden können; doch wird es meist vortheilhafter sein, die strengen Formeln zu benutzen. Es wird also gesetzt werden müssen, wenn man die dort entwickelten Formeln hierher überträgt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta'\cos\beta'' - \cos(\lambda''-\lambda')\cos\beta'\sin\beta'' &= \sin\Delta'''\cos w' \\
\sin(\lambda''-\lambda')\cos\beta' &= \sin\Delta'''\sin w' \\
\sin\beta'''\cos\beta'' - \cos(\lambda'''-\lambda'')\cos\beta'''\sin\beta'' &= \sin\Delta'\cos w''' \\
\sin(\lambda'''-\lambda'')\cos\beta''' &= \sin\Delta'\sin w''' \\
\sin\beta'\cos\beta_0'' - \cos(\lambda_0''-\lambda')\cos\beta'\sin\beta_0'' &= \sin\Delta_0'''\cos w_0' \\
\sin(\lambda_0''-\lambda')\cos\beta' &= \sin\Delta_0'''\sin w_0' \\
\sin\beta'''\cos\beta_0'' - \cos(\lambda'''-\lambda_0'')\cos\beta'''\sin\beta_0'' &= \sin\Delta_0'\cos w_0''' \\
\sin(\lambda'''-\lambda_0'')\cos\beta''' &= \sin\Delta_0'\sin w_0'''
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

und daraus die Werthe von $i$ und $i_0$ nach

$$\left.\begin{aligned}
g &= \frac{\tau'}{\tau'''}\cdot\frac{\sin\Delta'''}{\sin\Delta'} & g_0 &= \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}\cdot\frac{\sin\Delta_0'''}{\sin\Delta_0'} \\
\operatorname{tg} 2i &= \frac{\sin 2w''' - g^2\sin 2w'}{\cos 2w''' + g^2\cos 2w'} & \operatorname{tg} 2i_0 &= \frac{\sin 2w_0''' - g_0^2\sin 2w_0'}{\cos 2w_0''' + g_0^2\cos 2w_0'}
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Es sind diejenigen Werthe von $i$ und $i_0$ zu nehmen, welche die Ausdrücke beziehungsweise

$$\{g^2\sin^2(w'+i) + \sin^2(w'''-i)\} \text{ und } \{g_0^2\sin^2(w_0'+i_0) + \sin^2(w_0'''-i_0)\}$$

zum Maximum machen.

Die zu diesem Zwecke nöthigen Rechnungen können mit vierstelligen Tafeln durchgeführt werden, da es nur auf eine beiläufige Bestimmung der Winkel $i$ und $i_0$ ankommt. Man bestimmt dann völlig scharf die Grössen $J$, $\Pi$, $J_0$ und $\Pi_0$ nach

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\lambda''-\Pi)\operatorname{tg}J &= \operatorname{tg}\beta'' \\
\cos(\lambda''-\Pi)\operatorname{tg}J &= \operatorname{cotg}i\sec\beta'' \\
\sin(\lambda_0''-\Pi_0)\operatorname{tg}J_0 &= \operatorname{tg}\beta_0'' \\
\cos(\lambda_0''-\Pi_0)\operatorname{tg}J_0 &= \operatorname{cotg}i_0\sec\beta_0''
\end{aligned}\right\} \quad (25)_1$$

mit welchen Werthen die Rechnung sofort begonnen werden kann; ist aber die Bewegung des Himmelskörpers ziemlich regelmässig, wie diess bei Kometen häufig genug der Fall ist, so wird man die Berechnung von (23) und (24) ganz umgehen können, indem auf dieselbe Weise, wie es bei der parabolischen Bahnbestimmung gezeigt wurde (pag. 117), meist mit ausreichender Genauigkeit sofort gesetzt werden kann

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}J\sin(\lambda''-\Pi) &= \operatorname{tg}\beta'' \\
\operatorname{tg}J\cos(\lambda''-\Pi) &= -\frac{\lambda'''-\lambda'}{\beta'''-\beta'} \\
\operatorname{tg}J_0\sin(\lambda_0''-\Pi_0) &= \operatorname{tg}\beta_0'' \\
\operatorname{tg}J_0\cos(\lambda_0''-\Pi_0) &= -\frac{\lambda'''-\lambda'}{\beta'''-\beta'}
\end{aligned}\right\} \quad (25)_2$$

Die Anwendung dieser zweiten Rechnungsform wird in ziemlich weiten Grenzen gestattet sein, da es doch nur auf eine ganz beiläufige Bestimmung der Winkel $i$ und $i_0$ ankommt. Bei den kleinen Planeten jedoch wird man von all diesen Hilfs-

mitteln keinen Gebrauch machen. Bei der Kleinheit der Neigungen, die fast ausschliesslich hier in Betracht kommen, wird die geocentrische Bewegung in Länge meistens so überwiegend sein gegen die Aenderungen in Breite, dass man wird annehmen dürfen ohne der Genauigkeit wesentlich zu schaden

$$J = 90^0 \qquad J_0 = 90^0$$
$$\Pi = \lambda'' \qquad \Pi_0 = \lambda_0''$$

Durch diese Annahmen über die Lage der grössten Kreise werden die Formeln (1) sehr einfach und überhaupt wird die Rechnung so kurz, dass dieselbe unbedeutend zeitraubender erscheint, als die Durchführung der Bahnbestimmung aus drei Orten. Ich möchte besonders die Anwendung dieser Methode dann empfehlen, wenn man an eine beobachtete Opposition eines kleinen Planeten Elemente anschliessen will, die den ganzen beobachteten Bogen genügend darstellen sollen; bildet man in diesem Falle vier Normalorte und schliesst diesen die Elemente an, so wird man meist das vorgesteckte Ziel ohne Umweg sofort erreichen. Ich habe desshalb im Anhange die Zusammenstellung der Formeln zu diesem Zwecke aufgenommen und demnach auf die durch die Berücksichtigung der Aberration entstehenden Korrektionen nicht Rücksicht genommen; man wird aber diese Formelsammlung auch bei ersten Bahnbestimmungen benützen können, indem man die Aberration entweder ganz fortlässt, oder wenn man Alles genau haben will, so wird man die Formeln (19) — (22) anwenden müssen. Ueber eine Abänderung, die sich in der oben angeführten Formelsammlung des Anhanges befindet, wird später berichtet werden.

Sollte es bei der Bestimmung einer Kometenbahn wünschenswerth sein, die durch die Formeln (25) bestimmten grössten Kreise anzuwenden, was immer geschehen muss, wenn die geocentrische Bewegung in Länge relativ zur Breitenbewegung gering ist, so wird ebenfalls nicht viel an dem folgenden Rechnungsschema abgeändert werden, man wird nur zu beachten haben, dass für ☄$'$, ☄$'''$, ☄$_0'$, ☄$_0'''$, $A$, $B$, $C$, $A_0$, $B_0$, $C_0$ die Formen nach (1) (pag. 255) in Rechnung gezogen werden müssen; im Uebrigen erscheint Nichts abgeändert.

## §. 5. Zusammenstellung der Formeln und Beispiele.

Die Beobachtungen werden für die Rechnung ganz so vorbereitet, wie diess in dem vorausgehenden Abschnitte ausführlich erläutert wurde, und man wird auch hierbei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem genäherte Elemente bereits bekannt sind oder nicht; ich verweise in dieser Beziehung auf das daselbst Vorgetragene (pag. 200 und pag. 212) und setze desshalb die Beobachtungen für die Rechnung allseitig vorbereitet voraus. Zuerst wird man diejenigen Grössen berechnen, die als Constanten im Verlaufe der Rechnung auftreten.

$$\left.\begin{array}{rlrl}
\delta' &= \sin(\lambda''-\lambda')\cos\beta' & \delta_0' &= \sin(\lambda_0''-\lambda')\cos\beta' \\
\delta''' &= \sin(\lambda'''-\lambda'')\cos\beta''' & \delta_0''' &= \sin(\lambda'''-\lambda_0'')\cos\beta''' \\
A &= R'\sin(L'-\lambda''):\delta''' & A_0 &= R'\sin(L'-\lambda_0''):\delta_0''' \\
B &= R''\sin(L''-\lambda''):\delta''' & B_0 &= R_0''\sin(L_0''-\lambda_0''):\delta_0''' \\
C &= R'''\sin(L'''-\lambda''):\delta''' & C_0 &= R'''\sin(L'''-\lambda_0''):\delta_0''' \\
D &= \delta':\delta''' & D_0 &= \delta_0':\delta_0''' \\
\cos\psi_, &= \cos\beta'\cos(\lambda'-L') & \cos\psi_{,,,} &= \cos\beta'''\cos(\lambda'''-L''') \\
\sin\psi_,\cos P_, &= \cos\beta'\sin(\lambda'-L') & \sin\psi_{,,,}\cos P_{,,,} &= \cos\beta'''\sin(\lambda'''-L''') \\
\sin\psi_,\sin P_, &= \sin\beta' & \sin\psi_{,,,}\sin P_{,,,} &= \sin\beta''' \\
f_, &= R'\cos\psi_, & f_{,,,} &= R'''\cos\psi_{,,,} \\
B_, &= R'\sin\psi_, & B_{,,,} &= R'''\sin\psi_{,,,} \\
R_s' &= R'\sin(\lambda'-L') & R_s''' &= R'''\sin(\lambda'''-L''') \\
R_c' &= -R'\cos(\lambda'-L') & R_c''' &= -R'''\cos(\lambda'''-L''')
\end{array}\right\} \quad I.$$

An diese Formeln schliesse ich die Berechnung derjenigen Grössen an, die konstant bleiben, so lange die Zwischenzeiten ungeändert bleiben; hat man also vor Beginn der Rechnung die Zeiten für Aberration korrigiren können, so werden diese Grössen ebenfalls als frei von jeder Hypothese betrachtet werden dürfen; sie werden jedenfalls im Verlaufe der Rechnung höchstens nur eine einmalige Abänderung erfahren. Es wird zu berechnen sein.

$$\left.\begin{array}{rlrl}
\tau' &= k(T'''-T'') & \tau''' &= k(T''-T') \\
\tau_0' &= k(T'''-T_0'') & \tau_0''' &= k(T_0''-T') \\
\tau'' &= k(T'''-T') & \log k &= 8.2355814 \\
\frac{\tau'}{\tau'''}A &= (1) & \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}A_0 &= (1)_0 \\
-\frac{\tau''}{\tau'''}B &= (2) & -\frac{\tau_0''}{\tau_0'''}B_0 &= (2)_0 \\
\frac{\tau'}{\tau'''}D &= (3) & \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}D_0 &= (3)_0 \\
\tfrac{1}{6}(\tau'^2-\tau'''^2) &= \mu_1 & \tfrac{1}{6}(\tau_0'^2-\tau_0'''^2) &= \mu_1^0 \\
\tfrac{1}{6}(\tau''^2-\tau'''^2) &= \mu_2 & \tfrac{1}{6}(\tau''^2-\tau_0'''^2) &= \mu_2^0 \\
\tau'\tau''' &= \nu_1 & \tau_0'\tau_0''' &= \nu_1^0 \\
\frac{\tau'\tau'''^2}{\tau''} &= \nu_2 & \frac{\tau_0'\tau_0'''^2}{\tau''} &= \nu_2^0 \\
a &= (1)+(2)+C & a_0 &= (1)_0+(2)_0+C_0 \\
b &= -\{(1)\mu_1+(2)\mu_2\} & b_0 &= -\{(1)_0\mu_1^0+(2)_0\mu_2^0\} \\
c &= (1)\nu_1+(2)\nu_2 & c_0 &= (1)_0\nu_1^0+(2)_0\nu_2^0 \\
a-a_0 &= (I), & \tfrac{1}{2}(a+a_0) &= (I)_{,,,} \\
b-b_0 &= (II), & \tfrac{1}{2}(b+b_0) &= (II)_{,,,} \\
c-c_0 &= (III), & \tfrac{1}{2}(c+c_0) &= (III)_{,,,} \\
(3)_0-(3) &= (IV), & \tfrac{1}{2}\{(3)_0+(3)\} &= (IV)_{,,,} \\
\mu_1(3)-\mu_1^0(3)_0 &= (V), & -\tfrac{1}{2}\{\mu_1(3)+\mu_1^0(3)_0\} &= (V)_{,,,} \\
\nu_1^0(3)_0-\nu_1(3)_0 &= (VI), & \tfrac{1}{2}\{\nu_1^0(3)_0+\nu_1(3)\} &= (VI)_{,,,}
\end{array}\right\} \quad II.$$

Hiermit sind die vorbereitenden Berechnungen vollendet und es kann an die Bildung der Hypothesen geschritten werden und hierbei werden die weiter folgenden Gleichungen durch Versuche zu lösen sein. Man wird zunächst haben:

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma = (1)\gamma_1 + (2)\gamma_2 & \Gamma_0 = (1)_0\gamma_1^0 + (2)_0\gamma_2^0 \\ K' = (I)_, + (\Gamma - \Gamma_0) & K''' = (I)_{,,,} + \tfrac{1}{2}(\Gamma + \Gamma_0) \\ N' = (IV)_, + \{(3)_0\gamma_1^0 - (3)\gamma_1\} & N''' = (IV)_{,,,} + \tfrac{1}{2}\{(3)_0\gamma_1^0 + (3)\gamma_1\} \end{array}\right\} (III)_a$$

wobei in der ersten Hypothese $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_1^0$ und $\gamma_2^0$ der Null gleich gesetzt werden können, während in den folgenden genäherte Werthe bekannt sein werden; sind genäherte Elemente des Himmelskörpers schon bekannt, so wird man dieselben mit Vortheil zur Bestimmung von $\gamma$ benutzen, um sich rasch der Wahrheit anzunähern; ferner ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho' = \dfrac{K' + (II)_, x + (III)_, xy}{N' + (V)_, x + (VI)_, xy} & \\ \varrho''' = K''' + (II)_{,,,} x + (III)_{,,,} xy + \varrho'\{N''' + (V)_{,,,} x + (VI)_{,,,} xy & \\ \dfrac{\varrho' - f_,}{B_,} = \operatorname{tg} \theta_, & r' = (\varrho' - f_,) \operatorname{cosec} \theta_, \\ \dfrac{\varrho''' - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg} \theta_{,,,} & r''' = (\varrho''' - f_{,,,}) \operatorname{cosec} \theta_{,,,} \\ x = \dfrac{4}{(r' + r''')^4} & y = \dfrac{r''' - r'}{r' + r'''} \end{array}\right\} (III)_b$$

Bei der Auflösung dieser Gleichung wird man anfänglich von der auf pag. 259 entwickelten Differentialformel zweckmässig Gebrauch machen. Nachdem $\varrho'$ und $\varrho'''$ gefunden sind, ermittelt man die heliocentrischen Orte für die erste und vierte Beobachtung und den zwischen denselben liegenden heliocentrischen Bogen $(2f'')$. Man hat hierfür

$$\left.\begin{array}{ll} r' \cos(l' - \lambda') \cos b' = \varrho' \cos \beta' + R_c' & r''' \cos(l''' - \lambda''') \cos b''' = \varrho''' \cos \beta''' + R_c''' \\ r' \sin(l' - \lambda') \cos b' = R_s' & r''' \sin(l''' - \lambda''') \cos b''' = R_s''' \\ r' \sin b' = \varrho' \sin \beta' & r''' \sin b''' = \varrho''' \sin \beta''' \\ \multicolumn{2}{l}{\sin^2 f'' = \sin^2 \tfrac{1}{2}(l''' - l') \cos b' \cos b''' + \sin^2 \tfrac{1}{2}(b''' - b')} \end{array}\right\} IV.$$

Hieran schliesst sich die Berechnung der Verhältnisse der Dreiecksflächen. Es wird sein

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n}{n''} = \dfrac{\tau'}{\tau'''}\{1 - \mu_1 x + \nu_1 xy + \gamma_1\} \\ \dfrac{1}{n''} = \dfrac{\tau''}{\tau'''}\{1 - \mu_2 x + \nu_2 xy + \gamma_2\} \\ \dfrac{n_0}{n_0''} = \dfrac{\tau_0'}{\tau_0'''}\{1 - \mu_1^0 x + \nu_1^0 xy + \gamma_1^0\} \\ \dfrac{1}{n_0''} = \dfrac{\tau''}{\tau_0'''}\{1 - \mu_2^0 x + \nu_2^0 xy + \gamma_2^0\} \end{array}\right\} V.$$

In der ersten Hypothese wird überall für $\gamma$ die Null zu setzen sein. Zur Berechnung der beiden Radienvektoren und der zugehörigen heliocentrischen Bögen wird man anwenden

$$\left.\begin{aligned} r'' \sin 2f''' &= r''' n'' \sin 2f'' \\ r'' \cos 2f''' &= r' n + r''' n'' \cos 2f'' \\ r_0'' \sin 2f_0''' &= r''' n_0'' \sin 2f'' \\ r_0'' \cos 2f_0''' &= r' n_0 + r''' n_0'' \cos 2f'' \end{aligned}\right\} (VI)_a$$

Als zweckmässige Kontrolle wird man anwenden

$$\left.\begin{aligned} r'' \sin 2f' &= r' n \sin 2f'' \\ r'' \cos 2f' &= r''' n + r' n \cos 2f'' \\ r_0'' \sin 2f_0' &= r' n_0 \sin 2f'' \\ r_0'' \cos 2f_0' &= r''' n_0'' + r' n_0 \cos 2f'' \\ 2f' + 2f''' &= 2f_0' + 2f_0''' = 2f'' \end{aligned}\right\} (VI)_b$$

Sind die Beobachtungszeiten nicht für Aberration korrigirt worden, so kann hier zweckmässig die Berechnung derselben eingeschaltet werden; ist die heliocentrische Bewegung gross, so wird man, um diese Korrektion nur èinmal rechnen zu müssen, dieselbe auf die zweite Hypothese aufsparen, da die erste Hypothese vielleicht ein zu ungenaues Resultat liefern würde. Bei den Zwischenzeiten jedoch, wie dieselben bei ersten Bahnbestimmungen in der Regel vorkommen, wird man stets mit Sicherheit diese Korrektion schon nach der ersten Hypothese einführen dürfen, wenn man nicht etwa vorzieht ganz hiervon abzusehen oder die Aberration nur näherungsweise mitzunehmen. Da die Formeln für die Berechnung dieser Korrektion nicht eigentlich in das Rechnungsschema gehören und ganz ausser Betracht kommen, wenn die Beobachtungszeiten für Aberration korrigirt wurden, so habe ich bei denselben die fortlaufende Numerirung der Formeln weggelassen. Man wird rechnen müssen in den bemerkten Fällen

$$\operatorname{tg} b' = \operatorname{tg} i \sin (l' - \Omega)$$

$$\frac{\operatorname{tg} b''' - \operatorname{tg} b' \cos (l''' - l')}{\sin (l''' - l')} = \operatorname{tg} i \cos (l' - \Omega)$$

$$\operatorname{tg} u' = \operatorname{tg} (l' - \Omega) \sec i$$

$$\operatorname{tg} u''' = \operatorname{tg} (l''' - \Omega) \sec i$$

$$u''' - u' = 2f'', \quad u_, + 2f''' = u'', \quad u_, + 2f_0''' = u_0''$$

$$\varrho'' \cos \beta'' = r'' \{\cos u'' \cos (\lambda'' - \Omega) + \sin u'' \sin (\lambda'' - \Omega) \cos i\} + R'' \cos (\lambda'' - L'')$$

$$\varrho'' \sin \beta'' = r'' \sin u'' \sin i$$

$$\varrho_0'' \cos \beta_0'' = r_0'' \{\cos u_0'' \cos (\lambda_0'' - \Omega) + \sin u_0'' \sin (\lambda_0'' - \Omega) \cos i\} + R_0'' \cos (\lambda_0'' - L_0'')$$

$$\varrho_0'' \sin \beta_0'' = r_0'' \sin u_0'' \sin i$$

Die Verbesserungen der Beobachtungszeiten werden gefunden durch:

$$\Delta T' = -\varrho' s \qquad \Delta T_0'' = -\varrho_0'' s$$

$$\Delta T'' = -\varrho'' s \qquad \Delta T''' = -\varrho''' s$$

$$\log s = 2.76056$$

$\log s$ ist hierbei so angesetzt, dass die Korrektionen in Einheiten der fünften Decimale des mittleren Sonnentages erhalten werden.

Um verbesserte Werthe zu erlangen, wird man die Werthe $(\eta - 1)$ aufsuchen

34*

müssen für die fünf verschiedenen Kombinationen. Man wird in den folgenden Formeln zu setzen haben:

| statt: $\eta$ | $\eta'$ | $\eta'''$ | $\eta_0'$ | $\eta_0'''$ | $\eta''$ |
|---|---|---|---|---|---|
| „ $\tau$ | $\tau'$ | $\tau'''$ | $\tau_0'$ | $\tau_0'''$ | $\tau''$ |
| „ $f$ | $f'$ | $f'''$ | $f_0'$ | $f_0'''$ | $f''$ |
| „ $r$ | $r''$ | $r'$ | $r_0''$ | $r'$ | $r'$ |
| „ $r_,$ | $r'''$ | $r''$ | $r'''$ | $r_0''$ | $r'''$ |

$$\left.\begin{array}{ll} m = \dfrac{r^2}{(2\cos f\sqrt{rr_,})^3} & \operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\dfrac{r_,}{r}} \\ l = \dfrac{\sin^2 \frac{1}{2} f + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f} & h = \dfrac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \\ \text{Tafel } IX \text{ gibt mit dem Argument } h \text{ den Werth : } \log \eta^2 & \\ \text{,, } X \text{ ,, ,, ,, ,, } \dfrac{m}{\eta^2} - l = x \text{ den Werth : } \xi & \end{array}\right\} VII.$$

Es sind nun die Werthe von $\gamma$ bestimmt durch:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = \{\mu_1\, x - \nu_1\, xy\} - \dfrac{(\eta' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta'} \\ \gamma_2 = \{\mu_2\, x - \nu_2\, xy\} - \dfrac{(\eta'' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta''} \\ \gamma_1^0 = \{\mu_1^0 x - \nu_1^0 xy\} - \dfrac{(\eta_0' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta_0'} \\ \gamma_2^0 = \{\mu_2^0 x - \nu_2^0 xy\} - \dfrac{(\eta'' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta''} \end{array}\right\} VIII.$$

Die Berechnung der Hypothesen ist so lange fortzusetzen, bis keine merkbare Aenderung in den Werthen von $n$, $n''$, $n_0$ und $n_0''$ gegen die vorausgehende Hypothese stattfindet. Hat man sich der Wahrheit hinreichend genähert, so werden aus den äusseren heliocentrischen Orten auf die bekannte Weise (pag. 217 ff.) die Elemente abgeleitet. Die Rückrechnung der beobachteten Orte aus den Elementen wird als die schärfste Prüfung betrachtet werden können; die vier Längen müssen innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung dargestellt erscheinen und ebenso die äussersten Breiten; die beiden mittleren Breiten werden je nach der Güte der Beobachtungen grössere oder geringere Fehler zeigen. Benutzt man als Fundamentalebene zu dieser Rückrechnung den Aequator, so wird im Allgemeinen die Darstellung der zwei mittleren Beobachtungen in keiner Koordinate eine völlige sein können, da sich der Fehler in der Breite auf die Rectascension und Declination vertheilt. Ist die Rechnung richtig geführt, so wird sein, wenn man setzt

$$\sin \eta = \frac{\cos \alpha \sin \varepsilon}{\cos \beta}$$

$$d\alpha \cos \delta = -\operatorname{tg} \eta\, d\delta$$

$\eta$ wird in der Regel im ersten oder vierten Quadranten zu nehmen sein, da $\cos \eta$ das Zeichen des Ausdruckes

$$\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha$$

erhält, das bei den kleinen Planeten wol stets positiv sein wird.

Schliesslich hebe ich noch hervor, dass bei den kleinen Planeten häufig die Glieder dritter Ordnung kleiner sind, als die der vierten Ordnung und man demnach, ohne die Convergenz allzu sehr zu vermindern, die mit $xy$ multiplicirten Glieder fortlassen kann, da aber die durch die Mitnahme dieser Glieder entstehende Mehrarbeit nicht sehr erheblich ist, so habe ich dieselben oben mitgenommen. Würde man aber die Glieder dritter Ordnung fortlassen, so wird sich die Rechnungsform nicht ganz unwesentlich abkürzen lassen. Man wird setzen (vrgl. pag. 241)

$$\frac{n}{n''} = \frac{\tau'}{\tau'''}\{1 - xY''\}$$

$$\frac{1}{n''} = \frac{\tau''}{\tau'''}\{1 - xY'\}$$

$$\frac{n_0}{n_0''} = \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}\{1 - xY_0''\}$$

$$\frac{1}{n_0''} = \frac{\tau''}{\tau_0'''}\{1 - xY_0'\}$$

In der ersten Hypothese wird man haben:

$$Y'' = \tfrac{1}{3}(\tau'^2 - \tau'''^2)$$

$$Y' = \tfrac{1}{3}(\tau''^2 - \tau'''^2)$$

$$Y_0'' = \tfrac{1}{3}(\tau_0'^2 - \tau_0'''^2)$$

$$Y_0' = \tfrac{1}{3}(\tau''^2 - \tau_0'''^2)$$

in den folgenden aber

$$Y'' = \frac{(\eta' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta' x}$$

$$Y' = \frac{(\eta'' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta'' x}$$

$$Y_0'' = \frac{(\eta_0' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta_0' x}$$

$$Y_0' = \frac{(\eta'' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta'' x}$$

Die Werthe von $Y$ treten nun anstatt der Werthe $\mu$ in den Formeln auf, nur mit dem Unterschiede, dass dieselben von Hypothese zu Hypothese veränderlich sind. Die Werthe von $\nu$ und $\gamma$ werden in allen Hypothesen der Null gleich. Wie man sieht, entsteht daraus eine nicht unwesentliche Abkürzung der Rechnung, doch ist dieselbe nicht sehr bedeutend und die Konvergenz der Hypothesen ist etwas vermindert; in Rücksicht aber auf die Verhältnisse, wie dieselben durch die kleinen Planeten dargeboten werden, scheint mir das letztere Verfahren den Vorzug zu verdienen und ich habe dem entsprechend im Anhange die Formeln aufgenommen.

Um die vorausgehenden Formeln in ihrem Verhältniss zu den Gauss'schen deutlich hervortreten zu lassen, werde ich das bekannte Vesta-Beispiel der theoria motus entlehnen und hier nach meinen Formeln vornehmen; ich habe dieses Beispiel nach der zweiten Rechnungsform durchgeführt, nämlich mit Vernachlässigung der

Glieder dritter Ordnung, welcher Umstand bei Vesta die Konvergenz nicht wesentlich vermindert, da die Excentricität sehr klein ist. Die für Aberration nicht korrigirten Beobachtungen, an welche die Elemente anzuschliessen sind, stehen nach theoria motus wie folgt:

| | m. Zt. Paris | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1807 | 89.50516 | 178°43′38″9 | + 12°27′ 6″2 | 9°21′33″7 | 9.999 799 |
| | 137.34450 | 174 1 30.1 | (+ 10 8 7.8) | 55 56 0.6 | 0.005 138 |
| | 192.41950 | 187 45 42.2 | (+ 6 47 25.5) | 108 35 20.3 | 0.007 174 |
| | 251.28810 | 213 34 15.6 | + 4 20 21.6 | 165 9 18.7 | 0.003 062 |

Ich finde nach *I:*

$$\log A = 9_n619\,457 \qquad \log A_0 = 8_n807\,478$$
$$\log B = 0_n148\,017 \qquad \log B_0 = 0_n361\,753$$
$$\log C = 9_n388\,432 \qquad \log C_0 = 9_n950\,226$$
$$\log D = 9_n100\,689 \qquad \log D_0 = 9.548\,012$$
$$\log B_, = 9.448\,470 \qquad \log B_{,,,} = 9.877\,930$$
$$f_, = -0.959\,272 \qquad f_{,,,} = +0.666\,500$$
$$\log R_s' = 9.265\,792 \qquad \log R_s''' = 9.876\,952$$
$$\log R_c' = 9.992\,279 \qquad \log R_c''' = 9_n825\,046$$

Bis zur dritten Hypothese inclusive wurden die Zwischenzeiten nicht für Aberration korrigirt; die Rechnung wurde demnach bis zur vierten Hypothese zweckentsprechend fünfstellig durchgeführt. Da ich, wie schon oben bemerkt wurde, ein etwas abgeändertes Rechnungsschema benutzte, so setze ich die Form, die ich befolgt und die ich im Anhange adoptirt habe, hier an. Ich habe angenommen

$$I = a_0 - a \qquad II = (3) - (3)_0$$
$$V = \tfrac{1}{2}(a_0 + a) \qquad VI = \tfrac{1}{2}\{(3) + (3)_0\}$$
$$b = (1)\,Y'' + (2)\,Y' \qquad b_0 = (1)_0 Y_0'' + (2)_0 Y_0'$$
$$III = (b - b_0) \qquad IV = (3)_0 Y_0'' - (3)\,Y''$$
$$VII = \tfrac{1}{2}(b + b_0) \qquad VIII = \tfrac{1}{2}\{(3)_0 Y_0'' + (3)\,Y''\}$$
$$\varrho' = \frac{I + III\,x}{II + IV\,x} \qquad \varrho''' = V - VII\,x + \{VI - VIII\,x\}\,\varrho'$$

Es wurde berechnet

$$(1) = -0.99166 \qquad (1)_0 = -0.03672$$
$$(2) = +4.75516 \qquad (2)_0 = +3.61585$$
$$C = -0.24459 \qquad C_0 = -0.89171$$
$$(3) = -0.30033 \qquad (3)_0 = +0.20203$$
$$I = -0.83149 \qquad (II) = -0.50236$$
$$V = +3.10316 \qquad VI = -0.04915$$

1. **Hypothese.**

$$\log Y'' = 0.02320 \qquad \log Y_0'' = 9_n84688$$
$$\log Y' = 0.37217 \qquad \log Y_0' = 0.18667$$
$$b = +10.15692 \qquad b_0 = +5.58338$$

$(3)\, Y'' = -0.31681$ $\qquad (3)_0 Y_0'' = -0.14200$
$\log III = 0.66025$ $\qquad \log IV = 9.24256$
$\log(-VII) = 0_n89598$ $\qquad \log(-VIII) = 9.36060$

Die Versuche ergaben

$$\log x = 8.68324$$

$\log \varrho' = 0.09234$ $\qquad \log r' = 0.34519$
$\log \varrho''' = 0.42758$ $\qquad \log r''' = 9.33187$

Es fanden sich die heliocentrischen Orte und Distanzen

$l' = 183^0 32' 25''$ $\qquad l''' = 234^0 12' 18''$
$b' = +6^0 55'\ 7''$ $\qquad b''' = +5^0 24' 44''$
$\log r' = 0.34518$ $\qquad \log r''' = 0.33186$

$$2f'' = 50^0 22' 20''$$

Für die Verhältnisse der Dreiecksflächen wurde ermittelt:

$\log n = 9.87745$ $\qquad \log n_0 = 9.60887$
$\log n'' = 9.52322$ $\qquad \log n_0'' = 9.83698$

und damit

$\log r'' = 0.34183$ $\qquad 2f''' = 14^0 32' 37''$
$\log r'' = 0.34183$ $\qquad 2f' = 35^0 49' 44''$
$\log r_0'' = 0.33504$ $\qquad 2f_0''' = 31^0 41' 20''$
$\log r_0'' = 0.33505$ $\qquad 2f_0' = 18^0 41'\ 1''$

Für die Verhältnisse der Sektoren zu den Dreiecken fand sich:

$\log \eta' = 0.02761$ $\qquad \log(\eta' - 1) = 8.81717$
$\log \eta''' = 0.00458$ $\qquad \log(\eta''' - 1) = 8.02543$
$\log \eta_0' = 0.00745$ $\qquad \log(\eta_0' - 1) = 8.23813$
$\log \eta_0''' = 0.02191$ $\qquad \log(\eta_0''' - 1) = 8.71382$
$\log \eta'' = 0.05587$ $\qquad \log(\eta'' - 1) = 9.13764$

und darnach für die:

2. Hypothese. $\log Y'' = 0.02981$ $\qquad \log Y_0'' = 9_n84632$
$\log Y' = 0.36362$ $\qquad \log Y_0' = 0.19312$
$b = +9.9224$ $\qquad b_0 = +5.6664$
$(3)\, Y'' = -0.32167$ $\qquad (3)_0 Y_0'' = -0.14182$
$\log III = 0.62900$ $\qquad \log IV = 9.25491$
$\log(-VII) = 0_n89178$ $\qquad \log(-VIII) = 9.36500$

$$\log x = 8.66400$$

$\log \varrho' = 0.10909$ $\qquad \log r' = 0.35456$
$\log \varrho''' = 0.43042$ $\qquad \log r''' = 0.33518$
$l' = 183^0 26' 19''$ $\qquad l''' = 234^0\ 2' 26''$
$b' = +7^0\ 2' 16''$ $\qquad b''' = +5^0 24' 22''$
$\log r' = 0.35455$ $\qquad \log r''' = 0.33519$

$$2f'' = 50^0 18' 28''$$

$\log n = 9.87469$ $\qquad$ $\log n_0 = 9.60723$
$\log n'' = 9.51979$ $\qquad$ $\log n_0'' = 9.83598$
$\log r'' = 0.34675$ $\qquad$ $f''' = 14^\circ 21' 29''$
$\log r'' = 0.34674$ $\qquad$ $2f' = 35\ 57\ 0$
$\log r_0'' = 0.33940$ $\qquad$ $2f_0''' = 31\ 29\ 22$
$\log r_0'' = 0.33939$ $\qquad$ $2f_0' = 18\ 49\ 2$
$\log \eta' = 0.02692$ $\qquad$ $\log(\eta' - 1) = 8.80595$
$\log \eta''' = 0.00436$ $\qquad$ $\log(\eta''' - 1) = 8.00403$
$\log \eta_0' = 0.00726$ $\qquad$ $\log(\eta_0' - 1) = 8.22703$
$\log \eta_0''' = 0.02094$ $\qquad$ $\log(\eta_0''' - 1) = 8.69377$
$\log \eta'' = 0.05384$ $\qquad$ $\log(\eta'' - 1) = 9.12053$

3. Hypothese:

$\log Y'' = 0.04045$ $\qquad$ $\log Y_0'' = 9_n84114$
$\log Y' = 0.36814$ $\qquad$ $\log Y_0' = 0.19904$
$b = +10.0111$ $\qquad$ $b_0 = +5.7436$
$(3)\ Y'' = -0.32964$ $\qquad$ $(3)_0\ Y_0'' = -0.14014$
$\log III = 0.63017$ $\qquad$ $\log IV = 9.27761$
$\log(-VII) = 0_n89638$ $\qquad$ $\log(-VIII) = 9.37086$
$\log x = 8.66590$

$\log \varrho' = -0.10856$ $\qquad$ $\log r' = 0.35426$
$\log \varrho''' = 0.42960$ $\qquad$ $\log r''' = 0.33423$
$l' = 183^\circ 26' 31''$ $\qquad$ $l''' = 234^\circ\ 5' 16''$
$b' = +7^\circ\ 2'\ 2''$ $\qquad$ $b''' = +5^\circ 24' 28''$
$\log r' = 0.35425$ $\qquad$ $\log r''' = 0.33423$
$2f'' = 50^\circ 21' 4''$

$\log n = 9.87478$ $\qquad$ $\log n_0 = 9.60774$
$\log n'' = 9.52056$ $\qquad$ $\log n_0'' = 9.83659$
$\log r'' = 0.34649$ $\qquad$ $2f''' = 14^\circ 22' 11''$
$\log r'' = 0.34650$ $\qquad$ $2f' = 35\ 58\ 50$
$\log r_0'' = 0.33918$ $\qquad$ $2f_0''' = 31\ 30\ 8$
$\log r_0'' = 0.33917$ $\qquad$ $2f_0' = 18\ 50\ 54$
$\log \eta' = 0.02703$ $\qquad$ $\log(\eta' - 1) = 8.80772$
$\log \eta''' = 0.00437$ $\qquad$ $\log(\eta''' - 1) = 8.00485$
$\log \eta_0' = 0.00726$ $\qquad$ $\log(\eta_0' - 1) = 8.22880$
$\log \eta_0''' = 0.02098$ $\qquad$ $\log(\eta_0''' - 1) = 8.69453$
$\log \eta'' = 0.05406$ $\qquad$ $\log(\eta'' - 1) = 9.12237$

Um nun die Zeiten für Aberration zu korrigiren, wurden die Distanzen zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung berechnet und es fand sich nach den oben mitgetheilten Formeln (pag. 267)

$$\Omega = 103^\circ\ 12'\ 30'' \qquad u' = 80^\circ\ 18'\ 30''$$
$$i = 7\ \ 8\ \ 11 \qquad u''' = 130\ \ 39\ \ 32$$
$$\log\varrho'' = 0.1939 \qquad \log\varrho_0'' = 0.3287$$

und es werden die korrigirten Beobachtungszeiten

$$T' = 89.49776 \qquad T_0'' = 192.40721$$
$$T''' = 137.33550 \qquad T_0''' = 251.27261$$

und darnach

$$(1) = -0.991\ 632 \qquad (1)_0 = -0.036\ 718$$
$$(2) = +4.755\ 067 \qquad (2)_0 = +3.615\ 833$$
$$(C) = -0.244\ 586 \qquad (C)_0 = -0.891\ 714$$
$$(3) = -0.300\ 319 \qquad (3)_0 = +0.202\ 030$$
$$(I) = -0.831\ 450 \qquad (II) = -0.502\ 349$$
$$(V) = +3.103\ 124 \qquad (VI) = -0.049\ 144$$

und damit die

4. Hypothese

$$\log Y'' = 0.040\ 390 \qquad \log Y_0'' = 9_n839\ 440$$
$$\log Y' = 0.367\ 940 \qquad \log Y_0' = 0.199\ 410$$
$$b = +10.00\ 595 \qquad b_0 = +5.74\ 829$$
$$(3)\ Y'' = -0.329\ 589 \qquad (3)\ Y_0'' = -0.139\ 591$$
$$\log(III) = 0.629\ 171 \qquad \log(IV) = 9\ 278\ 750$$
$$\log(-VII) = 0_n896\ 367 \qquad \log(-VIII) = 9.370\ 309$$
$$\log x = 8.665\ 426$$
$$\log\varrho' = 0.109\ 021 \qquad \log r' = 0.354\ 516$$
$$\log\varrho''' = 0.429\ 644 \qquad \log r''' = 0.334\ 278$$
$$l' = 183^\circ\ 26'\ 20''8 \qquad l''' = 234^\circ\ \ 5'\ \ 6''2$$
$$b' = +7^\circ\ \ 2'\ 14''1 \qquad b''' = +5^\circ\ 24'\ 28''0$$
$$\log r' = 0.354\ 516 \qquad \log r''' = 0.334\ 278$$
$$2f'' = 50^\circ\ 21'\ 4''6$$
$$\log n = 9.874\ 742 \qquad \log n_0 = 9.607\ 660$$
$$\log n'' = 9.520\ 488 \qquad \log n_0'' = 9.836\ 585$$
$$\log r'' = 0.346\ 646 \qquad 2f''' = 14^\circ\ 21'\ 50''4$$
$$\log r'' = 0.346\ 647 \qquad 2f' = 35\ \ 59\ \ 13.9$$
$$\log r_0'' = 0.339\ 268 \qquad 2f_0''' = 31\ \ 29\ \ 55.3$$
$$\log r_0'' = 0.339\ 268 \qquad 2f_0' = 18\ \ 51\ \ \ 9.1$$
$$\log\eta' = 0.027\ 015 \qquad \log(\eta' - 1) = 8.807\ 413$$
$$\log\eta''' = 0.004\ 363 \qquad \log(\eta''' - 1) = 8.004\ 208$$
$$\log\eta_0' = 0.007\ 289 \qquad \log(\eta_0' - 1) = 8.228\ 553$$
$$\log\eta_0''' = 0.020\ 954 \qquad \log(\eta_0''' - 1) = 8.694\ 001$$
$$\log\eta'' = 0.054\ 004 \qquad \log(\eta'' - 1) = 9.121\ 924$$

5. Hypothese

$$\log Y'' = 0.040\ 633 \qquad \log Y_0'' = 9_n839\ 238$$
$$\log Y' = 0.368\ 045 \qquad \log Y_0' = 0.199\ 542$$

Diese Werthe stimmen bereits so nahe mit denjenigen überein, welche die vierte Hypothese gegeben hat, dass man daraus mit Sicherheit schliessen kann, dass die Ver-

hältnisse der Dreiecksflächen von nun an keine merkbare Aenderung erleiden, demnach ist mit dieser Hypothese die Rechnung abgeschlossen worden. Es fand sich:

$$b = +10.00\,801 \qquad b_0 = +5.75\,002$$
$$(3)\ Y'' = -0.329\,774 \qquad (3)_0\ Y_0'' = -0.139\,526$$
$$\log(III) = 0.629\,205 \qquad \log(IV) = 9.279\,320$$
$$\log(-VII) = 0_n 896\,472 \qquad \log(-VIII) = 9.370\,421$$
$$\log x = 8.665\,466$$
$$\log \varrho' = 0.109\,009 \qquad \log r' = 0.354\,509$$
$$\log \varrho''' = 0.429\,626 \qquad \log r''' = 0.334\,257$$
$$l' = 183^0\ 26'\ 21''1 \qquad l''' = 234^0\ 5'\ 10''0$$
$$b' = +7^0\ 2'\ 13''8 \qquad b''' = +5^0\ 24'\ 28''1$$
$$\log r' = 0.354\,509 \qquad \log r''' = 0.334\,258$$
$$2f'' = 50^0\ 21'\ 8''2$$

Aus diesen Werthen wurden auf die bekannte Weise die Elemente hergeleitet und gefunden:

Epoche 1807; März 30.0 mittl. Pariser Zeit

$$L = 192^0\ 22'\ 48''3$$
$$M = 302\ \ 25\ \ 12.2$$
$$\pi = 249\ \ 57\ \ 36.1$$
$$\Omega = 103\ \ 10\ \ 56.7$$
$$i = 7\ \ 8\ \ 20.8$$
$$\varphi = 5\ \ 3\ \ 7.7$$
$$\log a = 0.372\,911$$
$$\mu = 978''6800$$

Die Darstellung der unabhängigen Breiten wird im Sinne: (Beob.-Rechg.)

$$d\beta'' = -\ 3''7$$
$$d\beta_0'' = +\ 10''3$$

während bei Gauss bedeutend grössere Fehler in den äusseren Breiten übrig bleiben, nämlich:

$$d\beta' = +\ 22''4$$
$$d\beta''' = -\ 18''3$$

Bedenkt man den Vortheil, den man erreicht durch die völlige Darstellung der äusseren Beobachtungen, so wird man dem hier vorgetragenen Verfahren den Vorzug einräumen müssen, wiewol eine Mehrarbeit durch die etwas geringere Konvergenz entsteht; mit der vierten Hypothese habe ich noch nicht die Genauigkeit der Gauss'schen vierten Hypothese erreicht, mit der fünften aber die letztere übertroffen; dieser Unterschied in der Konvergenz kommt aber praktisch nicht in Betracht, da ich nach meiner Methode bei ersten Bahnbestimmungen (kürzere Zwischenzeiten) je nach der geforderten Genauigkeit mit der ersten oder zweiten Hypothese fast ebenso ausreiche, wie nach dem Gauss'schen Verfahren; bei grossen Zwischenzeiten dagegen werden genäherte Elemente bekannt sein, die so nahe richtige Werthe geben werden, dass auch die Bildung von einer oder höchstens zwei Hypothesen genügen wird.

Ich werde nun ein zweites Beispiel vornehmen, welches dem praktischen Bedürfnisse mehr entsprechend, auf kurze Zwischenzeiten basirt ist. Ich wähle hierzu vier Beobachtungen des Planeten (59) »Elpis«, als ersten und vierten Ort benutze ich dieselben Beobachtungen, die mir als erster und dritter Ort in der Bahnbestimmung aus drei Orten (pag. 201) gedient haben. Die Beobachtungen sind:

| | Ort | Ortszeit | A. R. (59) | Decl. (59) |
|---|---|---|---|---|
| 1868 Mai 18 | Josefstadt (Wien) | $10^h\ 33^m\ 9^s$ | $17^h\ 16^m\ 20^s36$ | $-10^\circ\ 13'\ 58''1$ |
| » 28 | Leiden | 12 41 11 | 17 8 26.12 | — 9 44 11.0 |
| Juni 9 | Paris | 11 43 37 | 16 58 2.66 | — 9 20 37.5 |
| » 19 | Leiden | 10 55 51 | 16 49 33.48 | — 9 13 1.5 |

Für die erste und vierte Beobachtung entnehme ich die reducirten Werthe dem vorigen Abschnitt (pag. 203). Mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnung finde ich für die beiden mittleren Orte:

| | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $B$ | $L'$ | $\log R'$ | $\Delta L$ | $\Delta\log R$ | $\Delta t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | — 31.07 | — 4.68 | + 0″14 | 67° 52′ 15″51 | 0.006 0421 | — 5″90 | — 684 | + 0.1 |
| 3 | — 33.15 | — 5.01 | + 0.24 | 79 19 2.51 | 0.006 7084 | + 1″91 | — 650 | + 0.1 |

und damit ergibt sich für die weitere Rechnung

| | 1868 Mai | $\lambda$ | $\beta$ | $L$ | $\log R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18.431 471 | 258° 58′ 31″05 | + 12° 48′ 18″08 | 58° 8′ 46″35 | 0.005 2250 |
| 2 | 28.553 354 | 256 56 30.23 | (+ 13 8 7.62) | 67 52 9.61 | 0.005 9737 |
| 3 | 40.519 341 | 254 16 57.42 | (+ 13 16 8.59) | 79 19 4.42 | 0.006 6434 |
| 4 | 50.480 206 | 252 7 52.12 | + 13 9 2.79 | 88 49 47.25 | 0.007 0119 |

Ich führe, um mit völliger Genauigkeit vorzugehen, die Rechnung siebenstellig durch; es genügt aber, wie ich schon mehrmals bemerkt habe, eine sechstellige Rechnung völlig, und um die Kürze der Operationen und ihre zweckmässige Anordnung zu zeigen werde ich den ersten Theil meiner Rechnungen in extenso mittheilen; von der Berechnung der Formeln IV an unterscheidet sich das Verfahren nicht wesentlich von dem früheren (3 Orte), wesshalb ich von da an nur die Hauptmomente der Rechnung mittheile. Nach I (vgl. Anhang) erhielt ich, indem ich die Rechnung in zwei Kolumnen führte:

| | ′ | ‴ |
|---|---|---|
| $(\lambda - L)$ | 200° 49′ 44″70 | 163° 18′ 4″87 |
| $\sin(\lambda - L)$ | $9_n550\ 9391$ | 9.458 3929 |
| $\cos(\lambda - L)$ | $9_n970\ 6468$ | $9_n981\ 2881$ |
| $\sin\psi \sin P$ | 9.345 6363 | 9.357 0088 |
| sin / cos | $9_n925\ 6103$ | 9.889 7926 |
| $\sin\psi \cos P$ | $9_n540\ 0016$ | 9.446 8514 |
| $\sin\psi$ | 9.614 3913 | 9.557 0588 |
| $\cos\psi$ | $9_n959\ 7093$ | $9_n969\ 7466$ |
| $\log B$ | 9.619 6163 | 9.564 0707 |
| $\log f$ | $9_n964\ 9343$ | $9_n976\ 7585$ |

| | ′ | ‴ |
|---|---|---|
| $f$ | — 0.922 4319 | — 0.947 8913 |
| $\log R_s$ | $9_n556$ 1641 | 9.465 4048 |
| $\log R_c$ | 9.975 8718 | 9.988 3000 |
| $\lambda'' - \lambda'$ | $-2^\circ\ 2'\ 0''82$ | $-4^\circ\ 48'\ 38''11$ |
| $\lambda''' - \lambda''$ | — 4 41 33.63 | — 2 9 5.30 |
| $\sin(\lambda'' - \lambda')$ | $8_n550$ 0434 | $8_n912$ 8122 |
| $\sin(\lambda''' - \lambda'')$ | $8_n923$ 5650 | $8_n574$ 5110 |
| $\mathfrak{f}'$ | $8_n539$ 1059 | $8_n901$ 8747 |
| $\mathfrak{f}'''$ | $8_n912$ 0235 | $8_n562$ 9695 |
| $L' - \lambda''$ | $161^\circ\ 12'\ 16''12$ | $163^\circ\ 51'\ 48''93$ |
| $L'' - \lambda''$ | 170 55 39.38 | 185 2 7.00 |
| $L''' - \lambda''$ | 191 53 17.02 | 194 32 49.83 |
| $\sin(L' - \lambda'')$ | 9.508 1144 | 9.443 9278 |
| $\sin(L'' - \lambda'')$ | 9.197 7830 | $8_n943$ 3416 |
| $\sin(L''' - \lambda'')$ | $9_n313$ 8678 | $9_n399$ 9799 |
| $\log \odot'$ | 9.513 3394 | 9.449 1528 |
| $\log \odot''$ | 9.203 7567 | $8_n949$ 9850 |
| $\log \odot'''$ | $9_n320$ 8797 | $9_n406$ 9918 |
| $\log A$ | $0_n601$ 3159 | $0_n886$ 1833 |
| $\log B$ | $0_n291$ 7332 | 0.387 0155 |
| $\log C$ | 0.408 8562 | 0.844 0223 |
| $C$ | + 2.563 635 | + 6.982 682 |
| $\log D$ | 9.627 0824 | 0.338 9052 |

Nun schliesst sich die Berechnung der von den Zwischenzeiten abhängigen Grössen an, da aber diese sofort nach der ersten Hypothese durch Einführung der Aberration korrigirt wurden, so nehme ich die Berechnung dieser Verbesserungen mit in die erste Hypothese auf, die ich mit sechsstelligen Tafeln durchführe.

1. Hypothese. Es wird zunächst nach II:

| | ″ | °″ |
|---|---|---|
| $T''' - T''$ | 21.926 852 | 9.960 865 |
| $T'' - T'$ | 10.121 883 | 22.087 870 |
| $T''' - T'$ | 32.048 735 | |
| $\log(T''' - T'')$ | 1.340 976 | 0.998 297 |
| $\log(T'' - T')$ | 1.005 261 | 1.344 154 |
| $\log(T''' - T')$ | 1.505 810 | |
| $\log \tau'$ | 9.576 557 | 9.233 878 |
| $\log \tau'''$ | 9.240 842 | 9.579 735 |
| $\log \tau''$ | 9.741 391 | |
| $\log \tau'^2$ | 9.153 114 | 8.467 756 |
| $\log \tau'''^2$ | 8.481 684 | 9.159 470 |
| $\log \tau''^2$ | 9.482 782 | |

| | ″ | ″° |
|---|---|---|
| log (1) | $0_n937\ 031$ | $0_n540\ 326$ |
| log (2) | 0.792 282 | $0_n548\ 671$ |
| log (3) | 9.962 797 | 9.993 048 |
| (1) | — 8.65030 | — 3.46997 |
| (2) | + 6.19843 | — 3.53729 |
| $a$ | + 0.11176 | — 0.02458 |
| $I$ | = — 0.13634 | $II$ = — 0.066 216 |
| $V$ | = + 0.04359 | $VI$ = + 0.951 012 |
| log 3 $Y''$ | 9.049 037 | $9_n060\ 727$ |
| log 3 $Y'$ | 9.437 146 | 9.202 946 |
| log $Y''$ | 8.571 916 | $8_n583\ 606$ |
| log $Y'$ | 8.960 025 | 8.725 825 |
| log (1) $Y''$ | $9_n508\ 947$ | 9.123 932 |
| log (2) $Y''$ | 9.752 307 | $9_n274\ 496$ |
| (1) $Y''$ | — 0.322 810 | + 0.133 025 |
| (2) $Y''$ | + 0.565 336 | — 0.188 147 |
| $b$ | + 0.242 526 | — 0.055 122 |
| log (3) $Y''$ | 8.534 713 | $8_n576\ 654$ |
| (3) $Y''$ | + 0.034 2542 | — 0.037 7272 |
| $III$ | = + 0.297 648 | $VII$ = + 0.093 702 |
| $IV$ | = — 0.071 9814 | $VIII$ = — 0.001 7365 |
| log $III$ | = 9.473 703 | log (— $VII$) = $8_n971\ 749$ |
| log $IV$ | = $8_n857\ 220$ | log (— $VIV$) = 7.239 675 |

**Die Versuche nach $IV$ liessen finden**

$$\log x = 8.332\ 825$$

$$\log \varrho' = 0.282\ 721 \qquad \log r' = 0\ 457\ 919$$

$$\log \varrho''' = 0.270\ 713 \qquad \log r''' = 0.452\ 831$$

**nach $V$ erhielt ich**

$$l' = 251^0\ 41'\ 29''7 \qquad l''' = 258^0\ 6'\ 25''1$$

$$b' = +\ 8\ 30\ 52.4 \qquad b''' = +\ 8\ 36\ 10.6$$

$$\lg r' = 0.457\ 918 \qquad \log r''' = 0.452\ 831$$

$$2f'' = 6^0\ 20'\ 40''2$$

**nach $VI$ wurde:**

$$\log n = 9.835\ 670 \qquad \log n_0 = 9.493\ 342$$

$$\log n'' = 9.500\ 304 \qquad \log n_0'' = 9.838\ 841$$

$$\log r'' = 0.456\ 359 \qquad 2f''' = 1^0\ 59'\ 16''1$$

$$\log r'' = 0.456\ 359 \qquad 2f' = 4\ 21\ 24.1$$

$$\log r_0'' = 0.454\ 456 \qquad 2f_0''' = 4\ 21\ 23.6$$

$$\log r_0'' = 0.454\ 456 \qquad 2f_0' = 1\ 59\ 16.6$$

**Um nun den Einfluss der Aberration zu eliminiren wurden die Distanzen zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung nach den oben mitgetheilten Formeln eruirt. Es fand sich:**

$$\Omega = 170^\circ\, 14'\, 29'' \qquad i = 8^\circ\, 36'\, 31''$$
$$u_{,} = 81\;\, 32\;\, 43 \qquad u_{,,,} = 87\;\, 53\;\, 23$$
$$u_{,,} = 83\;\, 32'0 \qquad u_{,,}^{0} = 85\;\, 54'1$$
$$\log \varrho'' = 0.2721 \qquad \log \varrho_0'' = 0.2677$$

und daraus

$$\varDelta T' \;-1104.8 \qquad T' = 18.420\,423$$
$$\varDelta T'' \;-1078.2 \qquad T'' = 28.542\,572$$
$$\varDelta T_0'' \;-1067.2 \qquad T_0'' = 40.508\,669$$
$$\varDelta T''' \;-1074.7 \qquad T''' = 50.469\,459$$

Nun wurde nach *II* an die Berechnung der verbesserten Werthe gegangen und erhalten:

| | $''$ | $''^{0}$ |
|---|---|---|
| (1) | $-8.650\,082$ | $-3.469\,891$ |
| (2) | $+6.198\,341$ | $-3.537\,277$ |
| $C$ | $+2.563\,635$ | $+6.982\,682$ |
| (3) | $+0.917\,882$ | $+0.984\,097$ |

$$I = -0.136\,380 \qquad II = -0.066\,215$$
$$V = +0.043\,704 \qquad VI = +0.950\,989$$

Um nun genauere Werthe für $Y$ zu erhalten wurde die Rechnung zunächst nach den Formeln *VII* und *VIII* durchgeführt und gefunden:

$$\log(\eta' - 1) = 7.011\,440 \qquad \log \eta' = 0.000\,446$$
$$\log(\eta''' - 1) = 6.332\,194 \qquad \log \eta''' = 0.000\,093$$
$$\log(\eta_0' - 1) = 6.328\,721 \qquad \log \eta_0' = 0.000\,093$$
$$\log(\eta_0''' - 1) = 7.013\,038 \qquad \log \eta_0''' = 0.000\,447$$
$$\log(\eta'' - 1) = 7.339\,072 \qquad \log \eta'' = 0.000\,947$$
$$\log Y'' = 8.576\,185 \qquad \log Y_0'' = 8_n579\,468$$
$$\log Y' = 8.960\,300 \qquad \log Y_0' = 8.727\,912$$

2. Hypothese.

$$\log III = 9.472\,7377 \qquad \log IV = 8_n857\,0923$$
$$\log(-VII) = 8_n960\,0035 \qquad \log(-VII) = 7.142\,5178$$
$$\log x = 8.332\,3612$$
$$\log \varrho' = 0.282\,9443 \qquad \log r' = 0.458\,0671$$
$$\log \varrho''' = 0.270\,9582 \qquad \log r''' = 0.452\,9905$$

mit Rücksicht auf die kurzen Zwischenzeiten kann man die eben gefundenen Zahlen als hinreichend mit denen der ersten Hypothese übereinstimmend ansehen, um mit Sicherheit an die Eruirung der Elemente schreiten zu können; damit aber dieses Beispiel mit der grössten Genauigkeit, die siebenstellige Tafeln zu liefern vermögen, durchgeführt erscheint, habe ich noch eine dritte Hypothese gebildet; der geringe Unterschied der neu ermittelten Werthe von $Y$ (wenige Einheiten der sechsten Decimale) gegen diejenigen, auf welche die zweite Hypothese gestüzt wurde, zeigt aber, dass die Bildung dieser dritten Hypothese unnöthig ist für praktische Zwecke und gibt ein gutes Bild der raschen Convergenz der vorliegenden Methode.

Um nun die Bildung der dritten Hypothese vorzubereiten rechnete ich nach $V$:

$$l' = 251^\circ\,41'\,38''66 \qquad l''' = 258^\circ\,6'\,17''28$$
$$b' = +8\;30\;57.66 \qquad b''' = +8\;36\;16.72$$
$$\log r' = 0.458\,0670 \qquad \log r''' = 0.452\,9904$$
$$2f'' = 6^\circ\,20'\,23''48$$

nach $VI$ fand sich

$$\log n = 9.835\,6628 \qquad \log n'_0 = 9.493\,3326$$
$$\log n'' = 9.500\,3105 \qquad \log n''_0 = 9.838\,8456$$
$$\log r'' = 0.456\,5089 \qquad 2f''' = 1^\circ\,59'\,11''12$$
$$\log r'' = 0.456\,5090 \qquad 2f' = 4\;21\;12.35$$
$$\log r''_0 = 0.454\,6128 \qquad 2f_0''' = 4\;21\;12.44$$
$$\log r_0'' = 0.454\,6127 \qquad 2f_0' = 1\;59\;11.04$$

Die hier gefundenen Werthe für die Verhältnisse der Dreiecksflächen unterscheiden sich gegen jene, welche die erste Hypothese gewährt hat, so wenig, dass bei der dritten Hypothese eine merkbare Aenderung dieser Werthe nicht mehr hervortreten wird; also auch dieses Kriterium zeigt, dass die Bildung der dritten Hypothese ohne praktische Bedeutung ist.

Nach $VII$ wurde nun ermittelt

$$\log(\eta' - 1) = 7.010\,9769 \qquad \log \eta' = 0.000\,4452$$
$$\log(\eta''' - 1) = 6.331\,7467 \qquad \log \eta''' = 0.000\,0932$$
$$\log(\eta_0' - 1) = 6.328\,2489 \qquad \log \eta_0' = 0.000\,0924$$
$$\log(\eta_0''' - 1) = 7.012\,5729 \qquad \log \eta_0''' = 0.000\,4468$$
$$\log(\eta'' - 1) = 7.338\,6059 \qquad \log \eta'' = 0.000\,9460$$

Für die Bildung der dritten und letzten Hypothese geben die vorstehenden Werthe nach $VIII$ die folgenden Grössen:

$$\log Y'' = 8.576\,1821 \qquad \log Y_0'' = 8_n579\,4693$$
$$\log Y' = 8.960\,2967 \qquad \log Y_0' = 8.727\,9103$$

3. Hypothese (Schluss). Es findet sich:

$$\log III = 9.472\,7330 \qquad \log(IV) = 8_n857\,0916$$
$$\log(-VII) = 8_n060\,0010 \qquad \log(-VIII) = 7.142\,5726$$
$$\log x = 8.332\,3608$$
$$\log \varrho' = 0.282\,9446 \qquad \log r' = 0.458\,0673$$
$$\log \varrho''' = 0.270\,9585 \qquad \log r''' = 0.452\,9907$$

wie man sieht sind die Unterschiede gegen die vorausgehende Hypothese so klein, dass dieselben kaum die unvermeidliche Unsicherheit der logarithmischen Rechnung übersteigen.

Es findet sich nun nach $V$

$$l' = 251^\circ\,41'\,38''67 \qquad l''' = 258^\circ\,6'\,17''27$$
$$b' = +8\;30\;57.66 \qquad b''' = +8\;36\;16.72$$
$$\log r' = 0.458\,0672 \qquad \log r''' = 0.452\,9906$$
$$2f'' = 6^\circ 20' 23''46$$

Ich übergehe nun sofort auf die Berechnung der Formeln *IX*. Es findet sich

$$\log m_{\prime\prime} = 7.215\ 1111 \qquad \log l_{\prime\prime} = 6.889\ 1684$$
$$2\,\omega = -0^\circ\ 10'\ 2''80 \qquad \log h_{\prime\prime} = 7.293\ 8887$$
$$\tfrac{1}{2}g = 1\ 40\ 46''618 \qquad \log \eta^2 = 0.001\ 8921$$

nach $X$ wird:

$$v_{\prime} = 234^\circ\ 25'\ 5''60 \qquad E_{\prime} = 280^\circ\ 5'\ 41''89$$
$$v_{\prime\prime\prime} = 240\ 45\ 29.06 \qquad E_{\prime\prime\prime} = 246\ 48\ 48.37$$
$$\varphi = 6^\circ\ 44'\ 19''12$$

die daselbst angesetzte Probe gibt für:

$$\log (\gamma)^2 = 8.756\ 7920 \qquad \log \frac{\sqrt{2 m_{\prime\prime} \cos f''}}{\eta_{\prime\prime}} = 8.756\ 7920$$

Endlich wird nach *XI*:

$$\log p = 0.427\ 3544 \qquad M_{\prime} = 245^\circ\ 55'\ 22''53$$
$$\log a = 0.433\ 3757 \qquad M_{\prime\prime\prime} = 252\ 59\ 36.65$$
$$\mu = 794''\ 2242 \qquad \mu = 794''\ 2242$$

Die Berechnung der Bahnlage (*XII*) lässt finden:

$$☊ = 170^\circ\ 15'\ 35''15 \qquad u_{\prime} = 81^\circ\ 31'\ 46''02$$
$$i = 8\ 36\ 38.33 \qquad u_{\prime\prime\prime} = 87\ 52\ 9.48$$
$$\pi = 17\ 22\ 15.57$$

Die Elemente sind daher zusammengestellt:

(59) Elpis

Epoche = 1868 Juni 3.0 mittl. Berl. Zeit

mittl. Aeq. 1868.0

$$L = 266^\circ\ 43'\ 51''78$$
$$M = 249\ 21\ 36.21$$
$$\pi = 17\ 22\ 15.57$$
$$☊ = 170\ 15\ 35.15$$
$$i = 8\ 36\ 38.33$$
$$\varphi = 6\ 44\ 19.12$$
$$\log a = 0.433\ 3757$$
$$\mu = 794''\ 2242$$

Um nun die Rechnung einer strengen Prüfung zu unterziehen, habe ich aus den Elementen die Beobachtungen zurückgerechnet und finde die folgenden Differenzen zwischen der Beobachtung und Rechnung:

$$d\lambda_{\prime} = -0''06 \qquad d\beta_{\prime} = -0''02$$
$$d\lambda_{\prime\prime} = +0''02 \qquad d\beta_{\prime\prime} = (-9''07)$$
$$d\lambda_{\prime\prime}^{0} = 0''00 \qquad d\beta_{\prime\prime}^{0} = (-4''25)$$
$$d\lambda_{\prime\prime\prime} = +0''03 \qquad d\beta_{\prime\prime\prime} = -0''02$$

Die Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und den Beobachtungsdaten ist eine befriedigende; die unabhängigen Breiten werden aber nicht gut dargestellt, doch lassen sich diese Abweichungen durch Beobachtungsfehler auf genügende Weise erklären.

# TAFELN.

## Tafel I.

| Monat | | Gemeines Jahr | Schalt-Jahr |
|---|---|---|---|
| Januar | 0.0 | 0 | 0 |
| Februar | 0.0 | 31 | 31 |
| März | 0.0 | 59 | 60 |
| April | 0.0 | 90 | 91 |
| Mai | 0.0 | 120 | 121 |
| Juni | 0.0 | 151 | 152 |
| Juli | 0.0 | 181 | 182 |
| August | 0.0 | 212 | 213 |
| September | 0.0 | 243 | 244 |
| October | 0.0 | 273 | 274 |
| November | 0.0 | 304 | 305 |
| December | 0.0 | 334 | 335 |

## Tafel II.

| Stunden | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^h$ | $0^d041$ 667 | $7^h$ | $0^d291$ 667 | $13^h$ | $0^d541$ 667 | $19^h$ | $0^d791$ 667 |
| 2 | 0.083 333 | 8 | 0.333 333 | 14 | 0.583 333 | 20 | 0.833 333 |
| 3 | 0.125 000 | 9 | 0.375 000 | 15 | 0.625 000 | 21 | 0.875 000 |
| 4 | 0.166 667 | 10 | 0.416 667 | 16 | 0.666 667 | 22 | 0.916 667 |
| 5 | 0.208 333 | 11 | 0.458 333 | 17 | 0.708 333 | 23 | 0.958 333 |
| 6 | 0.250 000 | 12 | 0.500 000 | 18 | 0.750 000 | 24 | 1.000 000 |

| Minuten | | | | Secunden | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^m$ | $0^d000$ 694 | $31^m$ | $0^d021$ 528 | $1^s$ | $0^d000$ 012 | $31^s$ | $0^d000$ 359 |
| 2 | 0.001 389 | 32 | 0.022 222 | 2 | 0.000 023 | 32 | 0.000 370 |
| 3 | 0.002 083 | 33 | 0.022 917 | 3 | 0.000 035 | 33 | 0.000 382 |
| 4 | 0.002 778 | 34 | 0.023 611 | 4 | 0.000 046 | 34 | 0.000 394 |
| 5 | 0.003 472 | 35 | 0.024 305 | 5 | 0.000 058 | 35 | 0.000 405 |
| 6 | 0.004 167 | 36 | 0.025 000 | 6 | 0.000 069 | 36 | 0.000 417 |
| 7 | 0.004 861 | 37 | 0.025 694 | 7 | 0.000 081 | 37 | 0.000 428 |
| 8 | 0.005 556 | 38 | 0.026 389 | 8 | 0.000 093 | 38 | 0.000 440 |
| 9 | 0.006 250 | 39 | 0.027 083 | 9 | 0.000 104 | 39 | 0.000 451 |
| 10 | 0.006 944 | 40 | 0.027 778 | 10 | 0.000 116 | 40 | 0.000 463 |
| 11 | 0.007 639 | 41 | 0.028 472 | 11 | 0.000 127 | 41 | 0.000 475 |
| 12 | 0.008 333 | 42 | 0.029 167 | 12 | 0.000 139 | 42 | 0.000 486 |
| 13 | 0.009 028 | 43 | 0.029 861 | 13 | 0.000 150 | 43 | 0.000 498 |
| 14 | 0.009 722 | 44 | 0.030 556 | 14 | 0.000 162 | 44 | 0.000 509 |
| 15 | 0.010 417 | 45 | 0.031 250 | 15 | 0.000 174 | 45 | 0.000 521 |
| 16 | 0.011 111 | 46 | 0.031 944 | 16 | 0.000 185 | 46 | 0.000 532 |
| 17 | 0.011 805 | 47 | 0.032 639 | 17 | 0.000 197 | 47 | 0.000 544 |
| 18 | 0.012 500 | 48 | 0.033 333 | 18 | 0.000 208 | 48 | 0.000 556 |
| 19 | 0.013 194 | 49 | 0.034 028 | 19 | 0.000 220 | 49 | 0.000 567 |
| 20 | 0.013 889 | 50 | 0.034 722 | 20 | 0.000 231 | 50 | 0.000 579 |
| 21 | 0.014 583 | 51 | 0.035 417 | 21 | 0.000 243 | 51 | 0.000 590 |
| 22 | 0.015 278 | 52 | 0.036 111 | 22 | 0.000 255 | 52 | 0.000 602 |
| 23 | 0.015 972 | 53 | 0.036 805 | 23 | 0.000 266 | 53 | 0.000 613 |
| 24 | 0.016 667 | 54 | 0.037 500 | 24 | 0.000 278 | 54 | 0.000 625 |
| 25 | 0.017 361 | 55 | 0.038 194 | 25 | 0.000 290 | 55 | 0.000 637 |
| 26 | 0.018 055 | 56 | 0.038 889 | 26 | 0.000 301 | 56 | 0.000 648 |
| 27 | 0.018 750 | 57 | 0.039 583 | 27 | 0.000 313 | 57 | 0.000 660 |
| 28 | 0.019 444 | 58 | 0.040 278 | 28 | 0.000 324 | 58 | 0.000 671 |
| 29 | 0.020 139 | 59 | 0.040 972 | 29 | 0.000 336 | 59 | 0.000 683 |
| 30 | 0.020 833 | 60 | 0.041 667 | 30 | 0.000 347 | 60 | 0.000 694 |

## Tafel III (vergl. pag. 24)

| Mittl. Zeit | Red. auf Sternzeit | Mittl. Zeit | Red. auf Sternzeit | Mittl. Zeit | Red. auf Sternzeit | Mittl. Zeit | Red. auf Sternzeit |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0h 0m 0s | +0m 0s.0 | 6h 5m 15s | +1m 0s.0 | 12h 10m 29s | +2m 0s.0 | 18h 15m 44s | +3m 0s.0 |
| 6 5 | +0 1.0 | 11 20 | +1 1.0 | 16 34 | +2 1.0 | 21 49 | +3 1.0 |
| 12 10 | +0 2.0 | 17 25 | +1 2.0 | 22 40 | +2 2.0 | 27 54 | +3 2.0 |
| 18 16 | +0 3.0 | 23 30 | +1 3.0 | 28 45 | +2 3.0 | 33 59 | +3 3.0 |
| 24 21 | +0 4.0 | 29 36 | +1 4.0 | 34 50 | +2 4.0 | 40 5 | +3 4.0 |
| 30 26 | +0 5.0 | 35 41 | +1 5.0 | 40 55 | +2 5.0 | 46 10 | +3 5.0 |
| 36 31 | +0 6.0 | 41 46 | +1 6.0 | 47 1 | +2 6.0 | 52 15 | +3 6.0 |
| 42 37 | +0 7.0 | 47 51 | +1 7.0 | 53 6 | +2 7.0 | 18 58 20 | +3 7.0 |
| 48 42 | +0 8.0 | 6 53 57 | +1 8.0 | 12 59 11 | +2 8.0 | 19 4 26 | +3 8.0 |
| 0 54 47 | +0 9.0 | 7 0 2 | +1 9.0 | 13 5 16 | +2 9.0 | 10 31 | +3 9.0 |
| 1 0 52 | +0 10.0 | 6 7 | +1 10.0 | 11 22 | +2 10.0 | 16 36 | +3 10.0 |
| 6 58 | +0 11.0 | 12 12 | +1 11.0 | 17 27 | +2 11.0 | 22 41 | +3 11.0 |
| 13 3 | +0 12.0 | 18 17 | +1 12.0 | 23 32 | +2 12.0 | 28 47 | +3 12.0 |
| 19 8 | +0 13.0 | 24 23 | +1 13.0 | 29 37 | +2 13.0 | 34 52 | +3 13.0 |
| 25 13 | +0 14.0 | 30 28 | +1 14.0 | 35 43 | +2 14.0 | 40 57 | +3 14.0 |
| 31 19 | +0 15.0 | 36 33 | +1 15.0 | 41 48 | +2 15.0 | 47 2 | +3 15.0 |
| 37 24 | +0 16.0 | 42 38 | +1 16.0 | 47 53 | +2 16.0 | 53 8 | +3 16.0 |
| 43 29 | +0 17.0 | 48 44 | +1 17.0 | 13 53 58 | +2 17.0 | 19 59 13 | +3 17.0 |
| 49 34 | +0 18.0 | 7 54 49 | +1 18.0 | 14 0 4 | +2 18.0 | 20 5 18 | +3 18.0 |
| 1 55 40 | +0 19.0 | 8 0 54 | +1 19.0 | 6 9 | +2 19.0 | 11 23 | +3 19.0 |
| 2 1 45 | +0 20.0 | 6 59 | +1 20.0 | 12 14 | +2 20.0 | 17 29 | +3 20.0 |
| 7 50 | +0 21.0 | 13 5 | +1 21.0 | 18 19 | +2 21.0 | 23 34 | +3 21.0 |
| 13 55 | +0 22.0 | 19 10 | +1 22.0 | 24 24 | +2 22.0 | 29 39 | +3 22.0 |
| 20 1 | +0 23.0 | 25 15 | +1 23.0 | 30 30 | +2 23.0 | 35 44 | +3 23.0 |
| 26 6 | +0 24.0 | 31 20 | +1 24.0 | 36 35 | +2 24.0 | 41 50 | +3 24.0 |
| 32 11 | +0 25.0 | 37 26 | +1 25.0 | 42 40 | +2 25.0 | 47 55 | +3 25.0 |
| 38 16 | +0 26.0 | 43 31 | +1 26.0 | 48 45 | +2 26.0 | 20 54 0 | +3 26.0 |
| 44 22 | +0 27.0 | 49 36 | +1 27.0 | 14 54 51 | +2 27.0 | 21 0 5 | +3 27.0 |
| 50 27 | +0 28.0 | 8 55 41 | +1 28.0 | 15 0 56 | +2 28.0 | 6 10 | +3 28.0 |
| 2 56 32 | +0 29.0 | 9 1 47 | +1 29.0 | 7 1 | +2 29.0 | 12 16 | +3 29.0 |
| 3 2 37 | +0 30.0 | 7 52 | +1 30.0 | 13 6 | +2 30.0 | 18 21 | +3 30.0 |
| 8 43 | +0 31.0 | 13 57 | +1 31.0 | 19 12 | +2 31.0 | 24 26 | +3 31.0 |
| 14 48 | +0 32.0 | 20 2 | +1 32.0 | 25 17 | +2 32.0 | 30 31 | +3 32.0 |
| 20 53 | +0 33.0 | 26 8 | +1 33.0 | 31 22 | +2 33.0 | 36 37 | +3 33.0 |
| 26 58 | +0 34.0 | 32 13 | +1 34.0 | 37 27 | +2 34.0 | 42 42 | +3 34.0 |
| 33 4 | +0 35.0 | 38 18 | +1 35.0 | 43 33 | +2 35.0 | 48 47 | +3 35.0 |
| 39 9 | +0 36.0 | 44 23 | +1 36.0 | 49 38 | +2 36.0 | 21 54 52 | +3 36.0 |
| 45 14 | +0 37.0 | 50 29 | +1 37.0 | 15 55 43 | +2 37.0 | 22 0 58 | +3 37.0 |
| 51 19 | +0 38.0 | 9 56 34 | +1 38.0 | 16 1 48 | +2 38.0 | 7 3 | +3 38.0 |
| 3 57 24 | +0 39.0 | 10 2 39 | +1 39.0 | 7 54 | +2 39.0 | 13 8 | +3 39.0 |
| 4 3 30 | +0 40.0 | 8 44 | +1 40.0 | 13 59 | +2 40.0 | 19 13 | +3 40.0 |
| 9 35 | +0 41.0 | 14 49 | +1 41.0 | 20 4 | +2 41.0 | 25 19 | +3 41.0 |
| 15 40 | +0 42.0 | 20 55 | +1 42.0 | 26 9 | +2 42.0 | 31 24 | +3 42.0 |
| 21 45 | +0 43.0 | 27 0 | +1 43.0 | 32 15 | +2 43.0 | 37 29 | +3 43.0 |
| 27 51 | +0 44.0 | 33 5 | +1 44.0 | 38 20 | +2 44.0 | 43 34 | +3 44.0 |
| 33 56 | +0 45.0 | 39 10 | +1 45.0 | 44 25 | +2 45.0 | 49 40 | +3 45.0 |
| 40 1 | +0 46.0 | 45 16 | +1 46.0 | 50 30 | +2 46.0 | 22 55 45 | +3 46.0 |
| 46 6 | +0 47.0 | 51 21 | +1 47.0 | 16 56 36 | +2 47.0 | 23 1 50 | +3 47.0 |
| 52 12 | +0 48.0 | 10 57 26 | +1 48.0 | 17 2 41 | +2 48.0 | 7 55 | +3 48.0 |
| 4 58 17 | +0 49.0 | 11 3 31 | +1 49.0 | 8 46 | +2 49.0 | 14 1 | +3 49.0 |
| 5 4 22 | +0 50.0 | 9 37 | +1 50.0 | 14 51 | +2 50.0 | 20 6 | +3 50.0 |
| 10 27 | +0 51.0 | 15 42 | +1 51.0 | 20 57 | +2 51.0 | 26 11 | +3 51.0 |
| 16 33 | +0 52.0 | 21 47 | +1 52.0 | 27 2 | +2 52.0 | 32 16 | +3 52.0 |
| 22 38 | +0 53.0 | 27 52 | +1 53.0 | 33 7 | +2 53.0 | 38 22 | +3 53.0 |
| 28 43 | +0 54.0 | 33 58 | +1 54.0 | 39 12 | +2 54.0 | 44 27 | +3 54.0 |
| 34 48 | +0 55.0 | 40 3 | +1 55.0 | 45 17 | +2 55.0 | 50 32 | +3 55.0 |
| 40 54 | +0 56.0 | 46 8 | +1 56.0 | 51 23 | +2 56.0 | 23 56 37 | +3 56.0 |
| 46 59 | +0 57.0 | 52 13 | +1 57.0 | 17 57 28 | +2 57.0 | 24 2 43 | +3 57.0 |
| 53 4 | +0 58.0 | 11 58 19 | +1 58.0 | 18 3 33 | +2 58.0 | 8 48 | +3 58.0 |
| 5 59 9 | +0 59.0 | 12 4 24 | +1 59.0 | 9 38 | +2 59.0 | 14 53 | +3 59.0 |
| 6h 5m 15s | +1m 0s.0 | 12h 10m 29s | +2m 0s.0 | 18h 15m 44s | +3m 0s.0 | 24h 20m 58s | +4m 0s.0 |

# Tafel IV (vergl. pag. 26).

| Sternzeit | Red. auf mittl. Zeit | Sternzeit | Red. auf mittl. Zeit | Sternzeit | Red. auf mittl. Zeit | Sternzeit | Red. auf mittl. Zeit |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^h\ 0^m\ 0^s$ | $-0^m\ 0^s.0$ | $6^h\ 6^m\ 15^s$ | $-1^m\ 0^s.0$ | $12^h\ 12^m\ 29^s$ | $-2^m\ 0^s.0$ | $18^h\ 18^m\ 44^s$ | $-3^m\ 0^s.0$ |
| 6 6 | — 0 1.0 | 12 21 | — 1 1.0 | 18 35 | — 2 1.0 | 24 50 | — 3 1.0 |
| 12 12 | — 0 2.0 | 18 27 | — 1 2.0 | 24 42 | — 2 2.0 | 30 56 | — 3 2.0 |
| 18 19 | — 0 3.0 | 24 33 | — 1 3.0 | 30 48 | — 2 3.0 | 37 2 | — 3 3.0 |
| 24 25 | — 0 4.0 | 30 40 | — 1 4.0 | 36 54 | — 2 4.0 | 43 9 | — 3 4.0 |
| 30 31 | — 0 5.0 | 36 46 | — 1 5.0 | 43 0 | — 2 5.0 | 49 15 | — 3 5.0 |
| 36 37 | — 0 6.0 | 42 52 | — 1 6.0 | 49 7 | — 2 6.0 | 18 55 21 | — 3 6.0 |
| 42 44 | — 0 7.0 | 48 58 | — 1 7.0 | 12 55 13 | — 2 7.0 | 19 1 27 | — 3 7.0 |
| 48 50 | — 0 8.0 | 6 55 4 | — 1 8.0 | 13 1 19 | — 2 8.0 | 7 34 | — 3 8.0 |
| 0 54 56 | — 0 9.0 | 7 1 11 | — 1 9.0 | 7 25 | — 2 9.0 | 13 40 | — 3 9.0 |
| 1 1 2 | — 0 10.0 | 7 17 | — 1 10.0 | 13 32 | — 2 10.0 | 19 46 | — 3 10.0 |
| 7 9 | — 0 11.0 | 13 23 | — 1 11.0 | 19 38 | — 2 11.0 | 25 52 | — 3 11.0 |
| 13 15 | — 0 12.0 | 19 29 | — 1 12.0 | 25 44 | — 2 12.0 | 31 59 | — 3 12.0 |
| 19 21 | — 0 13.0 | 25 36 | — 1 13.0 | 31 50 | — 2 13.0 | 38 5 | — 3 13.0 |
| 25 27 | — 0 14.0 | 31 42 | — 1 14.0 | 37 56 | — 2 14.0 | 44 11 | — 3 14.0 |
| 31 34 | — 0 15.0 | 37 48 | — 1 15.0 | 44 3 | — 2 15.0 | 50 17 | — 3 15.0 |
| 37 40 | — 0 16.0 | 43 54 | — 1 16.0 | 50 9 | — 2 16.0 | 19 56 24 | — 3 16.0 |
| 43 46 | — 0 17.0 | 50 1 | — 1 17.0 | 13 56 15 | — 2 17.0 | 20 2 30 | — 3 17.0 |
| 49 52 | — 0 18.0 | 7 56 7 | — 1 18.0 | 14 2 21 | — 2 18.0 | 8 36 | — 3 18.0 |
| 1 55 59 | — 0 19.0 | 8 2 13 | — 1 19.0 | 8 28 | — 2 19.0 | 14 42 | — 3 19.0 |
| 2 2 5 | — 0 20.0 | 8 19 | — 1 20.0 | 14 34 | — 2 20.0 | 20 48 | — 3 20.0 |
| 8 11 | — 0 21.0 | 14 26 | — 1 21.0 | 20 40 | — 2 21.0 | 26 55 | — 3 21.0 |
| 14 17 | — 0 22.0 | 20 32 | — 1 22.0 | 26 46 | — 2 22.0 | 33 1 | — 3 22.0 |
| 20 24 | — 0 23.0 | 26 38 | — 1 23.0 | 32 53 | — 2 23.0 | 39 7 | — 3 23.0 |
| 26 30 | — 0 24.0 | 32 44 | — 1 24.0 | 38 59 | — 2 24.0 | 45 13 | — 3 24.0 |
| 32 36 | — 0 25.0 | 38 51 | — 1 25.0 | 45 5 | — 2 25.0 | 51 20 | — 3 25.0 |
| 38 42 | — 0 26.0 | 44 57 | — 1 26.0 | 51 11 | — 2 26.0 | 20 57 26 | — 3 26.0 |
| 44 49 | — 0 27.0 | 51 3 | — 1 27.0 | 14 57 18 | — 2 27.0 | 21 3 32 | — 3 27.0 |
| 50 55 | — 0 28.0 | 8 57 9 | — 1 28.0 | 15 3 24 | — 2 28.0 | 9 38 | — 3 28.0 |
| 2 57 1 | — 0 29.0 | 9 3 16 | — 1 29.0 | 9 30 | — 2 29.0 | 15 45 | — 3 29.0 |
| 3 3 7 | — 0 30.0 | 9 22 | — 1 30.0 | 15 36 | — 2 30.0 | 21 51 | — 3 30.0 |
| 9 14 | — 0 31.0 | 15 28 | — 1 31.0 | 21 43 | — 2 31.0 | 27 57 | — 3 31.0 |
| 15 20 | — 0 32.0 | 21 34 | — 1 32.0 | 27 49 | — 2 32.0 | 34 3 | — 3 32.0 |
| 21 26 | — 0 33.0 | 27 41 | — 1 33.0 | 33 55 | — 2 33.0 | 40 10 | — 3 33.0 |
| 27 32 | — 0 34.0 | 33 47 | — 1 34.0 | 40 1 | — 2 34.0 | 46 16 | — 3 34.0 |
| 33 38 | — 0 35.0 | 39 53 | — 1 35.0 | 46 8 | — 2 35.0 | 52 22 | — 3 35.0 |
| 39 45 | — 0 36.0 | 45 59 | — 1 36.0 | 52 14 | — 2 36.0 | 21 58 28 | — 3 36.0 |
| 45 51 | — 0 37.0 | 52 6 | — 1 37.0 | 15 58 20 | — 2 37.0 | 22 4 35 | — 3 37.0 |
| 51 57 | — 0 38.0 | 9 58 12 | — 1 38.0 | 16 4 26 | — 2 38.0 | 10 41 | — 3 38.0 |
| 3 58 3 | — 0 39.0 | 10 4 18 | — 1 39.0 | 10 33 | — 2 39.0 | 16 47 | — 3 39.0 |
| 4 4 10 | — 0 40.0 | 10 24 | — 1 40.0 | 16 39 | — 2 40.0 | 22 53 | — 3 40.0 |
| 10 16 | — 0 41.0 | 16 30 | — 1 41.0 | 22 45 | — 2 41.0 | 29 0 | — 3 41.0 |
| 16 22 | — 0 42.0 | 22 37 | — 1 42.0 | 28 51 | — 2 42.0 | 35 6 | — 3 42.0 |
| 22 28 | — 0 43.0 | 28 43 | — 1 43.0 | 34 58 | — 2 43.0 | 41 12 | — 3 43.0 |
| 28 35 | — 0 44.0 | 34 49 | — 1 44.0 | 41 4 | — 2 44.0 | 47 18 | — 3 44.0 |
| 34 41 | — 0 45.0 | 40 55 | — 1 45.0 | 47 10 | — 2 45.0 | 53 25 | — 3 45.0 |
| 40 47 | — 0 46.0 | 47 2 | — 1 46.0 | 53 16 | — 2 46.0 | 22 59 31 | — 3 46.0 |
| 46 53 | — 0 47.0 | 53 8 | — 1 47.0 | 16 59 22 | — 2 47.0 | 23 5 37 | — 3 47.0 |
| 53 0 | — 0 48.0 | 10 59 14 | — 1 48.0 | 17 5 29 | — 2 48.0 | 11 43 | — 3 48.0 |
| 4 59 6 | — 0 49.0 | 11 5 20 | — 1 49.0 | 11 35 | — 2 49.0 | 17 50 | — 3 49.0 |
| 5 5 12 | — 0 50.0 | 11 27 | — 1 50.0 | 17 41 | — 2 50.0 | 23 56 | — 3 50.0 |
| 11 18 | — 0 51.0 | 17 33 | — 1 51.0 | 23 47 | — 2 51.0 | 30 2 | — 3 51.0 |
| 17 25 | — 0 52.0 | 23 39 | — 1 52.0 | 29 54 | — 2 52.0 | 36 8 | — 3 52.0 |
| 23 31 | — 0 53.0 | 29 45 | — 1 53.0 | 36 0 | — 2 53.0 | 42 14 | — 3 53.0 |
| 29 37 | — 0 54.0 | 35 52 | — 1 54.0 | 42 6 | — 2 54.0 | 48 21 | — 3 54.0 |
| 35 43 | — 0 55.0 | 41 58 | — 1 55.0 | 48 12 | — 2 55.0 | 23 54 27 | — 3 55.0 |
| 41 50 | — 0 56.0 | 48 4 | — 1 56.0 | 17 54 19 | — 2 56.0 | 24 0 33 | — 3 56.0 |
| 47 56 | — 0 57.0 | 11 54 10 | — 1 57.0 | 18 0 25 | — 2 57.0 | 6 39 | — 3 57.0 |
| 5 54 2 | — 0 58.0 | 12 0 17 | — 1 58.0 | 6 31 | — 2 58.0 | 12 46 | — 3 58.0 |
| 6 0 8 | — 0 59.0 | 6 23 | — 1 59.0 | 12 37 | — 2 59.0 | 18 52 | — 3 59.0 |
| $6^h\ 6^m\ 15^s$ | $-1^m\ 0^s.0$ | $12^h\ 12^m\ 29^s$ | $-2^m\ 0^s.0$ | $18^h\ 18^m\ 44^s$ | $-3^m\ 0^s.0$ | $24^h\ 24^m\ 58^s$ | $-4^m\ 0^s.0$ |

## Tafel V (vergl. pag. 51).

| $v$ | 0° |  | 1° |  | 2° |  | 3° |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | $M$ | log Diff. 1″ | $M$ | log Diff. 1″ | $M$ | log Diff. 1″ | $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 0.000 000 | 2.29 948 | 0.717 469 | 2.29 955 | 1.435 156 | 2.29 974 | 2.153 281 | 2.30 008 |
| 1 | 0.011 957 | 2.29 948 | 0.729 428 | 2.29 955 | 1.447 121 | 2.29 974 | 2.165 254 | 2.30 009 |
| 2 | 0.023 915 | 2.29 948 | 0.741 387 | 2.29 955 | 1.459 085 | 2.29 975 | 2.177 228 | 2.30 009 |
| 3 | 0.035 872 | 2.29 948 | 0.753 346 | 2.29 956 | 1.471 050 | 2.29 975 | 2.189 203 | 2.30 010 |
| 4 | 0.047 829 | 2.29 948 | 0.765 305 | 2.29 956 | 1.483 015 | 2.29 976 | 2.201 177 | 2.30 011 |
| 5 | 0.059 786 | 2.29 948 | 0.777 265 | 2.29 956 | 1.494 980 | 2.29 976 | 2.213 151 | 2.30 011 |
| 6 | 0.071 743 | 2.29 948 | 0.789 225 | 2.29 956 | 1.506 945 | 2.29 977 | 2.225 126 | 2.30 012 |
| 7 | 0.083 700 | 2.29 948 | 0.801 184 | 2.29 956 | 1.518 910 | 2.29 977 | 2.237 101 | 2.30 013 |
| 8 | 0.095 658 | 2.29 948 | 0.813 143 | 2.29 957 | 1.530 876 | 2.29 978 | 2.249 076 | 2.30 013 |
| 9 | 0.107 615 | 2.29 948 | 0.825 103 | 2.29 957 | 1.542 841 | 2.29 978 | 2.261 051 | 2.30 014 |
| 10 | 0.119 572 | 2.29 948 | 0.837 062 | 2.29 957 | 1.554 807 | 2.29 979 | 2.273 026 | 2.30 015 |
| 11 | 0.131 530 | 2.29 948 | 0.849 022 | 2.29 957 | 1.566 773 | 2.29 979 | 2.285 002 | 2.30 016 |
| 12 | 0.143 487 | 2.29 948 | 0.860 982 | 2.29 957 | 1.578 739 | 2.29 980 | 2.296 978 | 2.30 016 |
| 13 | 0.155 444 | 2.29 948 | 0.872 942 | 2.29 958 | 1.590 705 | 2.29 980 | 2.308 954 | 2.30 017 |
| 14 | 0.167 402 | 2.29 948 | 0.884 902 | 2.29 958 | 1.602 671 | 2.29 981 | 2.320 929 | 2.30 018 |
| 15 | 0.179 358 | 2.29 949 | 0.896 862 | 2.29 958 | 1.614 637 | 2.29 981 | 2.332 906 | 2.30 019 |
| 16 | 0.191 316 | 2.29 949 | 0.908 822 | 2.29 958 | 1.626 604 | 2.29 982 | 2.344 883 | 2.30 019 |
| 17 | 0.203 273 | 2.29 949 | 0.920 782 | 2.29 958 | 1.638 571 | 2.29 982 | 2.356 860 | 2.30 020 |
| 18 | 0.215 230 | 2.29 949 | 0.932 743 | 2.29 959 | 1.650 537 | 2.29 983 | 2.368 837 | 2.30 021 |
| 19 | 0.227 188 | 2.29 949 | 0.944 703 | 2.29 959 | 1.662 504 | 2.29 983 | 2.380 814 | 2.30 021 |
| 20 | 0.239 145 | 2.29 949 | 0.956 663 | 2.29 959 | 1.674 471 | 2.29 984 | 2.392 792 | 2.30 022 |
| 21 | 0.251 103 | 2.29 949 | 0.968 623 | 2.29 959 | 1.686 439 | 2.29 984 | 2.404 769 | 2.30 023 |
| 22 | 0.263 060 | 2.29 949 | 0.980 584 | 2.29 959 | 1.698 406 | 2.29 985 | 2.416 746 | 2.30 024 |
| 23 | 0.275 018 | 2.29 949 | 0.992 545 | 2.29 960 | 1.710 373 | 2.29 985 | 2.428 724 | 2.30 024 |
| 24 | 0.286 975 | 2.29 949 | 1.004 506 | 2.29 960 | 1.722 341 | 2.29 986 | 2.440 702 | 2.30 025 |
| 25 | 0.298 932 | 2.29 950 | 1.016 467 | 2.29 960 | 1.734 309 | 2.29 986 | 2.452 680 | 2.30 026 |
| 26 | 0.310 890 | 2.29 950 | 1.028 427 | 2.29 961 | 1.746 277 | 2.29 987 | 2.464 659 | 2.30 026 |
| 27 | 0.322 847 | 2.29 950 | 1.040 388 | 2.29 961 | 1.758 245 | 2.29 987 | 2.476 638 | 2.30 027 |
| 28 | 0.334 805 | 2.29 950 | 1.052 350 | 2.29 961 | 1.770 212 | 2.29 988 | 2.488 617 | 2.30 028 |
| 29 | 0.346 763 | 2.29 950 | 1.064 311 | 2.29 961 | 1.782 181 | 2.29 988 | 2.500 596 | 2.30 028 |
| 30 | 0.358 720 | 2.29 950 | 1.076 272 | 2.29 962 | 1.794 150 | 2.29 989 | 2.512 575 | 2.30 029 |
| 31 | 0.370 678 | 2.29 950 | 1.088 233 | 2.29 962 | 1.806 118 | 2.29 989 | 2.524 555 | 2.30 030 |
| 32 | 0.382 636 | 2.29 950 | 1.100 194 | 2.29 962 | 1.818 087 | 2.29 990 | 2.536 535 | 2.30 031 |
| 33 | 0.394 594 | 2.29 950 | 1.112 156 | 2.29 963 | 1.830 056 | 2.29 990 | 2.548 515 | 2.30 032 |
| 34 | 0.406 551 | 2.29 950 | 1.124 118 | 2.29 963 | 1.842 025 | 2.29 991 | 2.560 496 | 2.30 032 |
| 35 | 0.418 508 | 2.29 951 | 1.136 079 | 2.29 963 | 1.853 995 | 2.29 992 | 2.572 476 | 2.30 033 |
| 36 | 0.430 466 | 2.29 951 | 1.148 041 | 2.29 964 | 1.865 964 | 2.29 992 | 2.584 457 | 2.30 034 |
| 37 | 0.442 424 | 2.29 951 | 1.160 003 | 2.29 964 | 1.877 934 | 2.29 993 | 2.596 438 | 2.30 035 |
| 38 | 0.454 382 | 2.29 951 | 1.171 965 | 2.29 964 | 1.889 904 | 2.29 993 | 2.608 419 | 2.30 036 |
| 39 | 0.466 340 | 2.29 951 | 1.183 927 | 2.29 965 | 1.901 874 | 2.29 994 | 2.620 400 | 2.30 036 |
| 40 | 0.478 298 | 2.29 951 | 1.195 889 | 2.29 965 | 1.913 844 | 2.29 995 | 2.632 382 | 2.30 037 |
| 41 | 0.490 256 | 2.29 951 | 1.207 851 | 2.29 966 | 1.925 814 | 2.29 995 | 2.644 364 | 2.30 038 |
| 42 | 0.502 214 | 2.29 951 | 1.219 814 | 2.29 966 | 1.937 784 | 2.29 996 | 2.656 346 | 2.30 039 |
| 43 | 0.514 172 | 2.29 952 | 1.231 776 | 2.29 966 | 1.949 755 | 2.29 996 | 2.668 329 | 2.30 040 |
| 44 | 0.526 131 | 2.29 952 | 1.243 738 | 2.29 967 | 1.961 726 | 2.29 997 | 2.680 311 | 2.30 040 |
| 45 | 0.538 089 | 2.29 952 | 1.255 701 | 2.29 967 | 1.973 697 | 2.29 998 | 2.692 294 | 2.30 041 |
| 46 | 0.550 047 | 2.29 952 | 1.267 664 | 2.29 968 | 1.985 668 | 2.29 998 | 2.704 277 | 2.30 042 |
| 47 | 0.562 005 | 2.29 952 | 1.279 627 | 2.29 968 | 1.997 639 | 2.29 999 | 2.716 260 | 2.30 043 |
| 48 | 0.573 964 | 2.29 953 | 1.291 590 | 2.29 968 | 2.009 610 | 2.29 999 | 2.728 244 | 2.30 043 |
| 49 | 0.585 922 | 2.29 953 | 1.303 553 | 2.29 969 | 2.021 582 | 2.30 000 | 2.740 227 | 2.30 044 |
| 50 | 0.597 881 | 2.29 953 | 1.315 517 | 2.29 969 | 2.033 553 | 2.30 001 | 2.752 211 | 2.30 045 |
| 51 | 0.609 839 | 2.29 953 | 1.327 480 | 2.29 969 | 2.045 525 | 2.30 001 | 2.764 195 | 2.30 046 |
| 52 | 0.621 798 | 2.29 953 | 1.339 444 | 2.29 970 | 2.057 498 | 2.30 002 | 2.776 180 | 2.30 047 |
| 53 | 0.633 756 | 2.29 954 | 1.351 407 | 2.29 970 | 2.069 470 | 2.30 003 | 2.788 164 | 2.30 048 |
| 54 | 0.645 715 | 2.29 954 | 1.363 371 | 2.29 971 | 2.081 442 | 2.30 004 | 2.800 149 | 2.30 048 |
| 55 | 0.657 674 | 2.29 954 | 1.375 335 | 2.29 971 | 2.093 415 | 2.30 004 | 2.812 133 | 2.30 049 |
| 56 | 0.669 633 | 2.29 954 | 1.387 299 | 2.29 972 | 2.105 388 | 2.30 005 | 2.824 119 | 2.30 050 |
| 57 | 0.681 592 | 2.29 954 | 1.399 263 | 2.29 972 | 2.117 361 | 2.30 006 | 2.836 105 | 2.30 051 |
| 58 | 0.693 551 | 2.29 955 | 1.411 227 | 2.29 973 | 2.129 334 | 2.30 006 | 2.848 090 | 2.30 052 |
| 59 | 0.705 510 | 2.29 955 | 1.423 191 | 2.29 973 | 2.141 308 | 2.30 007 | 2.860 076 | 2.30 053 |
| 60 | 0.717 469 | 2.29 955 | 1.435 156 | 2.29 974 | 2.153 281 | 2.30 008 | 2.872 062 | 2.30 054 |

# Tafel V.

| v | 4° | | 5° | | 6° | | 7° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ |
| 0′ | 2.872 062 | 2.30 054 | 3.591 721 | 2.30 114 | 4.312 476 | 2.30 186 | 5.034 553 | 2.30 272 |
| 1 | 2.884 048 | 2.30 055 | 3.603 724 | 2.30 115 | 4.324 500 | 2.30 187 | 5.046 600 | 2.30 274 |
| 2 | 2.896 036 | 2.30 056 | 3.615 727 | 2.30 116 | 4.336 523 | 2.30 189 | 5.058 648 | 2.30 275 |
| 3 | 2.908 022 | 2.30 057 | 3.627 731 | 2.30 117 | 4.348 546 | 2.30 190 | 5.070 695 | 2.30 277 |
| 4 | 2.920 010 | 2.30 058 | 3.639 735 | 2.30 118 | 4.360 571 | 2.30 191 | 5.082 743 | 2.30 278 |
| 5 | 2.931 998 | 2.30 058 | 3.651 739 | 2.30 119 | 4.372 596 | 2.30 192 | 5.094 792 | 2.30 280 |
| 6 | 2.943 985 | 2.30 059 | 3.663 744 | 2.30 121 | 4.384 621 | 2.30 194 | 5.106 841 | 2.30 282 |
| 7 | 2.955 973 | 2.30 060 | 3.675 749 | 2.30 122 | 4.396 646 | 2.30 195 | 5.118 891 | 2.30 283 |
| 8 | 2.967 962 | 2.30 061 | 3.687 754 | 2.30 123 | 4.408 672 | 2.30 196 | 5.130 941 | 2.30 285 |
| 9 | 2.979 950 | 2.30 062 | 3.699 759 | 2.30 124 | 4.420 699 | 2.30 198 | 5.142 991 | 2.30 286 |
| 10 | 2.991 939 | 2.30 063 | 3.711 765 | 2.30 125 | 4.432 725 | 2.30 199 | 5.155 042 | 2.30 288 |
| 11 | 3.003 928 | 2.30 064 | 3.723 771 | 2.30 126 | 4.444 752 | 2.30 200 | 5.167 093 | 2.30 290 |
| 12 | 3.015 917 | 2.30 065 | 3.735 777 | 2.30 127 | 4.456 779 | 2.30 202 | 5.179 145 | 2.30 291 |
| 13 | 3.027 906 | 2.30 066 | 3.747 784 | 2.30 128 | 4.468 808 | 2.30 203 | 5.191 198 | 2.30 293 |
| 14 | 3.039 896 | 2.30 067 | 3.759 791 | 2.30 129 | 4.480 836 | 2.30 204 | 5.203 250 | 2.30 294 |
| 15 | 3.051 886 | 2.30 067 | 3.771 798 | 2.30 131 | 4.492 864 | 2.30 206 | 5.215 303 | 2.30 296 |
| 16 | 3.063 876 | 2.30 068 | 3.783 806 | 2.30 132 | 4.504 892 | 2.30 207 | 5.227 357 | 2.30 298 |
| 17 | 3.075 867 | 2.30 069 | 3.795 814 | 2.30 133 | 4.516 921 | 2.30 209 | 5.239 411 | 2.30 299 |
| 18 | 3.087 858 | 2.30 070 | 3.807 822 | 2.30 134 | 4.528 951 | 2.30 210 | 5.251 465 | 2.30 301 |
| 19 | 3.099 849 | 2.30 071 | 3.819 831 | 2.30 135 | 4.540 981 | 2.30 212 | 5.263 520 | 2.30 302 |
| 20 | 3.111 840 | 2.30 072 | 3.831 840 | 2.30 136 | 4.553 011 | 2.30 213 | 5.275 575 | 2.30 304 |
| 21 | 3.123 831 | 2.30 073 | 3.843 849 | 2.30 137 | 4.565 042 | 2.30 214 | 5.287 631 | 2.30 306 |
| 22 | 3.135 823 | 2.30 074 | 3.855 859 | 2.30 139 | 4.577 074 | 2.30 216 | 5.299 688 | 2.30 307 |
| 23 | 3.147 815 | 2.30 075 | 3.867 868 | 2.30 140 | 4.589 105 | 2.30 217 | 5.311 745 | 2.30 309 |
| 24 | 3.159 808 | 2.30 076 | 3.879 879 | 2.30 141 | 4.601 137 | 2.30 218 | 5.323 802 | 2.30 310 |
| 25 | 3.171 800 | 2.30 077 | 3.891 889 | 2.30 142 | 4.613 169 | 2.30 220 | 5.335 860 | 2.30 312 |
| 26 | 3.183 793 | 2.30 078 | 3.903 900 | 2.30 143 | 4.625 202 | 2.30 221 | 5.347 918 | 2.30 314 |
| 27 | 3.195 786 | 2.30 079 | 3.915 911 | 2.30 145 | 4.637 234 | 2.30 223 | 5.359 976 | 2.30 315 |
| 28 | 3.207 780 | 2.30 080 | 3.927 923 | 2.30 146 | 4.649 268 | 2.30 224 | 5.372 035 | 2.30 317 |
| 29 | 3.219 773 | 2.30 081 | 3.939 935 | 2.30 147 | 4.661 302 | 2.30 226 | 5.384 095 | 2.30 318 |
| 30 | 3.231 767 | 2.30 082 | 3.951 947 | 2.30 148 | 4.673 336 | 2.30 227 | 5.396 155 | 2.30 320 |
| 31 | 3.243 762 | 2.30 083 | 3.963 960 | 2.30 149 | 4.685 371 | 2.30 228 | 5.408 215 | 2.30 321 |
| 32 | 3.255 757 | 2.30 084 | 3.975 972 | 2.30 150 | 4.697 406 | 2.30 230 | 5.420 276 | 2.30 323 |
| 33 | 3.267 752 | 2.30 085 | 3.987 985 | 2.30 152 | 4.709 441 | 2.30 231 | 5.432 337 | 2.30 325 |
| 34 | 3.279 747 | 2.30 086 | 3.999 999 | 2.30 153 | 4.721 477 | 2.30 233 | 5.444 399 | 2.30 327 |
| 35 | 3.291 742 | 2.30 087 | 4.012 013 | 2.30 154 | 4.733 513 | 2.30 234 | 5.456 461 | 2.30 328 |
| 36 | 3.303 737 | 2.30 088 | 4.024 027 | 2.30 155 | 4.745 550 | 2.30 236 | 5.468 524 | 2.30 330 |
| 37 | 3.315 733 | 2.30 089 | 4.036 041 | 2.30 156 | 4.757 587 | 2.30 237 | 5.480 588 | 2.30 332 |
| 38 | 3.327 729 | 2.30 090 | 4.048 056 | 2.30 158 | 4.769 624 | 2.30 239 | 5.492 651 | 2.30 333 |
| 39 | 3.339 726 | 2.30 091 | 4.060 072 | 2.30 159 | 4.781 662 | 2.30 240 | 5.504 715 | 2.30 335 |
| 40 | 3.351 722 | 2.30 092 | 4.072 087 | 2.30 160 | 4.793 700 | 2.30 242 | 5.516 779 | 2.30 337 |
| 41 | 3.363 719 | 2.30 093 | 4.084 103 | 2.30 161 | 4.805 739 | 2.30 243 | 5.528 844 | 2.30 339 |
| 42 | 3.375 717 | 2.30 094 | 4.096 120 | 2.30 163 | 4.817 778 | 2.30 245 | 5.540 910 | 2.30 340 |
| 43 | 3.387 715 | 2.30 095 | 4.108 137 | 2.30 164 | 4.829 817 | 2.30 246 | 5.552 976 | 2.30 342 |
| 44 | 3.399 713 | 2.30 096 | 4.120 154 | 2.30 165 | 4.841 857 | 2.30 248 | 5.565 043 | 2.30 344 |
| 45 | 3.411 711 | 2.30 097 | 4.132 171 | 2.30 166 | 4.853 898 | 2.30 249 | 5.577 109 | 2.30 345 |
| 46 | 3.423 709 | 2.30 099 | 4.144 189 | 2.30 168 | 4.865 938 | 2.30 251 | 5.589 177 | 2.30 34[illegible] |
| 47 | 3.435 708 | 2.30 100 | 4.156 207 | 2.30 169 | 4.877 979 | 2.30 252 | 5.601 245 | 2.30 349 |
| 48 | 3.447 707 | 2.30 101 | 4.168 226 | 2.30 170 | 4.890 021 | 2.30 254 | 5.613 313 | 2.30 350 |
| 49 | 3.459 707 | 2.30 102 | 4.180 245 | 2.30 172 | 4.902 063 | 2.30 255 | 5.625 381 | 2.30 352 |
| 50 | 3.471 707 | 2.30 103 | 4.192 264 | 2.30 173 | 4.914 105 | 2.30 257 | 5.637 451 | 2.30 354 |
| 51 | 3.483 707 | 2.30 104 | 4.204 283 | 2.30 174 | 4.926 148 | 2.30 258 | 5.649 521 | 2.30 356 |
| 52 | 3.495 707 | 2.30 105 | 4.216 303 | 2.30 175 | 4.938 191 | 2.30 260 | 5.661 590 | 2.30 358 |
| 53 | 3.507 708 | 2.30 106 | 4.228 323 | 2.30 177 | 4.950 234 | 2.30 261 | 5.673 661 | 2.30 359 |
| 54 | 3.519 709 | 2.30 107 | 4.240 344 | 2.30 178 | 4.962 278 | 2.30 263 | 5.685 732 | 2.30 361 |
| 55 | 3.531 710 | 2.30 108 | 4.252 365 | 2.30 179 | 4.974 323 | 2.30 264 | 5.697 804 | 2.30 363 |
| 56 | 3.543 711 | 2.30 110 | 4.264 387 | 2.30 181 | 4.986 368 | 2.30 266 | 5.709 877 | 2.30 365 |
| 57 | 3.555 713 | 2.30 111 | 4.276 409 | 2.30 182 | 4.998 414 | 2.30 267 | 5.721 949 | 2.30 367 |
| 58 | 3.567 715 | 2.30 112 | 4.288 431 | 2.30 183 | 5.010 460 | 2.30 269 | 5.734 022 | 2.30 368 |
| 59 | 3.579 718 | 2.30 113 | 4.300 453 | 2.30 185 | 5.022 506 | 2.30 270 | 5.746 096 | 2.30 3[illegible]0 |
| 60 | 3.591 721 | 2.30 114 | 4.312 476 | 2.30 186 | 5.034 553 | 2.30 272 | 5.758 171 | 2.30 3[illegible]2 |

## Tafel V.

| v | 8° | | 9° | | 10° | | 11° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ |
| 0′ | 5.758 171 | 2.30 372 | 6.483 559 | 2.30 484 | 7.210 942 | 2.30 610 | 7.940 550 | 2.30 750 |
| 1 | 5.770 246 | 2.30 374 | 6.495 665 | 2.30 486 | 7.223 083 | 2.30 612 | 7.952 730 | 2.30 752 |
| 2 | 5.782 321 | 2.30 376 | 6.507 772 | 2.30 488 | 7.235 225 | 2.30 615 | 7.964 912 | 2.30 755 |
| 3 | 5.794 397 | 2.30 377 | 6.519 879 | 2.30 490 | 7.247 369 | 2.30 617 | 7.977 094 | 2.30 757 |
| 4 | 5.806 473 | 2.30 379 | 6.531 988 | 2.30 492 | 7.259 512 | 2.30 619 | 7.989 276 | 2.30 760 |
| 5 | 5.818 549 | 2.30 381 | 6.544 096 | 2.30 494 | 7.271 655 | 2.30 621 | 8.001 459 | 2.30 762 |
| 6 | 5.830 626 | 2.30 383 | 6.556 204 | 2.30 496 | 7.283 799 | 2.30 623 | 8.013 642 | 2.30 764 |
| 7 | 5.842 704 | 2.30 385 | 6.568 313 | 2.30 498 | 7.295 945 | 2.30 625 | 8.025 826 | 2.30 767 |
| 8 | 5.854 782 | 2.30 386 | 6.580 423 | 2.30 500 | 7.308 090 | 2.30 628 | 8.038 011 | 2.30 769 |
| 9 | 5.866 860 | 2.30 388 | 6.592 534 | 2.30 502 | 7.320 236 | 2.30 630 | 8.050 197 | 2.30 772 |
| 10 | 5.878 940 | 2.30 390 | 6.604 645 | 2.30 504 | 7.332 383 | 2.30 632 | 8.062 384 | 2.30 774 |
| 11 | 5.891 020 | 2.30 392 | 6.616 756 | 2.30 506 | 7.344 531 | 2.30 634 | 8.074 571 | 2.30 776 |
| 12 | 5.903 100 | 2.30 394 | 6.628 869 | 2.30 508 | 7.356 678 | 2.30 637 | 8.086 759 | 2.30 779 |
| 13 | 5.915 181 | 2.30 395 | 6.640 982 | 2.30 510 | 7.368 827 | 2.30 639 | 8.098 948 | 2.30 781 |
| 14 | 5.927 262 | 2.30 397 | 6.653 095 | 2.30 512 | 7.380 977 | 2.30 641 | 8.111 137 | 2.30 784 |
| 15 | 5.939 344 | 2.30 399 | 6.665 209 | 2.30 514 | 7.393 127 | 2.30 644 | 8.123 327 | 2.30 786 |
| 16 | 5.951 426 | 2.30 401 | 6.677 323 | 2.30 516 | 7.405 277 | 2.30 646 | 8.135 518 | 2.30 789 |
| 17 | 5.963 508 | 2.30 403 | 6.689 438 | 2.30 518 | 7.417 428 | 2.30 648 | 8.147 709 | 2.30 791 |
| 18 | 5.975 591 | 2.30 404 | 6.701 554 | 2.30 520 | 7.429 580 | 2.30 651 | 8.159 901 | 2.30 794 |
| 19 | 5.987 675 | 2.30 406 | 6.713 669 | 2.30 522 | 7.441 733 | 2.30 653 | 8.172 094 | 2.30 796 |
| 20 | 5.999 759 | 2.30 408 | 6.725 786 | 2.30 524 | 7.453 886 | 2.30 655 | 8.184 288 | 2.30 799 |
| 21 | 6.011 844 | 2.30 410 | 6.737 904 | 2.30 526 | 7.466 040 | 2.30 657 | 8.196 482 | 2.30 801 |
| 22 | 6.023 929 | 2.30 412 | 6.750 022 | 2.30 528 | 7.478 194 | 2.30 660 | 8.208 677 | 2.30 804 |
| 23 | 6.036 015 | 2.30 413 | 6.762 140 | 2.30 530 | 7.490 350 | 2.30 662 | 8.220 872 | 2.30 806 |
| 24 | 6.048 101 | 2.30 415 | 6.774 260 | 2.30 532 | 7.502 505 | 2.30 664 | 8.233 068 | 2.30 809 |
| 25 | 6.060 188 | 2.30 417 | 6.786 380 | 2.30 534 | 7.514 661 | 2.30 667 | 8.245 265 | 2.30 811 |
| 26 | 6.072 275 | 2.30 419 | 6.798 500 | 2.30 537 | 7.526 819 | 2.30 669 | 8.257 463 | 2.30 814 |
| 27 | 6.084 363 | 2.30 421 | 6.810 621 | 2.30 539 | 7.538 977 | 2.30 671 | 8.269 662 | 2.30 816 |
| 28 | 6.096 451 | 2.30 422 | 6.822 743 | 2.30 541 | 7.551 135 | 2.30 674 | 8.281 861 | 2.30 819 |
| 29 | 6.108 539 | 2.30 424 | 6.834 865 | 2.30 543 | 7.563 293 | 2.30 676 | 8.294 060 | 2.30 821 |
| 30 | 6.120 629 | 2.30 426 | 6.846 987 | 2.30 545 | 7.575 453 | 2.30 678 | 8.306 261 | 2.30 824 |
| 31 | 6.132 720 | 2.30 428 | 6.859 109 | 2.30 547 | 7.587 614 | 2.30 680 | 8.318 462 | 2.30 827 |
| 32 | 6.144 810 | 2.30 430 | 6.871 233 | 2.30 549 | 7.599 774 | 2.30 683 | 8.330 664 | 2.30 829 |
| 33 | 6.156 901 | 2.30 432 | 6.883 357 | 2.30 551 | 7.611 936 | 2.30 685 | 8.342 866 | 2.30 832 |
| 34 | 6.168 993 | 2.30 434 | 6.895 483 | 2.30 553 | 7.624 098 | 2.30 688 | 8.355 069 | 2.30 834 |
| 35 | 6.181 085 | 2.30 436 | 6.907 609 | 2.30 555 | 7.636 261 | 2.30 690 | 8.367 274 | 2.30 837 |
| 36 | 6.193 178 | 2.30 437 | 6.919 735 | 2.30 558 | 7.648 425 | 2.30 692 | 8.379 479 | 2.30 840 |
| 37 | 6.205 270 | 2.30 439 | 6.931 861 | 2.30 560 | 7.660 589 | 2.30 695 | 8.391 684 | 2.30 842 |
| 38 | 6.217 364 | 2.30 441 | 6.943 988 | 2.30 562 | 7.672 754 | 2.30 697 | 8.403 891 | 2.30 845 |
| 39 | 6.229 458 | 2.30 443 | 6.956 116 | 2.30 564 | 7.684 919 | 2.30 700 | 8.416 098 | 2.30 847 |
| 40 | 6.241 553 | 2.30 445 | 6.968 245 | 2.30 566 | 7.697 086 | 2.30 702 | 8.428 306 | 2.30 850 |
| 41 | 6.253 648 | 2.30 447 | 6.980 374 | 2.30 568 | 7.709 253 | 2.30 704 | 8.440 514 | 2.30 853 |
| 42 | 6.265 743 | 2.30 449 | 6.992 504 | 2.30 570 | 7.721 421 | 2.30 707 | 8.452 723 | 2.30 855 |
| 43 | 6.277 839 | 2.30 451 | 7.004 634 | 2.30 573 | 7.733 589 | 2.30 709 | 8.464 934 | 2.30 858 |
| 44 | 6.289 937 | 2.30 453 | 7.016 766 | 2.30 575 | 7.745 758 | 2.30 712 | 8.477 145 | 2.30 860 |
| 45 | 6.302 034 | 2.30 454 | 7.028 897 | 2.30 577 | 7.757 927 | 2.30 714 | 8.489 356 | 2.30 863 |
| 46 | 6.314 132 | 2.30 456 | 7.041 029 | 2.30 579 | 7.770 098 | 2.30 716 | 8.501 568 | 2.30 866 |
| 47 | 6.326 230 | 2.30 458 | 7.053 162 | 2.30 581 | 7.782 268 | 2.30 719 | 8.513 780 | 2.30 868 |
| 48 | 6.338 329 | 2.30 460 | 7.065 295 | 2.30 584 | 7.794 440 | 2.30 721 | 8.525 994 | 2.30 871 |
| 49 | 6.350 429 | 2.30 462 | 7.077 429 | 2.30 586 | 7.806 612 | 2.30 724 | 8.538 208 | 2.30 873 |
| 50 | 6.362 528 | 2.30 464 | 7.089 564 | 2.30 588 | 7.818 785 | 2.30 726 | 8.550 423 | 2.30 876 |
| 51 | 6.374 628 | 2.30 466 | 7.101 699 | 2.30 590 | 7.830 959 | 2.30 728 | 8.562 639 | 2.30 879 |
| 52 | 6.386 730 | 2.30 468 | 7.113 835 | 2.30 592 | 7.843 133 | 2.30 731 | 8.574 855 | 2.30 881 |
| 53 | 6.398 832 | 2.30 470 | 7.125 972 | 2.30 595 | 7.855 308 | 2.30 733 | 8.587 073 | 2.30 884 |
| 54 | 6.410 934 | 2.30 472 | 7.138 108 | 2.30 597 | 7.867 484 | 2.30 736 | 8.599 291 | 2.30 886 |
| 55 | 6.423 037 | 2.30 474 | 7.150 246 | 2.30 599 | 7.879 660 | 2.30 738 | 8.611 510 | 2.30 889 |
| 56 | 6.435 141 | 2.30 476 | 7.162 384 | 2.30 601 | 7.891 837 | 2.30 740 | 8.623 729 | 2.30 892 |
| 57 | 6.447 245 | 2.30 478 | 7.174 522 | 2.30 603 | 7.904 015 | 2.30 743 | 8.635 950 | 2.30 894 |
| 58 | 6.459 348 | 2.30 480 | 7.186 662 | 2.30 606 | 7.916 193 | 2.30 745 | 8.648 171 | 2.30 897 |
| 59 | 6.471 453 | 2.30 482 | 7.198 802 | 2.30 608 | 7.928 371 | 2.30 748 | 8.660 392 | 2.30 899 |
| 60 | 6.483 559 | 2.30 484 | 7.210 942 | 2.30 610 | 7.940 550 | 2.30 750 | 8.672 615 | 2.30 902 |

## Tafel V.

| v | 12° | | 13° | | 14° | | 15° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ |
| 0′ | 8.672 615 | 2.30 902 | 9.407 369 | 2.31 068 | 10.145 054 | 2.31 248 | 10.885 905 | 2.31 440 |
| 1 | 8.684 838 | 2.30 905 | 9.419 639 | 2.31 071 | 10.157 375 | 2.31 251 | 10.898 282 | 2.31 443 |
| 2 | 8.697 062 | 2.30 907 | 9.431 911 | 2.31 074 | 10.169 697 | 2.31 254 | 10.910 659 | 2.31 447 |
| 3 | 8.709 287 | 2.30 910 | 9.444 182 | 2.31 077 | 10.182 019 | 2.31 257 | 10.923 036 | 2.31 451 |
| 4 | 8.721 513 | 2.30 913 | 9.456 455 | 2.31 080 | 10.194 343 | 2.31 260 | 10.935 414 | 2.31 454 |
| 5 | 8.733 739 | 2.30 915 | 9.468 729 | 2.31 082 | 10.206 667 | 2.31 264 | 10.947 794 | 2.31 457 |
| 6 | 8.745 966 | 2.30 918 | 9.481 002 | 2.31 085 | 10.218 992 | 2.31 267 | 10.960 175 | 2.31 461 |
| 7 | 8.758 193 | 2.30 921 | 9.493 277 | 2.31 088 | 10.231 319 | 2.31 270 | 10.972 556 | 2.31 464 |
| 8 | 8.770 421 | 2.30 923 | 9.505 553 | 2.31 091 | 10.243 646 | 2.31 273 | 10.984 939 | 2.31 468 |
| 9 | 8.782 650 | 2.30 926 | 9.517 830 | 2.31 094 | 10.255 974 | 2.31 276 | 10.997 322 | 2.31 471 |
| 10 | 8.794 880 | 2.30 929 | 9.530 107 | 2.31 097 | 10.268 303 | 2.31 279 | 11.009 706 | 2.31 474 |
| 11 | 8.807 111 | 2.30 932 | 9.542 385 | 2.31 100 | 10.280 633 | 2.31 282 | 11.022 092 | 2.31 477 |
| 12 | 8.819 343 | 2.30 935 | 9.554 664 | 2.31 103 | 10.292 964 | 2.31 285 | 11.034 478 | 2.31 481 |
| 13 | 8.831 575 | 2.30 937 | 9.566 945 | 2.31 106 | 10.305 295 | 2.31 288 | 11.046 865 | 2.31 484 |
| 14 | 8.843 809 | 2.30 940 | 9.579 226 | 2.31 109 | 10.317 628 | 2.31 291 | 11.059 253 | 2.31 488 |
| 15 | 8.856 042 | 2.30 943 | 9.591 507 | 2.31 111 | 10.329 961 | 2.31 295 | 11.071 642 | 2.31 491 |
| 16 | 8.868 277 | 2.30 945 | 9.603 790 | 2.31 114 | 10.342 295 | 2.31 298 | 11.084 032 | 2.31 494 |
| 17 | 8.880 512 | 2.30 948 | 9.616 073 | 2.31 117 | 10.354 630 | 2.31 301 | 11.096 424 | 2.31 498 |
| 18 | 8.892 748 | 2.30 951 | 9.628 357 | 2.31 120 | 10.366 966 | 2.31 304 | 11.108 816 | 2.31 501 |
| 19 | 8.904 985 | 2.30 953 | 9.640 641 | 2.31 123 | 10.379 303 | 2.31 307 | 11.121 209 | 2.31 505 |
| 20 | 8.917 222 | 2.30 956 | 9.652 927 | 2.31 126 | 10.391 641 | 2.31 310 | 11.133 602 | 2.31 508 |
| 21 | 8.929 461 | 2.30 959 | 9.665 214 | 2.31 129 | 10.403 980 | 2.31 313 | 11.145 997 | 2.31 511 |
| 22 | 8.941 700 | 2.30 961 | 9.677 502 | 2.31 132 | 10.416 319 | 2.31 317 | 11.158 393 | 2.31 515 |
| 23 | 8.953 940 | 2.30 964 | 9.689 790 | 2.31 135 | 10.428 660 | 2.31 320 | 11.170 790 | 2.31 518 |
| 24 | 8.966 181 | 2.30 967 | 9.702 079 | 2.31 138 | 10.441 001 | 2.31 323 | 11.183 188 | 2.31 522 |
| 25 | 8.978 422 | 2.30 970 | 9.714 369 | 2.31 141 | 10.453 344 | 2.31 326 | 11.195 586 | 2.31 525 |
| 26 | 8.990 664 | 2.30 972 | 9.726 659 | 2.31 144 | 10.465 687 | 2.31 329 | 11.207 987 | 2.31 529 |
| 27 | 9.002 907 | 2.30 975 | 9.738 951 | 2.31 147 | 10.478 031 | 2.31 333 | 11.220 388 | 2.31 532 |
| 28 | 9.015 151 | 2.30 978 | 9.751 244 | 2.31 150 | 10.490 376 | 2.31 336 | 11.232 790 | 2.31 536 |
| 29 | 9.027 395 | 2.30 980 | 9.763 537 | 2.31 153 | 10.502 722 | 2.31 339 | 11.245 192 | 2.31 539 |
| 30 | 9.039 640 | 2.30 983 | 9.775 831 | 2.31 156 | 10.515 068 | 2.31 342 | 11.257 596 | 2.31 543 |
| 31 | 9.051 886 | 2.30 986 | 9.788 125 | 2.31 159 | 10.527 416 | 2.31 345 | 11.270 001 | 2.31 546 |
| 32 | 9.064 133 | 2.30 989 | 9.800 420 | 2.31 162 | 10.539 765 | 2.31 349 | 11.282 407 | 2.31 550 |
| 33 | 9.076 381 | 2.30 991 | 9.812 717 | 2.31 165 | 10.552 115 | 2.31 352 | 11.294 813 | 2.31 553 |
| 34 | 9.088 630 | 2.30 994 | 9.825 015 | 2.31 168 | 10.564 465 | 2.31 355 | 11.307 221 | 2.31 55[illegible] |
| 35 | 9.100 880 | 2.30 997 | 9.837 314 | 2.31 171 | 10.576 816 | 2.31 358 | 11.319 630 | 2.31 560 |
| 36 | 9.113 130 | 2.31 000 | 9.849 613 | 2.31 174 | 10.589 168 | 2.31 361 | 11.332 040 | 2.31 563 |
| 37 | 9.125 380 | 2.31 003 | 9.861 913 | 2.31 177 | 10.601 521 | 2.31 365 | 11.344 451 | 2.31 567 |
| 38 | 9.137 631 | 2.31 005 | 9.874 214 | 2.31 180 | 10.613 875 | 2.31 368 | 11.356 862 | 2.31 570 |
| 39 | 9.149 884 | 2.31 008 | 9.886 516 | 2.31 183 | 10.626 230 | 2.31 371 | 11.369 275 | 2.31 574 |
| 40 | 9.162 137 | 2.31 011 | 9.898 819 | 2.31 186 | 10.638 587 | 2.31 374 | 11.381 688 | 2.31 57[illegible] |
| 41 | 9.174 391 | 2.31 014 | 9.911 123 | 2.31 189 | 10.650 944 | 2.31 377 | 11.394 103 | 2.31 580 |
| 42 | 9.186 646 | 2.31 017 | 9.923 427 | 2.31 192 | 10.663 302 | 2.31 381 | 11.406 518 | 2.31 584 |
| 43 | 9.198 902 | 2.31 019 | 9.935 733 | 2.31 195 | 10.675 661 | 2.31 384 | 11.418 935 | 2.31 587 |
| 44 | 9.211 159 | 2.31 022 | 9.948 039 | 2.31 198 | 10.688 021 | 2.31 387 | 11.431 353 | 2.31 591 |
| 45 | 9.223 416 | 2.31 025 | 9.960 345 | 2.31 201 | 10.700 381 | 2.31 391 | 11.443 771 | 2.31 594 |
| 46 | 9.235 674 | 2.31 028 | 9.972 653 | 2.31 204 | 10.712 743 | 2.31 394 | 11.456 191 | 2.31 598 |
| 47 | 9.247 933 | 2.31 030 | 9.984 961 | 2.31 208 | 10.725 106 | 2.31 397 | 11.468 611 | 2.31 601 |
| 48 | 9.260 192 | 2.31 033 | 9.997 271 | 2.31 211 | 10.737 470 | 2.31 401 | 11.481 033 | 2.31 605 |
| 49 | 9.272 452 | 2.31 036 | 10.009 581 | 2.31 214 | 10.749 834 | 2.31 404 | 11.493 455 | 2.31 608 |
| 50 | 9.284 714 | 2.31 039 | 10.021 893 | 2.31 217 | 10.762 199 | 2.31 407 | 11.505 879 | 2.31 612 |
| 51 | 9.296 976 | 2.31 042 | 10.034 205 | 2.31 220 | 10.774 565 | 2.31 410 | 11.518 304 | 2.31 615 |
| 52 | 9.309 238 | 2.31 045 | 10.046 518 | 2.31 223 | 10.786 933 | 2.31 414 | 11.530 729 | 2.31 619 |
| 53 | 9.321 502 | 2.31 048 | 10.058 833 | 2.31 226 | 10.799 302 | 2.31 417 | 11.543 156 | 2.31 622 |
| 54 | 9.333 767 | 2.31 050 | 10.071 147 | 2.31 229 | 10.811 671 | 2.31 420 | 11.555 583 | 2.31 626 |
| 55 | 9.346 032 | 2.31 053 | 10.083 462 | 2.31 232 | 10.824 041 | 2.31 423 | 11.568 012 | 2.31 629 |
| 56 | 9.358 298 | 2.31 056 | 10.095 778 | 2.31 236 | 10.836 412 | 2.31 427 | 11.580 442 | 2.31 633 |
| 57 | 9.370 564 | 2.31 059 | 10.108 096 | 2.31 239 | 10.848 784 | 2.31 430 | 11.592 872 | 2.31 636 |
| 58 | 9.382 832 | 2.31 062 | 10.120 414 | 2.31 242 | 10.861 157 | 2.31 433 | 11.605 304 | 2.31 640 |
| 59 | 9.395 100 | 2.31 065 | 10.132 733 | 2.31 245 | 10.873 530 | 2.31 437 | 11.617 737 | 2.31 643 |
| 60 | 9.407 369 | 2.31 068 | 10.145 054 | 2.31 248 | 10.885 905 | 2.31 440 | 11.630 171 | 2.31 64[illegible] |

## Tafel V.

| v | 16° | | 17° | | 18° | | 19° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ |
| 0′ | 11.630 171 | 2.31 647 | 12.378 095 | 2.31 867 | 13.129 932 | 2.32 100 | 13.885 938 | 2.32 347 |
| 1 | 11.642 606 | 2.31 650 | 12.390 593 | 2.31 871 | 13.142 497 | 2.32 104 | 13.898 576 | 2.32 351 |
| 2 | 11.655 041 | 2.31 654 | 12.403 092 | 2.31 875 | 13.155 064 | 2.32 108 | 13.911 214 | 2.32 356 |
| 3 | 11.667 478 | 2.31 657 | 12.415 592 | 2.31 878 | 13.167 631 | 2.32 112 | 13.923 853 | 2.32 360 |
| 4 | 11.679 916 | 2.31 661 | 12.428 093 | 2.31 882 | 13.180 200 | 2.32 116 | 13.936 493 | 2.32 364 |
| 5 | 11.692 355 | 2.31 664 | 12.440 595 | 2.31 886 | 13.192 770 | 2.32 120 | 13.949 135 | 2.32 369 |
| 6 | 11.704 795 | 2.31 668 | 12.453 098 | 2.31 890 | 13.205 341 | 2.32 124 | 13.961 778 | 2.32 373 |
| 7 | 11.717 236 | 2.31 672 | 12.465 603 | 2.31 894 | 13.217 913 | 2.32 128 | 13.974 423 | 2.32 377 |
| 8 | 11.729 677 | 2.31 675 | 12.478 108 | 2.31 897 | 13.230 487 | 2.32 132 | 13.987 069 | 2.32 382 |
| 9 | 11.742 120 | 2.31 679 | 12.490 615 | 2.31 901 | 13.243 061 | 2.32 136 | 13.999 715 | 2.32 386 |
| 10 | 11.754 564 | 2.31 683 | 12.503 122 | 2.31 905 | 13.255 637 | 2.32 140 | 14.012 363 | 2.32 390 |
| 11 | 11.767 009 | 2.31 686 | 12.515 631 | 2.31 909 | 13.268 213 | 2.32 144 | 14.025 012 | 2.32 394 |
| 12 | 11.779 455 | 2.31 690 | 12.528 141 | 2.31 912 | 13.280 792 | 2.32 148 | 14.037 663 | 2.32 399 |
| 13 | 11.791 902 | 2.31 693 | 12.540 652 | 2.31 916 | 13.293 371 | 2.32 152 | 14.050 314 | 2.32 403 |
| 14 | 11.804 350 | 2.31 697 | 12.553 164 | 2.31 920 | 13.305 952 | 2.32 156 | 14.062 967 | 2.32 407 |
| 15 | 11.816 799 | 2.31 701 | 12.565 677 | 2.31 924 | 13.318 533 | 2.32 161 | 14.075 621 | 2.32 412 |
| 16 | 11.829 249 | 2.31 704 | 12.578 191 | 2.31 928 | 13.331 116 | 2.32 165 | 14.088 277 | 2.32 416 |
| 17 | 11.841 700 | 2.31 708 | 12.590 707 | 2.31 931 | 13.343 700 | 2.32 169 | 14.100 934 | 2.32 420 |
| 18 | 11.854 152 | 2.31 711 | 12.603 223 | 2.31 935 | 13.356 285 | 2.32 173 | 14.113 592 | 2.32 424 |
| 19 | 11.866 605 | 2.31 715 | 12.615 741 | 2.31 939 | 13.368 871 | 2.32 177 | 14.126 251 | 2.32 429 |
| 20 | 11.879 059 | 2.31 719 | 12.628 259 | 2.31 943 | 13.381 458 | 2.32 181 | 14.138 911 | 2.32 433 |
| 21 | 11.891 515 | 2.31 722 | 12.640 779 | 2.31 947 | 13.394 046 | 2.32 185 | 14.151 573 | 2.32 437 |
| 22 | 11.903 972 | 2.31 726 | 12.653 300 | 2.31 951 | 13.406 636 | 2.32 189 | 14.164 237 | 2.32 442 |
| 23 | 11.916 429 | 2.31 730 | 12.665 822 | 2.31 955 | 13.419 226 | 2.32 193 | 14.176 901 | 2.32 446 |
| 24 | 11.928 887 | 2.31 733 | 12.678 345 | 2.31 959 | 13.431 820 | 2.32 197 | 14.189 566 | 2.32 450 |
| 25 | 11.941 346 | 2.31 737 | 12.690 870 | 2.31 962 | 13.444 413 | 2.32 202 | 14.202 233 | 2.32 454 |
| 26 | 11.953 807 | 2.31 740 | 12.703 395 | 2.31 966 | 13.457 007 | 2.32 206 | 14.214 901 | 2.32 459 |
| 27 | 11.966 268 | 2.31 744 | 12.715 922 | 2.31 970 | 13.469 603 | 2.32 210 | 14.227 571 | 2.32 463 |
| 28 | 11.978 731 | 2.31 748 | 12.728 450 | 2.31 974 | 13.482 200 | 2.32 214 | 14.240 241 | 2.32 467 |
| 29 | 11.991 195 | 2.31 751 | 12.740 978 | 2.31 978 | 13.494 798 | 2.32 218 | 14.252 913 | 2.32 472 |
| 30 | 12.003 659 | 2.31 755 | 12.753 508 | 2.31 982 | 13.507 397 | 2.32 222 | 14.265 586 | 2.32 476 |
| 31 | 12.016 125 | 2.31 759 | 12.766 039 | 2.31 986 | 13.519 998 | 2.32 226 | 14.278 260 | 2.32 480 |
| 32 | 12.028 592 | 2.31 762 | 12.778 571 | 2.31 990 | 13.532 600 | 2.32 230 | 14.290 936 | 2.32 485 |
| 33 | 12.041 060 | 2.31 766 | 12.791 104 | 2.31 994 | 13.545 203 | 2.32 234 | 14.303 613 | 2.32 489 |
| 34 | 12.053 529 | 2.31 770 | 12.803 638 | 2.31 998 | 13.557 806 | 2.32 238 | 14.316 291 | 2.32 494 |
| 35 | 12.065 999 | 2.31 773 | 12.816 174 | 2.32 001 | 13.570 412 | 2.32 243 | 14.328 970 | 2.32 498 |
| 36 | 12.078 470 | 2.31 777 | 12.828 711 | 2.32 005 | 13.583 019 | 2.32 247 | 14.341 651 | 2.32 502 |
| 37 | 12.090 942 | 2.31 781 | 12.841 249 | 2.32 009 | 13.595 627 | 2.32 251 | 14.354 333 | 2.32 507 |
| 38 | 12.103 416 | 2.31 784 | 12.853 788 | 2.32 013 | 13.608 237 | 2.32 255 | 14.367 016 | 2.32 511 |
| 39 | 12.115 890 | 2.31 788 | 12.866 328 | 2.32 017 | 13.620 847 | 2.32 259 | 14.379 700 | 2.32 516 |
| 40 | 12.128 365 | 2.31 792 | 12.878 869 | 2.32 021 | 13.633 457 | 2.32 263 | 14.392 386 | 2.32 520 |
| 41 | 12.140 842 | 2.31 796 | 12.891 411 | 2.32 025 | 13.646 070 | 2.32 267 | 14.405 073 | 2.32 524 |
| 42 | 12.153 319 | 2.31 799 | 12.903 955 | 2.32 029 | 13.658 684 | 2.32 271 | 14.417 762 | 2.32 529 |
| 43 | 12.165 798 | 2.31 803 | 12.916 499 | 2.32 033 | 13.671 299 | 2.32 276 | 14.430 452 | 2.32 533 |
| 44 | 12.178 277 | 2.31 807 | 12.929 045 | 2.32 037 | 13.683 914 | 2.32 280 | 14.443 143 | 2.32 537 |
| 45 | 12.190 757 | 2.31 811 | 12.941 592 | 2.32 040 | 13.696 532 | 2.32 284 | 14.455 835 | 2.32 541 |
| 46 | 12.203 239 | 2.31 814 | 12.954 140 | 2.32 044 | 13.709 151 | 2.32 288 | 14.468 529 | 2.32 546 |
| 47 | 12.215 722 | 2.31 818 | 12.966 689 | 2.32 048 | 13.721 770 | 2.32 293 | 14.481 223 | 2.32 550 |
| 48 | 12.228 206 | 2.31 821 | 12.979 240 | 2.32 052 | 13.734 392 | 2.32 297 | 14.493 919 | 2.32 555 |
| 49 | 12.240 690 | 2.31 825 | 12.991 791 | 2.32 056 | 13.747 014 | 2.32 301 | 14.506 616 | 2.32 560 |
| 50 | 12.253 176 | 2.31 829 | 13.004 343 | 2.32 060 | 13.759 637 | 2.32 305 | 14.519 315 | 2.32 564 |
| 51 | 12.265 664 | 2.31 833 | 13.016 897 | 2.32 064 | 13.772 262 | 2.32 309 | 14.532 015 | 2.32 568 |
| 52 | 12.278 151 | 2.31 836 | 13.029 452 | 2.32 068 | 13.784 888 | 2.32 314 | 14.544 716 | 2.32 573 |
| 53 | 12.290 641 | 2.31 840 | 13.042 008 | 2.32 072 | 13.797 515 | 2.32 318 | 14.557 419 | 2.32 577 |
| 54 | 12.303 131 | 2.31 844 | 13.054 565 | 2.32 076 | 13.810 143 | 2.32 322 | 14.570 122 | 2.32 582 |
| 55 | 12.315 622 | 2.31 848 | 13.067 123 | 2.32 080 | 13.822 772 | 2.32 326 | 14.582 827 | 2.32 586 |
| 56 | 12.328 115 | 2.31 852 | 13.079 683 | 2.32 084 | 13.835 403 | 2.32 330 | 14.595 534 | 2.32 590 |
| 57 | 12.340 608 | 2.31 856 | 13.092 244 | 2.32 088 | 13.848 035 | 2.32 335 | 14.608 242 | 2.32 595 |
| 58 | 12.353 103 | 2.31 859 | 13.104 805 | 2.32 092 | 13.860 669 | 2.32 339 | 14.620 951 | 2.32 599 |
| 59 | 12.365 598 | 2.31 863 | 13.117 368 | 2.32 096 | 13.873 303 | 2.32 343 | 14.633 661 | 2.32 604 |
| 60 | 12.378 095 | 2.31 867 | 13.129 932 | 2.32 100 | 13.885 938 | 2.32 347 | 14.646 373 | 2.32 608 |

## Tafel V.

| v | 20° | | 21° | | 22° | | 23° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ | *M* | log Diff. 1″ |
| 0′ | 14.646 373 | 2.32 608 | 15.411 503 | 2.32 882 | 16.181 598 | 2.33 169 | 16.956 937 | 2.33 471 |
| 1 | 14.659 086 | 2.32 612 | 15.424 296 | 2.32 887 | 16.194 477 | 2.33 174 | 16.969 906 | 2.33 476 |
| 2 | 14.671 801 | 2.32 617 | 15.437 091 | 2.32 891 | 16.207 357 | 2.33 179 | 16.982 876 | 2.33 481 |
| 3 | 14.684 516 | 2.32 621 | 15.449 887 | 2.32 896 | 16.220 239 | 2.33 184 | 16.995 847 | 2.33 487 |
| 4 | 14.697 233 | 2.32 626 | 15.462 685 | 2.32 901 | 16.233 122 | 2.33 189 | 17.008 820 | 2.33 492 |
| 5 | 14.709 951 | 2.32 630 | 15.475 484 | 2.32 906 | 16.246 006 | 2.33 193 | 17.021 794 | 2.33 497 |
| 6 | 14.722 670 | 2.32 635 | 15.488 284 | 2.32 910 | 16.258 892 | 2.33 198 | 17.034 770 | 2.33 502 |
| 7 | 14.735 391 | 2.32 639 | 15.501 086 | 2.32 915 | 16.271 779 | 2.33 203 | 17.047 748 | 2.33 507 |
| 8 | 14.748 113 | 2.32 644 | 15.513 890 | 2.32 919 | 16.284 668 | 2.33 208 | 17.060 726 | 2.33 513 |
| 9 | 14.760 837 | 2.32 648 | 15.526 694 | 2.32 924 | 16.297 558 | 2.33 213 | 17.073 707 | 2.33 518 |
| 10 | 14.773 561 | 2.32 653 | 15.539 500 | 2.32 929 | 16.310 450 | 2.33 218 | 17.086 690 | 2.33 523 |
| 11 | 14.786 288 | 2.32 657 | 15.552 308 | 2.32 933 | 16.323 343 | 2.33 223 | 17.099 674 | 2.33 528 |
| 12 | 14.799 015 | 2.32 662 | 15.565 116 | 2.32 938 | 16.336 238 | 2.33 228 | 17.112 659 | 2.33 534 |
| 13 | 14.811 744 | 2.32 666 | 15.577 926 | 2.32 943 | 16.349 135 | 2.33 233 | 17.125 646 | 2.33 539 |
| 14 | 14.824 473 | 2.32 671 | 15.590 737 | 2.32 947 | 16.362 032 | 2.33 238 | 17.138 634 | 2.33 544 |
| 15 | 14.837 205 | 2.32 675 | 15.603 550 | 2.32 952 | 16.374 930 | 2.33 243 | 17.151 624 | 2.33 549 |
| 16 | 14.849 938 | 2.32 680 | 15.616 364 | 2.32 957 | 16.387 831 | 2.33 248 | 17.164 616 | 2.33 554 |
| 17 | 14.862 672 | 2.32 684 | 15.629 181 | 2.32 962 | 16.400 733 | 2.33 253 | 17.177 609 | 2.33 559 |
| 18 | 14.875 407 | 2.32 689 | 15.641 998 | 2.32 966 | 16.413 636 | 2.33 258 | 17.190 604 | 2.33 565 |
| 19 | 14.888 143 | 2.32 693 | 15.654 816 | 2.32 971 | 16.426 541 | 2.33 263 | 17.203 600 | 2.33 570 |
| 20 | 14.900 881 | 2.32 698 | 15.667 636 | 2.32 976 | 16.439 448 | 2.33 268 | 17.216 597 | 2.33 575 |
| 21 | 14.913 620 | 2.32 702 | 15.680 458 | 2.32 981 | 16.452 356 | 2.33 273 | 17.229 597 | 2.33 580 |
| 22 | 14.926 360 | 2.32 707 | 15.693 281 | 2.32 985 | 16.465 265 | 2.33 278 | 17.242 598 | 2.33 586 |
| 23 | 14.939 103 | 2.32 711 | 15.706 105 | 2.32 990 | 16.478 176 | 2.33 283 | 17.255 600 | 2.33 591 |
| 24 | 14.951 846 | 2.32 716 | 15.718 930 | 2.32 995 | 16.491 088 | 2.33 288 | 17.268 604 | 2.33 596 |
| 25 | 14.964 591 | 2.32 720 | 15.731 757 | 2.33 000 | 16.504 002 | 2.33 293 | 17.281 610 | 2.33 601 |
| 26 | 14.977 337 | 2.32 725 | 15.744 586 | 2.33 005 | 16.516 918 | 2.33 298 | 17.294 618 | 2.33 606 |
| 27 | 14.990 085 | 2.32 729 | 15.757 415 | 2.33 010 | 16.529 835 | 2.33 303 | 17.307 627 | 2.33 612 |
| 28 | 15.002 833 | 2.32 734 | 15.770 247 | 2.33 014 | 16.542 754 | 2.33 308 | 17.320 638 | 2.33 617 |
| 29 | 15.015 583 | 2.32 738 | 15.783 079 | 2.33 019 | 16.555 673 | 2.33 313 | 17.333 649 | 2.33 622 |
| 30 | 15.028 334 | 2.32 743 | 15.795 913 | 2.33 024 | 16.568 594 | 2.33 318 | 17.346 662 | 2.33 627 |
| 31 | 15.041 087 | 2.32 748 | 15.808 749 | 2.33 029 | 16.581 517 | 2.33 323 | 17.359 678 | 2.33 632 |
| 32 | 15.053 841 | 2.32 752 | 15.821 586 | 2.33 034 | 16.594 442 | 2.33 328 | 17.372 694 | 2.33 638 |
| 33 | 15.066 597 | 2.32 757 | 15.834 424 | 2.33 039 | 16.607 367 | 2.33 333 | 17.385 712 | 2.33 643 |
| 34 | 15.079 353 | 2.32 761 | 15.847 264 | 2.33 043 | 16.620 295 | 2.33 338 | 17.398 732 | 2.33 648 |
| 35 | 15.092 111 | 2.32 766 | 15.860 105 | 2.33 048 | 16.633 223 | 2.33 344 | 17.411 753 | 2.33 653 |
| 36 | 15.104 870 | 2.32 771 | 15.872 948 | 2.33 053 | 16.646 154 | 2.33 349 | 17.424 776 | 2.33 659 |
| 37 | 15.117 631 | 2.32 775 | 15.885 792 | 2.33 058 | 16.659 086 | 2.33 354 | 17.437 801 | 2.33 664 |
| 38 | 15.130 393 | 2.32 780 | 15.898 637 | 2.33 063 | 16.672 020 | 2.33 359 | 17.450 827 | 2.33 669 |
| 39 | 15.143 157 | 2.32 784 | 15.911 483 | 2.33 067 | 16.684 954 | 2.33 364 | 17.463 854 | 2.33 675 |
| 40 | 15.155 921 | 2.32 789 | 15.924 332 | 2.33 072 | 16.697 891 | 2.33 369 | 17.476 883 | 2.33 680 |
| 41 | 15.168 687 | 2.32 794 | 15.937 181 | 2.33 077 | 16.710 829 | 2.33 374 | 17.489 914 | 2.33 685 |
| 42 | 15.181 455 | 2.32 798 | 15.950 033 | 2.33 081 | 16.723 768 | 2.33 379 | 17.502 947 | 2.33 691 |
| 43 | 15.194 224 | 2.32 803 | 15.962 885 | 2.33 086 | 16.736 710 | 2.33 384 | 17.515 981 | 2.33 696 |
| 44 | 15.206 994 | 2.32 807 | 15.975 739 | 2.33 091 | 16.749 652 | 2.33 389 | 17.529 017 | 2.33 701 |
| 45 | 15.219 765 | 2.32 812 | 15.988 594 | 2.33 096 | 16.762 595 | 2.33 395 | 17.542 054 | 2.33 707 |
| 46 | 15.232 538 | 2.32 817 | 16.001 451 | 2.33 101 | 16.775 541 | 2.33 400 | 17.555 093 | 2.33 712 |
| 47 | 15.245 313 | 2.32 821 | 16.014 310 | 2.33 105 | 16.788 488 | 2.33 405 | 17.568 133 | 2.33 717 |
| 48 | 15.258 088 | 2.32 826 | 16.027 169 | 2.33 110 | 16.801 437 | 2.33 410 | 17.581 175 | 2.33 723 |
| 49 | 15.270 865 | 2.32 830 | 16.040 030 | 2.33 115 | 16.814 387 | 2.33 415 | 17.594 218 | 2.33 728 |
| 50 | 15.283 644 | 2.32 835 | 16.052 893 | 2.33 120 | 16.827 338 | 2.33 420 | 17.607 263 | 2.33 733 |
| 51 | 15.296 423 | 2.32 840 | 16.065 757 | 2.33 125 | 16.840 291 | 2.33 425 | 17.620 309 | 2.33 738 |
| 52 | 15.309 205 | 2.32 844 | 16.078 622 | 2.33 130 | 16.853 246 | 2.33 430 | 17.633 358 | 2.33 744 |
| 53 | 15.321 987 | 2.32 849 | 16.091 490 | 2.33 135 | 16.866 202 | 2.33 435 | 17.646 409 | 2.33 749 |
| 54 | 15.334 772 | 2.32 854 | 16.104 358 | 2.33 139 | 16.879 160 | 2.33 440 | 17.659 460 | 2.33 754 |
| 55 | 15.347 557 | 2.32 858 | 16.117 227 | 2.33 144 | 16.892 118 | 2.33 446 | 17.672 513 | 2.33 759 |
| 56 | 15.360 344 | 2.32 863 | 16.130 098 | 2.33 149 | 16.905 079 | 2.33 451 | 17.685 568 | 2.33 765 |
| 57 | 15.373 132 | 2.32 868 | 16.142 972 | 2.33 154 | 16.918 041 | 2.33 456 | 17.698 625 | 2.33 770 |
| 58 | 15.385 920 | 2.32 872 | 16.155 846 | 2.33 159 | 16.931 006 | 2.33 461 | 17.711 683 | 2.33 775 |
| 59 | 15.398 711 | 2.32 877 | 16.168 722 | 2.33 164 | 16.943 971 | 2.33 466 | 17.724 743 | 2.33 781 |
| 60 | 15.411 503 | 2.32 882 | 16.181 598 | 2.33 169 | 16.956 937 | 2.33 471 | 17.737 803 | 2.33 786 |

## Tafel V.

| v | 24° | | 25° | | 26° | | 27° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ | M | log Diff. 1″ |
| 0′ | 17.737 803 | 2.33 786 | 18.524 485 | 2.34 115 | 19.317 277 | 2.34 458 | 20.116 484 | 2.34 815 |
| 1 | 17.750 866 | 2.33 791 | 18.537 648 | 2.34 121 | 19.330 544 | 2.34 464 | 20.129 860 | 2.34 821 |
| 2 | 17.763 931 | 2.33 797 | 18.550 812 | 2.34 126 | 19.343 812 | 2.34 470 | 20.143 239 | 2.34 827 |
| 3 | 17.776 998 | 2.33 802 | 18.563 978 | 2.34 132 | 19.357 082 | 2.34 476 | 20.156 618 | 2.34 833 |
| 4 | 17.790 065 | 2.33 807 | 18.577 145 | 2.34 137 | 19.370 355 | 2.34 482 | 20.170 000 | 2.34 839 |
| 5 | 17.803 134 | 2.33 813 | 18.590 314 | 2.34 143 | 19.383 629 | 2.34 488 | 20.183 384 | 2.34 846 |
| 6 | 17.816 205 | 2.33 818 | 18.603 484 | 2.34 149 | 19.396 905 | 2.34 493 | 20.196 769 | 2.34 852 |
| 7 | 17.829 277 | 2.33 824 | 18.616 657 | 2.34 154 | 19.410 182 | 2.34 499 | 20.210 157 | 2.34 858 |
| 8 | 17.842 352 | 2.33 829 | 18.629 831 | 2.34 160 | 19.423 461 | 2.34 505 | 20.223 546 | 2.34 864 |
| 9 | 17.855 428 | 2.33 835 | 18.643 007 | 2.34 165 | 19.436 742 | 2.34 511 | 20.236 938 | 2.34 870 |
| 10 | 17.868 505 | 2.33 840 | 18.656 185 | 2.34 171 | 19.450 025 | 2.34 517 | 20.250 331 | 2.34 876 |
| 11 | 17.881 584 | 2.33 845 | 18.669 364 | 2.34 177 | 19.463 309 | 2.34 523 | 20.263 726 | 2.34 882 |
| 12 | 17.894 665 | 2.33 851 | 18.682 546 | 2.34 182 | 19.476 596 | 2.34 529 | 20.277 124 | 2.34 888 |
| 13 | 17.907 747 | 2.33 856 | 18.695 728 | 2.34 188 | 19.489 884 | 2.34 535 | 20.290 522 | 2.34 894 |
| 14 | 17.920 831 | 2.33 862 | 18.708 912 | 2.34 194 | 19.503 174 | 2.34 541 | 20.303 922 | 2.34 900 |
| 15 | 17.933 917 | 2.33 867 | 18.722 098 | 2.34 199 | 19.516 465 | 2.34 546 | 20.317 325 | 2.34 907 |
| 16 | 17.947 004 | 2.33 872 | 18.735 286 | 2.34 205 | 19.529 759 | 2.34 552 | 20.330 730 | 2.34 913 |
| 17 | 17.960 093 | 2.33 878 | 18.748 476 | 2.34 211 | 19.543 055 | 2.34 558 | 20.344 136 | 2.34 919 |
| 18 | 17.973 183 | 2.33 883 | 18.761 667 | 2.34 217 | 19.556 352 | 2.34 564 | 20.357 544 | 2.34 925 |
| 19 | 17.986 276 | 2.33 889 | 18.774 860 | 2.34 222 | 19.569 650 | 2.34 570 | 20.370 954 | 2.34 931 |
| 20 | 17.999 369 | 2.33 894 | 18.788 054 | 2.34 228 | 19.582 951 | 2.34 576 | 20.384 366 | 2.34 937 |
| 21 | 18.012 465 | 2.33 899 | 18.801 251 | 2.34 234 | 19.596 254 | 2.34 582 | 20.397 780 | 2.34 943 |
| 22 | 18.025 562 | 2.33 905 | 18.814 450 | 2.34 239 | 19.609 558 | 2.34 588 | 20.411 196 | 2.34 950 |
| 23 | 18.038 660 | 2.33 910 | 18.827 650 | 2.34 245 | 19.622 865 | 2.34 594 | 20.424 614 | 2.34 956 |
| 24 | 18.051 760 | 2.33 916 | 18.840 852 | 2.34 251 | 19.636 173 | 2.34 600 | 20.438 034 | 2.34 962 |
| 25 | 18.064 862 | 2.33 921 | 18.854 055 | 2.34 256 | 19.649 483 | 2.34 605 | 20.451 455 | 2.34 968 |
| 26 | 18.077 966 | 2.33 927 | 18.867 260 | 2.34 262 | 19.662 794 | 2.34 611 | 20.464 878 | 2.34 974 |
| 27 | 18.091 072 | 2.33 932 | 18.880 467 | 2.34 268 | 19.676 108 | 2.34 617 | 20.478 303 | 2.34 981 |
| 28 | 18.104 179 | 2.33 938 | 18.893 675 | 2.34 274 | 19.689 423 | 2.34 623 | 20.491 731 | 2.34 987 |
| 29 | 18.117 287 | 2.33 943 | 18.906 886 | 2.34 279 | 19.702 740 | 2.34 629 | 20.505 160 | 2.34 993 |
| 30 | 18.130 398 | 2.33 949 | 18.920 098 | 2.34 285 | 19.716 059 | 2.34 635 | 20.518 590 | 2.34 999 |
| 31 | 18.143 510 | 2.33 954 | 18.933 312 | 2.34 291 | 19.729 380 | 2.34 641 | 20.532 023 | 2.35 005 |
| 32 | 18.156 624 | 2.33 960 | 18.946 528 | 2.34 296 | 19.742 703 | 2.34 647 | 20.545 458 | 2.35 011 |
| 33 | 18.169 739 | 2.33 965 | 18.959 745 | 2.34 302 | 19.756 028 | 2.34 653 | 20.558 894 | 2.35 018 |
| 34 | 18.182 856 | 2.33 971 | 18.972 964 | 2.34 308 | 19.769 354 | 2.34 659 | 20.572 333 | 2.35 024 |
| 35 | 18.195 975 | 2.33 976 | 18.986 185 | 2.34 314 | 19.782 682 | 2.34 665 | 20.585 774 | 2.35 030 |
| 36 | 18.209 095 | 2.33 982 | 18.999 408 | 2.34 319 | 19.796 012 | 2.34 671 | 20.599 216 | 2.35 036 |
| 37 | 18.222 218 | 2.33 987 | 19.012 632 | 2.34 325 | 19.809 344 | 2.34 677 | 20.612 661 | 2.35 042 |
| 38 | 18.235 341 | 2.33 993 | 19.025 859 | 2.34 331 | 19.822 677 | 2.34 683 | 20.626 108 | 2.35 049 |
| 39 | 18.248 466 | 2.33 998 | 19.039 087 | 2.34 336 | 19.836 013 | 2.34 689 | 20.639 557 | 2.35 055 |
| 40 | 18.261 594 | 2.34 004 | 19.052 316 | 2.34 342 | 19.849 350 | 2.34 695 | 20.653 006 | 2.35 061 |
| 41 | 18.274 723 | 2.34 009 | 19.065 547 | 2.34 348 | 19.862 689 | 2.34 701 | 20.666 458 | 2.35 067 |
| 42 | 18.287 853 | 2.34 015 | 19.078 781 | 2.34 354 | 19.876 031 | 2.34 707 | 20.679 913 | 2.35 074 |
| 43 | 18.300 985 | 2.34 020 | 19.092 016 | 2.34 359 | 19.889 373 | 2.34 713 | 20.693 369 | 2.35 080 |
| 44 | 18.314 119 | 2.34 026 | 19.105 252 | 2.34 365 | 19.902 718 | 2.34 719 | 20.706 826 | 2.35 086 |
| 45 | 18.327 254 | 2.34 031 | 19.118 490 | 2.34 371 | 19.916 064 | 2.34 725 | 20.720 287 | 2.35 092 |
| 46 | 18.340 390 | 2.34 037 | 19.131 830 | 2.34 377 | 19.929 413 | 2.34 731 | 20.733 749 | 2.35 098 |
| 47 | 18.353 529 | 2.34 042 | 19.145 072 | 2.34 383 | 19.942 763 | 2.34 737 | 20.747 212 | 2.35 105 |
| 48 | 18.366 669 | 2.34 048 | 19.158 315 | 2.34 388 | 19.956 116 | 2.34 743 | 20.760 678 | 2.35 111 |
| 49 | 18.379 811 | 2.34 053 | 19.171 561 | 2.34 394 | 19.969 469 | 2.34 749 | 20.774 145 | 2.35 117 |
| 50 | 18.392 955 | 2.34 059 | 19.184 708 | 2.34 400 | 19.982 824 | 2.34 755 | 20.787 615 | 2.35 123 |
| 51 | 18.406 100 | 2.34 065 | 19.197 957 | 2.34 406 | 19.996 182 | 2.34 761 | 20.801 087 | 2.35 129 |
| 52 | 18.419 248 | 2.34 070 | 19.211 208 | 2.34 411 | 20.009 542 | 2.34 767 | 20.814 560 | 2.35 136 |
| 53 | 18.432 396 | 2.34 076 | 19.224 460 | 2.34 417 | 20.022 903 | 2.34 773 | 20.828 036 | 2.35 142 |
| 54 | 18.445 546 | 2.34 081 | 19.237 714 | 2.34 423 | 20.036 267 | 2.34 779 | 20.841 513 | 2.35 148 |
| 55 | 18.458 699 | 2.34 087 | 19.250 971 | 2.34 429 | 20.049 632 | 2.34 785 | 20.854 992 | 2.35 155 |
| 56 | 18.471 853 | 2.34 093 | 19.264 229 | 2.34 435 | 20.062 999 | 2.34 791 | 20.868 473 | 2.35 161 |
| 57 | 18.485 008 | 2.34 098 | 19.277 488 | 2.34 441 | 20.076 367 | 2.34 797 | 20.881 957 | 2.35 167 |
| 58 | 18.498 165 | 2.34 104 | 19.290 749 | 2.34 446 | 20.089 738 | 2.34 803 | 20.895 442 | 2.35 174 |
| 59 | 18.511 325 | 2.34 109 | 19.304 012 | 2.34 452 | 20.103 110 | 2.34 809 | 20.908 929 | 2.35 180 |
| 60 | 18.524 485 | 2.34 115 | 19.317 277 | 2.34 458 | 20.116 484 | 2.34 815 | 20.922 418 | 2.35 186 |

# Tafel V.

| v | 28° |  | 29° |  | 30° |  | 31° |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | M | logDiff. 1″ | M | log Diff. 1″ | log M | log Diff. 1″ | log M | log Diff. 1″ |
| 0′ | 20.922 418 | 2.35 186 | 21.735 396 | 2.35 571 | 1.353 2572 | 1.64 423 | 1.368 9153 | 1.63 271 |
| 1 | 20.935 908 | 2.35 192 | 21.749 007 | 2.35 578 | 1.353 5216 | 1.64 403 | 1.369 1727 | 1.63 252 |
| 2 | 20.949 402 | 2.35 199 | 21.762 621 | 2.35 584 | 1.353 7859 | 1.64 384 | 1.369 4301 | 1.63 234 |
| 3 | 20.962 897 | 2.35 205 | 21.776 236 | 2.35 591 | 1.354 0501 | 1.64 364 | 1.369 6874 | 1.63 215 |
| 4 | 20.976 394 | 2.35 211 | 21.789 853 | 2.35 597 | 1.354 3142 | 1.64 345 | 1.369 9446 | 1.63 196 |
| 5 | 20.989 892 | 2.35 218 | 21.803 473 | 2.35 604 | 1.354 5781 | 1.64 325 | 1.370 2016 | 1.63 178 |
| 6 | 21.003 393 | 2.35 224 | 21.817 095 | 2.35 611 | 1.354 8419 | 1.64 306 | 1.370 4585 | 1.63 159 |
| 7 | 21.016 896 | 2.35 230 | 21.830 719 | 2.35 617 | 1.355 1056 | 1.64 286 | 1.370 7154 | 1.63 140 |
| 8 | 21.030 400 | 2.35 237 | 21.844 344 | 2.35 624 | 1.355 3692 | 1.64 267 | 1.370 9721 | 1.63 122 |
| 9 | 21.043 907 | 2.35 243 | 21.857 971 | 2.35 630 | 1.355 6327 | 1.64 247 | 1.371 2287 | 1.63 103 |
| 10 | 21.057 416 | 2.35 249 | 21.871 601 | 2.35 637 | 1.355 8960 | 1.64 227 | 1.371 4852 | 1.63 084 |
| 11 | 21.070 927 | 2.35 255 | 21.885 233 | 2.35 644 | 1.356 1592 | 1.64 208 | 1.371 7416 | 1.63 065 |
| 12 | 21.084 440 | 2.35 262 | 21.898 867 | 2.35 650 | 1.356 4223 | 1.64 188 | 1.371 9978 | 1.63 047 |
| 13 | 21.097 954 | 2.35 268 | 21.912 503 | 2.35 657 | 1.356 6853 | 1.64 169 | 1.372 2540 | 1.63 028 |
| 14 | 21.111 470 | 2.35 275 | 21.926 141 | 2.35 663 | 1.356 9482 | 1.64 149 | 1.372 5101 | 1.63 010 |
| 15 | 21.124 988 | 2.35 281 | 21.939 780 | 2.35 670 | 1.357 2109 | 1.64 130 | 1.372 7660 | 1.62 991 |
| 16 | 21.138 509 | 2.35 287 | 21.953 422 | 2.35 677 | 1.357 4736 | 1.64 111 | 1.373 0219 | 1.62 973 |
| 17 | 21.152 032 | 2.35 294 | 21.967 067 | 2.35 683 | 1.357 7361 | 1.64 091 | 1.373 2776 | 1.62 954 |
| 18 | 21.165 556 | 2.35 300 | 21.980 713 | 2.35 690 | 1.357 9985 | 1.64 072 | 1.373 5332 | 1.62 936 |
| 19 | 21.179 082 | 2.35 307 | 21.994 361 | 2.35 696 | 1.358 2608 | 1.64 052 | 1.373 7887 | 1.62 917 |
| 20 | 21.192 611 | 2.35 313 | 22.008 011 | 2.35 703 | 1.358 5229 | 1.64 033 | 1.374 0441 | 1.62 899 |
| 21 | 21.206 142 | 2.35 319 | 22.021 664 | 2.35 710 | 1.358 7850 | 1.64 013 | 1.374 2994 | 1.62 880 |
| 22 | 21.219 674 | 2.35 326 | 22.035 319 | 2.35 716 | 1.359 0469 | 1.63 994 | 1.374 5546 | 1.62 861 |
| 23 | 21.233 209 | 2.35 332 | 22.048 975 | 2.35 723 | 1.359 3087 | 1.63 974 | 1.374 8097 | 1.62 843 |
| 24 | 21.246 745 | 2.35 339 | 22.062 634 | 2.35 729 | 1.359 5704 | 1.63 955 | 1.375 0647 | 1.62 824 |
| 25 | 21.260 283 | 2.35 345 | 22.076 294 | 2.35 736 | 1.359 8320 | 1.63 936 | 1.375 3195 | 1.62 806 |
| 26 | 21.273 824 | 2.35 351 | 22.089 957 | 2.35 743 | 1.360 0935 | 1.63 916 | 1.375 5743 | 1.62 787 |
| 27 | 21.287 366 | 2.35 358 | 22.103 622 | 2.35 749 | 1.360 3548 | 1.63 897 | 1.375 8290 | 1.62 769 |
| 28 | 21.300 910 | 2.35 364 | 22.117 289 | 2.35 756 | 1.360 6161 | 1.63 877 | 1.376 0835 | 1.62 751 |
| 29 | 21.314 458 | 2.35 371 | 22.130 958 | 2.35 762 | 1.360 8772 | 1.63 858 | 1.376 3379 | 1.62 733 |
| 30 | 21.328 006 | 2.35 377 | 22.144 629 | 2.35 769 | 1.361 1382 | 1.63 839 | 1.376 5922 | 1.62 715 |
| 31 | 21.341 556 | 2.35 384 | 22.158 302 | 2.35 776 | 1.361 3991 | 1.63 820 | 1.376 8465 | 1.62 696 |
| 32 | 21.355 109 | 2.35 390 | 22.171 978 | 2.35 782 | 1.361 6598 | 1.63 800 | 1.377 1006 | 1.62 678 |
| 33 | 21.368 663 | 2.35 396 | 22.185 656 | 2.35 789 | 1.361 9205 | 1.63 781 | 1.377 3546 | 1.62 660 |
| 34 | 21.382 219 | 2.35 403 | 22.199 335 | 2.35 796 | 1.362 1810 | 1.63 762 | 1.377 6085 | 1.62 641 |
| 35 | 21.395 778 | 2.35 409 | 22.213 017 | 2.35 802 | 1.362 4415 | 1.63 743 | 1.377 8623 | 1.62 623 |
| 36 | 21.409 339 | 2.35 416 | 22.226 700 | 2.35 809 | 1.362 7018 | 1.63 724 | 1.378 1160 | 1.62 605 |
| 37 | 21.422 901 | 2.35 422 | 22.240 387 | 2.35 816 | 1.362 9620 | 1.63 705 | 1.378 3695 | 1.62 587 |
| 38 | 21.436 466 | 2.35 428 | 22.254 075 | 2.35 822 | 1.363 2221 | 1.63 686 | 1.378 6230 | 1.62 568 |
| 39 | 21 450 032 | 2.35 435 | 22.267 765 | 2.35 829 | 1.363 4820 | 1.63 667 | 1.378 8764 | 1.62 550 |
| 40 | 21.463 601 | 2.35 441 | 22.281 457 | 2.35 836 | 1.363 7419 | 1.63 648 | 1.379 1296 | 1.62 532 |
| 41 | 21.477 171 | 2.35 447 | 22.295 151 | 2.35 843 | 1.364 0017 | 1.63 629 | 1.379 3828 | 1.62 514 |
| 42 | 21.490 744 | 2.35 454 | 22.308 848 | 2.35 849 | 1.364 2613 | 1.63 610 | 1.379 6358 | 1.62 496 |
| 43 | 21.504 318 | 2.35 460 | 22.322 547 | 2.35 856 | 1.364 5208 | 1.63 591 | 1.379 8888 | 1.62 478 |
| 44 | 21.517 895 | 2.35 467 | 22.336 248 | 2.35 863 | 1.364 7802 | 1.63 572 | 1.380 1416 | 1.62 460 |
| 45 | 21.531 474 | 2.35 473 | 22.349 951 | 2.35 869 | 1.365 0395 | 1.63 554 | 1.380 3944 | 1.62 442 |
| 46 | 21.545 055 | 2.35 480 | 22.363 656 | 2.35 876 | 1.365 2986 | 1.63 535 | 1.380 6470 | 1.62 424 |
| 47 | 21.558 637 | 2.35 486 | 22.377 363 | 2.35 883 | 1.365 5577 | 1.63 516 | 1.380 8995 | 1.62 406 |
| 48 | 21.572 222 | 2.35 493 | 22.391 072 | 2.35 889 | 1.365 8166 | 1.63 497 | 1.381 1519 | 1.62 388 |
| 49 | 21.585 809 | 2.35 499 | 22.404 784 | 2.35 896 | 1.366 0755 | 1.63 478 | 1.381 4042 | 1.62 370 |
| 50 | 21.599 398 | 2.35 506 | 22.418 497 | 2.35 903 | 1.366 3342 | 1.63 459 | 1.381 6564 | 1.62 352 |
| 51 | 21.612 988 | 2.35 512 | 22.432 212 | 2.35 910 | 1.366 5928 | 1.63 440 | 1.381 9085 | 1.62 334 |
| 52 | 21.626 582 | 2.35 519 | 22.445 931 | 2.35 916 | 1.366 8513 | 1.63 422 | 1.382 1605 | 1.62 316 |
| 53 | 21.640 176 | 2.35 525 | 22.459 650 | 2.35 923 | 1.367 1097 | 1.63 403 | 1.382 4124 | 1.62 298 |
| 54 | 21.653 772 | 2.35 532 | 22.473 371 | 2.35 930 | 1.367 3680 | 1.63 384 | 1.382 6642 | 1.62 280 |
| 55 | 21.667 371 | 2.35 538 | 22.487 095 | 2.35 936 | 1.367 6261 | 1.63 365 | 1.382 9159 | 1.62 262 |
| 56 | 21.680 972 | 2.35 545 | 22.500 822 | 2.35 943 | 1.367 8842 | 1.63 346 | 1.383 1675 | 1.62 244 |
| 57 | 21.694 576 | 2.35 551 | 22.514 551 | 2.35 950 | 1.368 1421 | 1.63 328 | 1.383 4190 | 1.62 226 |
| 58 | 21.708 181 | 2.35 558 | 22.528 281 | 2.35 956 | 1.368 3999 | 1.63 309 | 1.383 6703 | 1.62 208 |
| 59 | 21.721 787 | 2 35 564 | 22.542 013 | 2.35 963 | 1.368 6576 | 1.63 290 | 1.383 9216 | 1.62 190 |
| 60 | 21.735 396 | 2.35 571 | 22.555 748 | 2.35 970 | 1.368 9153 | 1.63 271 | 1.384 1728 | 1.62 172 |

## Tafel V.

| $v$ | 32° log $M$ | 32° logDiff. 1″ | 33° log $M$ | 33° logDiff. 1″ | 34° log $M$ | 34° logDiff. 1″ | 35° log $M$ | 35° logDiff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.384 1728 | 1.62 172 | 1.399 0582 | 1.61 125 | 1.413 5974 | 1.60 128 | 1.427 8141 | 1.59 177 |
| 1 | 1.384 4238 | 1.62 154 | 1.399 3033 | 1.61 108 | 1.413 8369 | 1.60 112 | 1.428 0484 | 1.59 162 |
| 2 | 1.384 6748 | 1.62 136 | 1.399 5483 | 1.61 091 | 1.414 0764 | 1.60 096 | 1.428 2827 | 1.59 146 |
| 3 | 1.384 9257 | 1.62 119 | 1.399 7932 | 1.61 074 | 1.414 3157 | 1.60 079 | 1.428 5169 | 1.59 131 |
| 4 | 1.385 1764 | 1.62 101 | 1.400 0380 | 1.61 057 | 1.414 5550 | 1.60 063 | 1.428 7510 | 1.59 115 |
| 5 | 1.385 4271 | 1.62 083 | 1.400 2827 | 1.61 041 | 1.414 7941 | 1.60 047 | 1.428 9850 | 1.59 100 |
| 6 | 1.385 6776 | 1.62 065 | 1.400 5273 | 1.61 024 | 1.415 0332 | 1.60 031 | 1.429 2189 | 1.59 085 |
| 7 | 1.385 9281 | 1.62 048 | 1.400 7718 | 1.61 007 | 1.415 2722 | 1.60 015 | 1.429 4527 | 1.59 069 |
| 8 | 1.386 1784 | 1.62 030 | 1.401 0162 | 1.60 990 | 1.415 5111 | 1.59 998 | 1.429 6865 | 1.59 054 |
| 9 | 1.386 4287 | 1.62 012 | 1.401 2606 | 1.60 973 | 1.415 7499 | 1.59 982 | 1.429 9202 | 1.59 038 |
| 10 | 1.386 6788 | 1.61 994 | 1.401 5048 | 1.60 956 | 1.415 9887 | 1.59 966 | 1.430 1538 | 1.59 023 |
| 11 | 1.386 9288 | 1.61 976 | 1.401 7489 | 1.60 939 | 1.416 2273 | 1.59 950 | 1.430 3873 | 1.59 008 |
| 12 | 1.387 1788 | 1.61 959 | 1.401 9930 | 1.60 923 | 1.416 4658 | 1.59 934 | 1.430 6207 | 1.58 992 |
| 13 | 1.387 4286 | 1.61 941 | 1.402 2369 | 1.60 906 | 1.416 7043 | 1.59 918 | 1.430 8540 | 1.58 977 |
| 14 | 1.387 6783 | 1.61 924 | 1.402 4807 | 1.60 889 | 1.416 9426 | 1.59 902 | 1.431 0873 | 1.58 961 |
| 15 | 1.387 9280 | 1.61 906 | 1.402 7245 | 1.60 872 | 1.417 1809 | 1.59 886 | 1.431 3205 | 1.58 946 |
| 16 | 1.388 1775 | 1.61 888 | 1.402 9682 | 1.60 855 | 1.417 4191 | 1.59 870 | 1.431 5536 | 1.58 931 |
| 17 | 1.388 4269 | 1.61 871 | 1.403 2117 | 1.60 839 | 1.417 6572 | 1.59 854 | 1.431 7866 | 1.58 915 |
| 18 | 1.388 6763 | 1.61 853 | 1.403 4552 | 1.60 822 | 1.417 8953 | 1.59 838 | 1.432 0195 | 1.58 900 |
| 19 | 1.388 9255 | 1.61 835 | 1.403 6986 | 1.60 805 | 1.418 1332 | 1.59 822 | 1.432 2524 | 1.58 885 |
| 20 | 1.389 1746 | 1.61 818 | 1.403 9419 | 1.60 788 | 1.418 3710 | 1.59 806 | 1.432 4851 | 1.58 870 |
| 21 | 1.389 4236 | 1.61 800 | 1.404 1851 | 1.60 771 | 1.418 6088 | 1.59 790 | 1.432 7178 | 1.58 855 |
| 22 | 1.389 6726 | 1.61 783 | 1.404 4282 | 1.60 755 | 1.418 8465 | 1.59 774 | 1.432 9504 | 1.58 839 |
| 23 | 1.389 9214 | 1.61 765 | 1.404 6712 | 1.60 738 | 1.419 0840 | 1.59 758 | 1.433 1830 | 1.58 824 |
| 24 | 1.390 1701 | 1.61 748 | 1.404 9141 | 1.60 721 | 1.419 3215 | 1.59 742 | 1.433 4154 | 1.58 809 |
| 25 | 1.390 4187 | 1.61 730 | 1.405 1569 | 1.60 705 | 1.419 5589 | 1.59 727 | 1.433 6478 | 1.58 794 |
| 26 | 1.390 6673 | 1.61 712 | 1.405 3996 | 1.60 688 | 1.419 7963 | 1.59 711 | 1.433 8801 | 1.58 779 |
| 27 | 1.390 9157 | 1.61 695 | 1.405 6422 | 1.60 671 | 1.420 0335 | 1.59 695 | 1.434 1123 | 1.58 763 |
| 28 | 1.391 1640 | 1.61 677 | 1.405 8848 | 1.60 655 | 1.420 2706 | 1.59 679 | 1.434 3444 | 1.58 748 |
| 29 | 1.391 4122 | 1.61 660 | 1.406 1272 | 1.60 638 | 1.420 5077 | 1.59 663 | 1.434 5764 | 1.58 733 |
| 30 | 1.391 6603 | 1.61 642 | 1.406 3696 | 1.60 621 | 1.420 7447 | 1.59 647 | 1.434 8084 | 1.58 718 |
| 31 | 1.391 9084 | 1.61 625 | 1.406 6118 | 1.60 605 | 1.420 9816 | 1.59 631 | 1.435 0403 | 1.58 703 |
| 32 | 1.392 1563 | 1.61 607 | 1.406 8540 | 1.60 588 | 1.421 2184 | 1.59 615 | 1.435 2721 | 1.58 688 |
| 33 | 1.392 4041 | 1.61 590 | 1.407 0961 | 1.60 571 | 1.421 4551 | 1.59 600 | 1.435 5038 | 1.58 673 |
| 34 | 1.392 6518 | 1.61 572 | 1.407 3380 | 1.60 555 | 1.421 6917 | 1.59 584 | 1.435 7354 | 1.58 658 |
| 35 | 1.392 8995 | 1.61 555 | 1.407 5799 | 1.60 538 | 1.421 9282 | 1.59 568 | 1.435 9670 | 1.58 643 |
| 36 | 1.393 1470 | 1.61 538 | 1.407 8217 | 1.60 521 | 1.422 1647 | 1.59 552 | 1.436 1985 | 1.58 628 |
| 37 | 1.393 3944 | 1.61 520 | 1.408 0634 | 1.60 505 | 1.422 4011 | 1.59 537 | 1.436 4299 | 1.58 613 |
| 38 | 1.393 6417 | 1.61 503 | 1.408 3050 | 1.60 489 | 1.422 6374 | 1.59 521 | 1.436 6612 | 1.58 598 |
| 39 | 1.393 8890 | 1.61 486 | 1.408 5465 | 1.60 472 | 1.422 8736 | 1.59 505 | 1.436 8924 | 1.58 583 |
| 40 | 1.394 1361 | 1.61 469 | 1.408 7880 | 1.60 455 | 1.423 1097 | 1.59 489 | 1.437 1236 | 1.58 568 |
| 41 | 1.394 3831 | 1.61 451 | 1.409 0293 | 1.60 439 | 1.423 3457 | 1.59 473 | 1.437 3546 | 1.58 553 |
| 42 | 1.394 6301 | 1.61 434 | 1.409 2706 | 1.60 422 | 1.423 5816 | 1.59 458 | 1.437 5856 | 1.58 538 |
| 43 | 1.394 8769 | 1.61 417 | 1.409 5117 | 1.60 406 | 1.423 8175 | 1.59 442 | 1.437 8165 | 1.58 523 |
| 44 | 1.395 1236 | 1.61 399 | 1.409 7528 | 1.60 389 | 1.424 0532 | 1.59 426 | 1.438 0474 | 1.58 508 |
| 45 | 1.395 3703 | 1.61 382 | 1.409 9937 | 1.60 373 | 1.424 2889 | 1.59 411 | 1.438 2781 | 1.58 494 |
| 46 | 1.395 6168 | 1.61 365 | 1.410 2346 | 1.60 356 | 1.424 5245 | 1.59 395 | 1.438 5088 | 1.58 479 |
| 47 | 1.395 8632 | 1.61 348 | 1.410 4754 | 1.60 340 | 1.424 7601 | 1.59 380 | 1.438 7394 | 1.58 464 |
| 48 | 1.396 1096 | 1.61 330 | 1.410 7161 | 1.60 323 | 1.424 9955 | 1.59 364 | 1.438 9699 | 1.58 449 |
| 49 | 1.396 3559 | 1.61 313 | 1.410 9567 | 1.60 307 | 1.425 2308 | 1.59 349 | 1.439 2004 | 1.58 434 |
| 50 | 1.396 6020 | 1.61 296 | 1.411 1972 | 1.60 291 | 1.425 4661 | 1.59 333 | 1.439 4307 | 1.58 419 |
| 51 | 1.396 8481 | 1.61 279 | 1.411 4377 | 1.60 274 | 1.425 7013 | 1.59 317 | 1.439 6610 | 1.58 404 |
| 52 | 1.397 0940 | 1.61 262 | 1.411 6780 | 1.60 258 | 1.425 9364 | 1.59 302 | 1.439 8912 | 1.58 390 |
| 53 | 1.397 3399 | 1.61 244 | 1.411 9182 | 1.60 242 | 1.426 1714 | 1.59 286 | 1.440 1214 | 1.58 375 |
| 54 | 1.397 5857 | 1.61 227 | 1.412 1584 | 1.60 225 | 1.426 4063 | 1.59 271 | 1.440 3514 | 1.58 360 |
| 55 | 1.397 8313 | 1.61 210 | 1.412 3984 | 1.60 209 | 1.426 6412 | 1.59 255 | 1.440 5814 | 1.58 345 |
| 56 | 1.398 0769 | 1.61 193 | 1.412 6384 | 1.60 193 | 1.426 8759 | 1.59 239 | 1.440 8113 | 1.58 330 |
| 57 | 1.398 3224 | 1.61 176 | 1.412 8783 | 1.60 177 | 1.427 1106 | 1.59 224 | 1.441 0411 | 1.58 316 |
| 58 | 1.398 5677 | 1.61 159 | 1.413 1181 | 1.60 160 | 1.427 3452 | 1.59 208 | 1.441 2708 | 1.58 301 |
| 59 | 1.398 8130 | 1.61 142 | 1.413 3578 | 1.60 144 | 1.427 5797 | 1.59 193 | 1.441 5005 | 1.58 286 |
| 60 | 1.399 0582 | 1.61 125 | 1.413 5974 | 1.60 128 | 1.427 8141 | 1.59 177 | 1.441 7301 | 1.58 271 |

## Tafel V.

| v | 36° log M | 36° log Diff. 1″ | 37° log M | 37° log Diff. 1″ | 38° log M | 38° log Diff. 1″ | 39° log M | 39° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.441 7301 | 1.58 271 | 1.455 3653 | 1.57 407 | 1.468 7385 | 1.56 584 | 1.481 8666 | 1.55 801 |
| 1 | 1.441 9596 | 1.58 256 | 1.455 5903 | 1.57 393 | 1.468 9592 | 1.56 570 | 1.482 0834 | 1.55 788 |
| 2 | 1.442 1890 | 1.58 242 | 1.455 8152 | 1.57 379 | 1.469 1799 | 1.56 557 | 1.482 3002 | 1.55 776 |
| 3 | 1.442 4183 | 1.58 227 | 1.456 0401 | 1.57 365 | 1.469 4006 | 1.56 544 | 1.482 5169 | 1.55 763 |
| 4 | 1.442 6476 | 1.58 212 | 1.456 2648 | 1.57 351 | 1.469 6211 | 1.56 530 | 1.482 7335 | 1.55 750 |
| 5 | 1.442 8768 | 1.58 198 | 1.456 4895 | 1.57 337 | 1.469 8416 | 1.56 517 | 1.482 9501 | 1.55 738 |
| 6 | 1.443 1059 | 1.58 183 | 1.456 7142 | 1.57 323 | 1.470 0620 | 1.56 504 | 1.483 1666 | 1.55 725 |
| 7 | 1.443 3349 | 1.58 168 | 1.456 9387 | 1.57 309 | 1.470 2824 | 1.56 491 | 1.483 3830 | 1.55 712 |
| 8 | 1.443 5639 | 1.58 154 | 1.457 1632 | 1.57 295 | 1.470 5027 | 1.56 477 | 1.483 5994 | 1.55 700 |
| 9 | 1.443 7928 | 1.58 139 | 1.457 3876 | 1.57 281 | 1.470 7229 | 1.56 464 | 1.483 8157 | 1.55 687 |
| 10 | 1.444 0216 | 1.58 124 | 1.457 6119 | 1.57 267 | 1.470 9431 | 1.56 451 | 1.484 0320 | 1.55 674 |
| 11 | 1.444 2503 | 1.58 110 | 1.457 8362 | 1.57 253 | 1.471 1632 | 1.56 438 | 1.484 2481 | 1.55 661 |
| 12 | 1.444 4790 | 1.58 095 | 1.458 0604 | 1.57 239 | 1.471 3832 | 1.56 424 | 1.484 4643 | 1.55 649 |
| 13 | 1.444 7075 | 1.58 080 | 1.458 2845 | 1.57 225 | 1.471 6031 | 1.56 411 | 1.484 6803 | 1.55 636 |
| 14 | 1.444 9360 | 1.58 066 | 1.458 5085 | 1.57 211 | 1.471 8230 | 1.56 398 | 1.484 8963 | 1.55 623 |
| 15 | 1.445 1644 | 1.58 051 | 1.458 7325 | 1.57 198 | 1.472 0428 | 1.56 385 | 1.485 1123 | 1.55 611 |
| 16 | 1.445 3928 | 1.58 036 | 1.458 9564 | 1.57 184 | 1.472 2626 | 1.56 371 | 1.485 3281 | 1.55 598 |
| 17 | 1.445 6211 | 1.58 022 | 1.459 1802 | 1.57 170 | 1.472 4823 | 1.56 358 | 1.485 5439 | 1.55 585 |
| 18 | 1.445 8492 | 1.58 007 | 1.459 4040 | 1.57 156 | 1.472 7019 | 1.56 345 | 1.485 7597 | 1.55 573 |
| 19 | 1.446 0774 | 1.57 992 | 1.459 6277 | 1.57 142 | 1.472 9214 | 1.56 332 | 1.485 9754 | 1.55 560 |
| 20 | 1.446 3054 | 1.57 978 | 1.459 8513 | 1.57 128 | 1.473 1409 | 1.56 319 | 1.486 1910 | 1.55 548 |
| 21 | 1.446 5334 | 1.57 963 | 1.460 0749 | 1.57 114 | 1.473 3604 | 1.56 306 | 1.486 4066 | 1.55 535 |
| 22 | 1.446 7612 | 1.57 949 | 1.460 2983 | 1.57 100 | 1.473 5797 | 1.56 293 | 1.486 6221 | 1.55 523 |
| 23 | 1.446 9891 | 1.57 934 | 1.460 5217 | 1.57 087 | 1.473 7990 | 1.56 279 | 1.486 8375 | 1.55 510 |
| 24 | 1.447 2168 | 1.57 920 | 1.460 7451 | 1.57 073 | 1.474 0182 | 1.56 266 | 1.487 0529 | 1.55 498 |
| 25 | 1.447 4444 | 1.57 906 | 1.460 9683 | 1.57 059 | 1.474 2374 | 1.56 253 | 1.487 2682 | 1.55 485 |
| 26 | 1.447 6720 | 1.57 891 | 1.461 1915 | 1.57 045 | 1.474 4565 | 1.56 240 | 1.487 4835 | 1.55 473 |
| 27 | 1.447 8995 | 1.57 877 | 1.461 4146 | 1.57 032 | 1.474 6755 | 1.56 227 | 1.487 6986 | 1.55 460 |
| 28 | 1.448 1270 | 1.57 862 | 1.461 6377 | 1.57 018 | 1.474 8944 | 1.56 214 | 1.487 9138 | 1.55 448 |
| 29 | 1.448 3543 | 1.57 848 | 1.461 8607 | 1.57 004 | 1.475 1133 | 1.56 201 | 1.488 1288 | 1.55 435 |
| 30 | 1.448 5816 | 1.57 834 | 1.462 0836 | 1.56 991 | 1.475 3321 | 1.56 188 | 1.488 3438 | 1.55 423 |
| 31 | 1.448 8088 | 1.57 819 | 1.462 3064 | 1.56 977 | 1.475 5509 | 1.56 175 | 1.488 5588 | 1.55 410 |
| 32 | 1.449 0359 | 1.57 805 | 1.462 5292 | 1.56 964 | 1.475 7696 | 1.56 162 | 1.488 7737 | 1.55 398 |
| 33 | 1.449 2630 | 1.57 791 | 1.462 7519 | 1.56 950 | 1.475 9882 | 1.56 149 | 1.488 9885 | 1.55 385 |
| 34 | 1.449 4900 | 1.57 776 | 1.462 9745 | 1.56 936 | 1.476 2068 | 1.56 136 | 1.489 2032 | 1.55 373 |
| 35 | 1.449 7169 | 1.57 762 | 1.463 1971 | 1.56 923 | 1.476 4253 | 1.56 123 | 1.489 4179 | 1.55 361 |
| 36 | 1.449 9437 | 1.57 748 | 1.463 4196 | 1.56 909 | 1.476 6437 | 1.56 110 | 1.489 6326 | 1.55 348 |
| 37 | 1.450 1704 | 1.57 733 | 1.463 6420 | 1.56 895 | 1.476 8621 | 1.56 097 | 1.489 8472 | 1.55 336 |
| 38 | 1.450 3971 | 1.57 719 | 1.463 8643 | 1.56 881 | 1.477 0804 | 1.56 084 | 1.490 0617 | 1.55 323 |
| 39 | 1.450 6237 | 1.57 704 | 1.464 0866 | 1.56 868 | 1.477 2986 | 1.56 071 | 1.490 2761 | 1.55 311 |
| 40 | 1.451 8503 | 1.57 690 | 1.464 3088 | 1.56 854 | 1.477 5168 | 1.56 058 | 1.490 4905 | 1.55 299 |
| 41 | 1.451 0767 | 1.57 676 | 1.464 5309 | 1.56 840 | 1.477 7349 | 1.56 045 | 1.490 7048 | 1.55 287 |
| 42 | 1.451 3031 | 1.57 661 | 1.464 7530 | 1.56 827 | 1.477 9529 | 1.56 032 | 1.490 9191 | 1.55 274 |
| 43 | 1.451 5294 | 1.57 647 | 1.464 9750 | 1.56 813 | 1.478 1709 | 1.56 019 | 1.491 1333 | 1.55 262 |
| 44 | 1.451 7556 | 1.57 633 | 1.465 1969 | 1.56 800 | 1.478 3888 | 1.56 006 | 1.491 3475 | 1.55 250 |
| 45 | 1.451 9818 | 1.57 619 | 1.465 4188 | 1.56 786 | 1.478 6067 | 1.55 994 | 1.491 5616 | 1.55 238 |
| 46 | 1.452 2079 | 1.57 604 | 1.465 6406 | 1.56 773 | 1.478 8245 | 1.55 981 | 1.491 7756 | 1.55 225 |
| 47 | 1.452 4339 | 1.57 590 | 1.465 8623 | 1.56 759 | 1.479 0422 | 1.55 968 | 1.491 9896 | 1.55 213 |
| 48 | 1.452 6598 | 1.57 576 | 1.466 0840 | 1.56 746 | 1.479 2598 | 1.55 955 | 1.492 2035 | 1.55 201 |
| 49 | 1.452 8857 | 1.57 562 | 1.466 3056 | 1.56 732 | 1.479 4774 | 1.55 942 | 1.492 4173 | 1.55 189 |
| 50 | 1.453 1115 | 1.57 548 | 1.466 5271 | 1.56 719 | 1.479 6949 | 1.55 929 | 1.492 6311 | 1.55 177 |
| 51 | 1.453 3372 | 1.57 534 | 1.466 7485 | 1.56 705 | 1.479 9124 | 1.55 916 | 1.492 8448 | 1.55 165 |
| 52 | 1.453 5628 | 1.57 520 | 1.466 9699 | 1.56 692 | 1.480 1298 | 1.55 903 | 1.493 0585 | 1.55 153 |
| 53 | 1.453 7884 | 1.57 505 | 1.467 1912 | 1.56 678 | 1.480 3471 | 1.55 891 | 1.493 2721 | 1.55 141 |
| 54 | 1.454 0139 | 1.57 491 | 1.467 4125 | 1.56 665 | 1.480 5644 | 1.55 878 | 1.493 4857 | 1.55 128 |
| 55 | 1.454 2393 | 1.57 477 | 1.467 6336 | 1.56 651 | 1.480 7816 | 1.55 865 | 1.493 6992 | 1.55 116 |
| 56 | 1.454 4647 | 1.57 463 | 1.467 8547 | 1.56 638 | 1.480 9987 | 1.55 852 | 1.493 9126 | 1.55 104 |
| 57 | 1.454 6899 | 1.57 449 | 1.468 0758 | 1.56 624 | 1.481 2158 | 1.55 839 | 1.494 1260 | 1.55 092 |
| 58 | 1.454 9152 | 1.57 435 | 1.468 2967 | 1.56 611 | 1.481 4328 | 1.55 827 | 1.494 3393 | 1.55 080 |
| 59 | 1.455 1403 | 1.57 421 | 1.468 5176 | 1.56 597 | 1.481 6497 | 1.55 814 | 1.494 5525 | 1.55 068 |
| 60 | 1.455 3653 | 1.57 407 | 1.468 7385 | 1.56 584 | 1.481 8666 | 1.55 801 | 1.494 7657 | 1.55 056 |

# Tafel V.

| $v$ | 40° | | 41° | | 42° | | 43° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 1.494 7657 | 1.55 056 | 1.507 4505 | 1.54 346 | 1.519 9350 | 1.53 672 | 1.532 2320 | 1.53 032 |
| 1 | 1.494 9788 | 1.55 044 | 1.507 6602 | 1.54 335 | 1.520 1414 | 1.53 661 | 1.532 4354 | 1.53 021 |
| 2 | 1.495 1919 | 1.55 032 | 1.507 8699 | 1.54 323 | 1.520 3478 | 1.53 650 | 1.532 6388 | 1.53 011 |
| 3 | 1.495 4049 | 1.55 019 | 1.508 0794 | 1.54 312 | 1.520 5542 | 1.53 639 | 1.532 8421 | 1.53 000 |
| 4 | 1.495 6179 | 1.55 007 | 1.508 2889 | 1.54 300 | 1.520 7605 | 1.53 628 | 1.533 0454 | 1.52 990 |
| 5 | 1.495 8308 | 1.54 995 | 1.508 4984 | 1.54 289 | 1.520 9667 | 1.53 618 | 1.533 2487 | 1.52 980 |
| 6 | 1.496 0436 | 1.54 983 | 1.508 7078 | 1.54 278 | 1.521 1729 | 1.53 607 | 1.533 4519 | 1.52 969 |
| 7 | 1.496 2564 | 1.54 971 | 1.508 9171 | 1.54 266 | 1.521 3791 | 1.53 596 | 1.533 6550 | 1.52 959 |
| 8 | 1.496 4691 | 1.54 959 | 1.509 1264 | 1.54 255 | 1.521 5852 | 1.53 585 | 1.533 8581 | 1.52 948 |
| 9 | 1.496 6817 | 1.54 947 | 1.509 3357 | 1.54 243 | 1.521 7912 | 1.53 574 | 1.534 0611 | 1.52 938 |
| 10 | 1.496 8943 | 1.54 935 | 1.509 5448 | 1.54 232 | 1.521 9972 | 1.53 563 | 1.534 2641 | 1.52 928 |
| 11 | 1.497 1069 | 1.54 923 | 1.509 7540 | 1.54 221 | 1.522 2031 | 1.53 552 | 1.534 4671 | 1.52 918 |
| 12 | 1.497 3193 | 1.54 911 | 1.509 9630 | 1.54 209 | 1.522 4090 | 1.53 541 | 1.534 6700 | 1.52 907 |
| 13 | 1.497 5318 | 1.54 899 | 1.510 1721 | 1.54 198 | 1.522 6148 | 1.53 530 | 1.534 8728 | 1.52 897 |
| 14 | 1.497 7441 | 1.54 887 | 1.510 3810 | 1.54 187 | 1.522 8206 | 1.53 520 | 1.535 0756 | 1.52 887 |
| 15 | 1.497 9564 | 1.54 875 | 1.510 5899 | 1.54 175 | 1.523 0263 | 1.53 509 | 1.535 2784 | 1.52 877 |
| 16 | 1.498 1687 | 1.54 863 | 1.510 7988 | 1.54 164 | 1.523 2320 | 1.53 498 | 1.535 4811 | 1.52 867 |
| 17 | 1.498 3809 | 1.54 851 | 1.511 0076 | 1.54 152 | 1.523 4376 | 1.53 487 | 1.535 6837 | 1.52 856 |
| 18 | 1.498 5930 | 1.54 839 | 1.511 2163 | 1.54 141 | 1.523 6432 | 1.53 477 | 1.535 8863 | 1.52 846 |
| 19 | 1.498 8051 | 1.54 827 | 1.511 4250 | 1.54 129 | 1.523 8487 | 1.53 466 | 1.536 0889 | 1.52 836 |
| 20 | 1.499 0171 | 1.54 815 | 1.511 6336 | 1.54 118 | 1.524 0542 | 1.53 455 | 1.536 2914 | 1.52 826 |
| 21 | 1.499 2290 | 1.54 803 | 1.511 8422 | 1.54 107 | 1.524 2596 | 1.53 444 | 1.536 4939 | 1.52 816 |
| 22 | 1.499 4409 | 1.54 792 | 1.512 0507 | 1.54 095 | 1.524 4650 | 1.53 434 | 1.536 6963 | 1.52 805 |
| 23 | 1.499 6528 | 1.54 780 | 1.512 2592 | 1.54 084 | 1.524 6703 | 1.53 423 | 1.536 8987 | 1.52 795 |
| 24 | 1.499 8645 | 1.54 768 | 1.512 4676 | 1.54 072 | 1.524 8756 | 1.53 412 | 1.537 1010 | 1.52 785 |
| 25 | 1.500 0763 | 1.54 756 | 1.512 6760 | 1.54 061 | 1.525 0808 | 1.53 402 | 1.537 3033 | 1.52 775 |
| 26 | 1.500 2879 | 1.54 745 | 1.512 8843 | 1.54 050 | 1.525 2860 | 1.53 391 | 1.537 5055 | 1.52 765 |
| 27 | 1.500 4995 | 1.54 733 | 1.513 0926 | 1.54 038 | 1.525 4911 | 1.53 380 | 1.537 7077 | 1.52 755 |
| 28 | 1.500 7111 | 1.54 721 | 1.513 3008 | 1.54 027 | 1.525 6962 | 1.53 370 | 1.537 9099 | 1.52 744 |
| 29 | 1.500 9226 | 1.54 709 | 1.513 5089 | 1.54 016 | 1.525 9012 | 1.53 359 | 1.538 1119 | 1.52 734 |
| 30 | 1.501 1340 | 1.54 697 | 1.513 7170 | 1.54 005 | 1.526 1061 | 1.53 348 | 1.538 3140 | 1.52 724 |
| 31 | 1.501 3454 | 1.54 685 | 1.513 9250 | 1.53 993 | 1.526 3111 | 1.53 337 | 1.538 5160 | 1.52 714 |
| 32 | 1.501 5567 | 1.54 674 | 1.514 1330 | 1.53 982 | 1.526 5159 | 1.53 327 | 1.538 7179 | 1.52 704 |
| 33 | 1.501 7680 | 1.54 662 | 1.514 3409 | 1.53 971 | 1.526 7207 | 1.53 316 | 1.538 9198 | 1.52 693 |
| 34 | 1.501 9792 | 1.54 650 | 1.514 5488 | 1.53 960 | 1.526 9255 | 1.53 306 | 1.539 1217 | 1.52 683 |
| 35 | 1.502 1903 | 1.54 638 | 1.514 7566 | 1.53 949 | 1.527 1302 | 1.53 295 | 1.539 3235 | 1.52 673 |
| 36 | 1.502 4014 | 1.54 627 | 1.514 9644 | 1.53 937 | 1.527 3349 | 1.53 285 | 1.539 5253 | 1.52 663 |
| 37 | 1.502 6124 | 1.54 615 | 1.515 1721 | 1.53 926 | 1.527 5395 | 1.53 274 | 1.539 7270 | 1.52 653 |
| 38 | 1.502 8234 | 1.54 603 | 1.515 3798 | 1.53 915 | 1.527 7441 | 1.53 263 | 1.539 9286 | 1.52 643 |
| 39 | 1.503 0343 | 1.54 591 | 1.515 5874 | 1.53 904 | 1.527 9486 | 1.53 253 | 1.540 1303 | 1.52 633 |
| 40 | 1.503 2452 | 1.54 579 | 1.515 7950 | 1.53 893 | 1.528 1530 | 1.53 242 | 1.540 3318 | 1.52 623 |
| 41 | 1.503 4560 | 1.54 567 | 1.516 0025 | 1.53 882 | 1.528 3575 | 1.53 231 | 1.540 5334 | 1.52 613 |
| 42 | 1.503 6667 | 1.54 556 | 1.516 2099 | 1.53 871 | 1.528 5618 | 1.53 221 | 1.540 7348 | 1.52 603 |
| 43 | 1.503 8774 | 1.54 544 | 1.516 4173 | 1.53 860 | 1.528 7662 | 1.53 210 | 1.540 9363 | 1.52 593 |
| 44 | 1.504 0881 | 1.54 532 | 1.516 6247 | 1.53 849 | 1.528 9704 | 1.53 200 | 1.541 1377 | 1.52 584 |
| 45 | 1.504 2986 | 1.54 521 | 1.516 8319 | 1.53 837 | 1.529 1746 | 1.53 189 | 1.541 3390 | 1.52 574 |
| 46 | 1.504 5092 | 1.54 509 | 1.517 0392 | 1.53 826 | 1.529 3788 | 1.53 179 | 1.541 5403 | 1.52 564 |
| 47 | 1.504 7196 | 1.54 497 | 1.517 2464 | 1.53 815 | 1.529 5829 | 1.53 168 | 1.541 7416 | 1.52 554 |
| 48 | 1.504 9300 | 1.54 486 | 1.517 4535 | 1.53 804 | 1.529 7870 | 1.53 158 | 1.541 9428 | 1.52 544 |
| 49 | 1.505 1404 | 1.54 474 | 1.517 6606 | 1.53 793 | 1.529 9910 | 1.53 147 | 1.542 1439 | 1.52 534 |
| 50 | 1.505 3507 | 1.54 462 | 1.517 8676 | 1.53 782 | 1.530 1950 | 1.53 137 | 1.542 3450 | 1.52 524 |
| 51 | 1.505 5609 | 1.54 450 | 1.518 0746 | 1.53 771 | 1.530 3989 | 1.53 126 | 1.542 5461 | 1.52 514 |
| 52 | 1.505 7711 | 1.54 439 | 1.518 2815 | 1.53 760 | 1.530 6028 | 1.53 116 | 1.542 7471 | 1.52 504 |
| 53 | 1.505 9813 | 1.54 427 | 1.518 4884 | 1.53 749 | 1.530 8066 | 1.53 105 | 1.542 9481 | 1.52 494 |
| 54 | 1.506 1913 | 1.54 416 | 1.518 6952 | 1.53 738 | 1.531 0104 | 1.53 095 | 1.543 1490 | 1.52 485 |
| 55 | 1.506 4013 | 1.54 404 | 1.518 9020 | 1.53 727 | 1.531 2141 | 1.53 084 | 1.543 3499 | 1.52 475 |
| 56 | 1.506 6113 | 1.54 393 | 1.519 1087 | 1.53 716 | 1.531 4178 | 1.53 074 | 1.543 5507 | 1.52 465 |
| 57 | 1.506 8212 | 1.54 381 | 1.519 3153 | 1.53 705 | 1.531 6214 | 1.53 063 | 1.543 7515 | 1.52 455 |
| 58 | 1.507 0310 | 1.54 369 | 1.519 5219 | 1.53 694 | 1.531 8250 | 1.53 053 | 1.543 9523 | 1.52 445 |
| 59 | 1.507 2408 | 1.54 358 | 1.519 7285 | 1.53 683 | 1.532 0285 | 1.53 042 | 1.544 1530 | 1.52 435 |
| 60 | 1.507 4505 | 1.54 346 | 1.519 9350 | 1.53 672 | 1.532 2320 | 1.53 032 | 1.544 3536 | 1.52 425 |

# Tafel V.

| v | 44° log M | 44° log Diff. 1″ | 45° log M | 45° log Diff. 1″ | 46° log M | 46° log Diff. 1″ | 47° log M | 47° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.544 3536 | 1.52 425 | 1.556 3113 | 1.51 849 | 1.568 1158 | 1.51 304 | 1.579 7771 | 1.50 790 |
| 1 | 1.544 5542 | 1.52 415 | 1.556 5093 | 1.51 840 | 1.568 3113 | 1.51 295 | 1.579 9703 | 1.50 781 |
| 2 | 1.544 7548 | 1.52 405 | 1.556 7072 | 1.51 830 | 1.568 5067 | 1.51 287 | 1.580 1635 | 1.50 773 |
| 3 | 1.544 9553 | 1.52 395 | 1.556 9051 | 1.51 821 | 1.568 7022 | 1.51 278 | 1.580 3566 | 1.50 765 |
| 4 | 1.545 1558 | 1.52 385 | 1.557 1029 | 1.51 812 | 1.568 8975 | 1.51 269 | 1.580 5497 | 1.50 757 |
| 5 | 1.545 3562 | 1.52 375 | 1.557 3007 | 1.51 802 | 1.569 0929 | 1.51 260 | 1.580 7428 | 1.50 748 |
| 6 | 1.545 5566 | 1.52 366 | 1.557 4985 | 1.51 793 | 1.569 2882 | 1.51 251 | 1.580 9358 | 1.50 740 |
| 7 | 1.545 7569 | 1.52 356 | 1.557 6962 | 1.51 784 | 1.569 4835 | 1.51 243 | 1.581 1287 | 1.50 732 |
| 8 | 1.545 9572 | 1.52 346 | 1.557 8939 | 1.51 774 | 1.569 6787 | 1.51 234 | 1.581 3217 | 1.50 723 |
| 9 | 1.546 1575 | 1.52 336 | 1.558 0915 | 1.51 765 | 1.569 8739 | 1.51 225 | 1.581 5146 | 1.50 715 |
| 10 | 1.546 3577 | 1.52 326 | 1.558 2891 | 1.51 756 | 1.570 0690 | 1.51 216 | 1.581 7075 | 1.50 707 |
| 11 | 1.546 5578 | 1.52 316 | 1.558 4866 | 1.51 747 | 1.570 2641 | 1.51 207 | 1.581 9003 | 1.50 698 |
| 12 | 1.546 7579 | 1.52 307 | 1.558 6841 | 1.51 737 | 1.570 4592 | 1.51 199 | 1.582 0931 | 1.50 690 |
| 13 | 1.546 9580 | 1.52 297 | 1.558 8816 | 1.51 728 | 1.570 6542 | 1.51 190 | 1.582 2858 | 1.50 682 |
| 14 | 1.547 1580 | 1.52 287 | 1.559 0790 | 1.51 719 | 1.570 8492 | 1.51 181 | 1.582 4786 | 1.50 674 |
| 15 | 1.547 3580 | 1.52 278 | 1.559 2764 | 1.51 709 | 1.571 0442 | 1.51 173 | 1.582 6712 | 1.50 666 |
| 16 | 1.547 5579 | 1.52 268 | 1.559 4737 | 1.51 700 | 1.571 2391 | 1.51 164 | 1.582 8639 | 1.50 657 |
| 17 | 1.547 7578 | 1.52 258 | 1.559 6710 | 1.51 691 | 1.571 4339 | 1.51 155 | 1.583 0565 | 1.50 649 |
| 18 | 1.547 9576 | 1.52 249 | 1.559 8683 | 1.51 682 | 1.571 6288 | 1.51 147 | 1.583 2491 | 1.50 641 |
| 19 | 1.548 1574 | 1.52 239 | 1.560 0655 | 1.51 673 | 1.571 8236 | 1.51 138 | 1.583 4416 | 1.50 633 |
| 20 | 1.548 3572 | 1.52 229 | 1.560 2627 | 1.51 664 | 1.572 0183 | 1.51 129 | 1.583 6341 | 1.50 625 |
| 21 | 1.548 5569 | 1.52 219 | 1.560 4598 | 1.51 655 | 1.572 2130 | 1.51 120 | 1.583 8266 | 1.50 617 |
| 22 | 1.548 7566 | 1.52 210 | 1.560 6569 | 1.51 645 | 1.572 4077 | 1.51 112 | 1.584 0190 | 1.50 609 |
| 23 | 1.548 9562 | 1.52 200 | 1.560 8539 | 1.51 636 | 1.572 6023 | 1.51 103 | 1.584 2114 | 1.50 601 |
| 24 | 1.549 1558 | 1.52 190 | 1.561 0509 | 1.51 627 | 1.572 7969 | 1.51 095 | 1.584 4038 | 1.50 592 |
| 25 | 1.549 3553 | 1.52 181 | 1.561 2479 | 1.51 618 | 1.572 9915 | 1.51 086 | 1.584 5961 | 1.50 584 |
| 26 | 1.549 5548 | 1.52 171 | 1.561 4448 | 1.51 609 | 1.573 1860 | 1.51 077 | 1.584 7884 | 1.50 576 |
| 27 | 1.549 7542 | 1.52 162 | 1.561 6417 | 1.51 600 | 1.573 3805 | 1.51 069 | 1.584 9806 | 1.50 568 |
| 28 | 1.549 9536 | 1.52 152 | 1.561 8385 | 1.51 591 | 1.573 5750 | 1.51 060 | 1.585 1728 | 1.50 560 |
| 29 | 1.550 1530 | 1.52 143 | 1.562 0353 | 1.51 582 | 1.573 7694 | 1.51 052 | 1.585 3650 | 1.50 552 |
| 30 | 1.550 3523 | 1.52 133 | 1.562 2321 | 1.51 573 | 1.573 9637 | 1.51 043 | 1.585 5572 | 1.50 544 |
| 31 | 1.550 5515 | 1.52 123 | 1.562 4288 | 1.51 564 | 1.574 1581 | 1.51 034 | 1.585 7493 | 1.50 536 |
| 32 | 1.550 7508 | 1.52 114 | 1.562 6254 | 1.51 555 | 1.574 3524 | 1.51 026 | 1.585 9413 | 1.50 528 |
| 33 | 1.550 9499 | 1.52 104 | 1.562 8221 | 1.51 546 | 1.574 5466 | 1.51 017 | 1.586 1334 | 1.50 519 |
| 34 | 1.551 1491 | 1.52 095 | 1.563 0187 | 1.51 537 | 1.574 7408 | 1.51 009 | 1.586 3254 | 1.50 511 |
| 35 | 1.551 3482 | 1.52 085 | 1.563 2152 | 1.51 527 | 1.574 9350 | 1.51 000 | 1.586 5173 | 1.50 503 |
| 36 | 1.551 5472 | 1.52 076 | 1.563 4117 | 1.51 518 | 1.575 1291 | 1.50 992 | 1.586 7093 | 1.50 495 |
| 37 | 1.551 7462 | 1.52 066 | 1.563 6082 | 1.51 509 | 1.575 3232 | 1.50 983 | 1.586 9012 | 1.50 487 |
| 38 | 1.551 9452 | 1.52 057 | 1.563 8046 | 1.51 500 | 1.575 5173 | 1.50 975 | 1.587 0930 | 1.50 479 |
| 39 | 1.552 1441 | 1.52 047 | 1.564 0010 | 1.51 491 | 1.575 7113 | 1.50 966 | 1.587 2848 | 1.50 471 |
| 40 | 1.552 3430 | 1.52 038 | 1.564 1974 | 1.51 482 | 1.575 9053 | 1.50 958 | 1.587 4766 | 1.50 463 |
| 41 | 1.552 5418 | 1.52 028 | 1.564 3937 | 1.51 473 | 1.576 0993 | 1.50 949 | 1.587 6684 | 1.50 455 |
| 42 | 1.552 7406 | 1.52 019 | 1.564 5899 | 1.51 464 | 1.576 2932 | 1.50 941 | 1.587 8601 | 1.50 447 |
| 43 | 1.552 9393 | 1.52 009 | 1.564 7861 | 1.51 455 | 1.576 4871 | 1.50 932 | 1.588 0518 | 1.50 439 |
| 44 | 1.553 1380 | 1.52 000 | 1.564 9823 | 1.51 446 | 1.576 6809 | 1.50 924 | 1.588 2434 | 1.50 431 |
| 45 | 1.553 3367 | 1.51 990 | 1.565 1785 | 1.51 437 | 1.576 8747 | 1.50 915 | 1.588 4350 | 1.50 423 |
| 46 | 1.553 5353 | 1.51 981 | 1.565 3746 | 1.51 428 | 1.577 0685 | 1.50 907 | 1.588 6266 | 1.50 415 |
| 47 | 1.553 7338 | 1.51 971 | 1.565 5706 | 1.51 419 | 1.577 2622 | 1.50 898 | 1.588 8181 | 1.50 407 |
| 48 | 1.553 9324 | 1.51 962 | 1.565 7667 | 1.51 410 | 1.577 4559 | 1.50 890 | 1.589 0096 | 1.50 399 |
| 49 | 1.554 1309 | 1.51 952 | 1.565 9626 | 1.51 401 | 1.577 6495 | 1.50 881 | 1.589 2011 | 1.50 391 |
| 50 | 1.554 3293 | 1.51 943 | 1.566 1586 | 1.51 392 | 1.577 8431 | 1.50 873 | 1.589 3925 | 1.50 383 |
| 51 | 1.554 5277 | 1.51 933 | 1.566 3545 | 1.51 383 | 1.578 0367 | 1.50 864 | 1.589 5839 | 1.50 375 |
| 52 | 1.554 7260 | 1.51 924 | 1.566 5503 | 1.51 374 | 1.578 2302 | 1.50 856 | 1.589 7753 | 1.50 367 |
| 53 | 1.554 9243 | 1.51 914 | 1.566 7462 | 1.51 366 | 1.578 4237 | 1.50 848 | 1.589 9666 | 1.50 359 |
| 54 | 1.555 1226 | 1.51 905 | 1.566 9419 | 1.51 357 | 1.578 6172 | 1.50 839 | 1.590 1579 | 1.50 351 |
| 55 | 1.555 3208 | 1.51 896 | 1.567 1377 | 1.51 348 | 1.578 8106 | 1.50 831 | 1.590 3492 | 1.50 344 |
| 56 | 1.555 5190 | 1.51 886 | 1.567 3334 | 1.51 339 | 1.579 0040 | 1.50 823 | 1.590 5404 | 1.50 336 |
| 57 | 1.555 7172 | 1.51 877 | 1.567 5290 | 1.51 331 | 1.579 1973 | 1.50 815 | 1.590 7316 | 1.50 328 |
| 58 | 1.555 9153 | 1.51 868 | 1.567 7247 | 1.51 322 | 1.579 3906 | 1.50 806 | 1.590 9227 | 1.50 320 |
| 59 | 1.556 1133 | 1.51 858 | 1.567 9202 | 1.51 313 | 1.579 5839 | 1.50 798 | 1.591 1139 | 1.50 312 |
| 60 | 1.556 3113 | 1.51 849 | 1.568 1158 | 1.51 304 | 1.579 7771 | 1.50 790 | 1.591 3049 | 1.50 305 |

# Tafel V.

| v | 48° log M | 48° log Diff. 1″ | 49° log M | 49° log Diff. 1″ | 50° log M | 50° log Diff. 1″ | 51° log M | 51° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.591 3049 | 1.50 304 | 1.602 7083 | 1.49 846 | 1.613 9957 | 1.49 417 | 1.625 1754 | 1.49 014 |
| 1 | 1.591 4960 | 1.50 296 | 1.602 8973 | 1.49 839 | 1.614 1829 | 1.49 410 | 1.625 3609 | 1.49 007 |
| 2 | 1.591 6870 | 1.50 289 | 1.603 0863 | 1.49 831 | 1.614 3700 | 1.49 403 | 1.625 5463 | 1.49 001 |
| 3 | 1.591 8780 | 1.50 281 | 1.603 2753 | 1.49 824 | 1.614 5572 | 1.49 396 | 1.625 7317 | 1.48 994 |
| 4 | 1.592 0689 | 1.50 273 | 1.603 4643 | 1.49 816 | 1.614 7443 | 1.49 389 | 1.625 9171 | 1.48 988 |
| 5 | 1.592 2599 | 1.50 265 | 1.603 6532 | 1.49 809 | 1.614 9313 | 1.49 383 | 1.626 1025 | 1.48 981 |
| 6 | 1.592 4507 | 1.50 257 | 1.603 8421 | 1.49 802 | 1.615 1184 | 1.49 376 | 1.626 2878 | 1.48 975 |
| 7 | 1.592 6416 | 1.50 250 | 1.604 0309 | 1.49 794 | 1.615 3054 | 1.49 369 | 1.626 4731 | 1.48 968 |
| 8 | 1.592 8324 | 1.50 242 | 1.604 2198 | 1.49 787 | 1.615 4924 | 1.49 362 | 1.626 6582 | 1.48 962 |
| 9 | 1.593 0231 | 1.50 234 | 1.604 4086 | 1.49 779 | 1.615 6793 | 1.49 355 | 1.626 8436 | 1.48 955 |
| 10 | 1.593 2139 | 1.50 226 | 1.604 5973 | 1.49 772 | 1.615 8662 | 1.49 348 | 1.627 0288 | 1.48 949 |
| 11 | 1.593 4046 | 1.50 218 | 1.604 7861 | 1.49 765 | 1.616 0531 | 1.49 341 | 1.627 2140 | 1.48 943 |
| 12 | 1.593 5953 | 1.50 211 | 1.604 9748 | 1.49 757 | 1.616 2400 | 1.49 334 | 1.627 3991 | 1.48 936 |
| 13 | 1.593 7859 | 1.50 203 | 1.605 1634 | 1.49 750 | 1.616 4269 | 1.49 327 | 1.627 5843 | 1.48 930 |
| 14 | 1.593 9765 | 1.50 195 | 1.605 3521 | 1.49 743 | 1.616 6137 | 1.49 320 | 1.627 7694 | 1.48 923 |
| 15 | 1.594 1671 | 1.50 187 | 1.605 5407 | 1.49 736 | 1.616 8004 | 1.49 314 | 1.627 9544 | 1.48 917 |
| 16 | 1.594 3576 | 1.50 179 | 1.605 7292 | 1.49 728 | 1.616 9872 | 1.49 307 | 1.628 1395 | 1.48 911 |
| 17 | 1.594 5481 | 1.50 172 | 1.605 9178 | 1.49 721 | 1.617 1739 | 1.49 300 | 1.628 3245 | 1.48 904 |
| 18 | 1.594 7386 | 1.50 164 | 1.606 1063 | 1.49 714 | 1.617 3606 | 1.49 293 | 1.628 5095 | 1.48 898 |
| 19 | 1.594 9290 | 1.50 156 | 1.606 2948 | 1.49 707 | 1.617 5472 | 1.49 286 | 1.628 6945 | 1.48 891 |
| 20 | 1.595 1195 | 1.50 148 | 1.606 4832 | 1.49 700 | 1.617 7338 | 1.49 279 | 1.628 8794 | 1.48 885 |
| 21 | 1.595 3098 | 1.50 140 | 1.606 6716 | 1.49 693 | 1.617 9204 | 1.49 272 | 1.629 0643 | 1.48 879 |
| 22 | 1.595 5002 | 1.50 133 | 1.606 8600 | 1.49 685 | 1.618 1070 | 1.49 266 | 1.629 2492 | 1.48 872 |
| 23 | 1.595 6905 | 1.50 125 | 1.607 0484 | 1.49 678 | 1.618 2936 | 1.49 259 | 1.629 4341 | 1.48 866 |
| 24 | 1.595 8807 | 1.50 117 | 1.607 2367 | 1.49 671 | 1.618 4801 | 1.49 252 | 1.629 6189 | 1.48 859 |
| 25 | 1.596 0710 | 1.50 110 | 1.607 4250 | 1.49 664 | 1.618 6665 | 1.49 245 | 1.629 8037 | 1.48 853 |
| 26 | 1.596 2611 | 1.50 102 | 1.607 6132 | 1.49 656 | 1.618 8530 | 1.49 238 | 1.629 9885 | 1.48 847 |
| 27 | 1.596 4513 | 1.50 094 | 1.607 8014 | 1.49 649 | 1.619 0394 | 1.49 232 | 1.630 1732 | 1.48 840 |
| 28 | 1.596 6414 | 1.50 087 | 1.607 9896 | 1.49 642 | 1.619 2258 | 1.49 225 | 1.630 3580 | 1.48 834 |
| 29 | 1.596 8315 | 1.50 079 | 1.608 1778 | 1.49 635 | 1.619 4122 | 1.49 218 | 1.630 5427 | 1.48 827 |
| 30 | 1.597 0216 | 1.50 071 | 1.608 3659 | 1.49 628 | 1.619 5985 | 1.49 211 | 1.630 7273 | 1.48 821 |
| 31 | 1.597 2116 | 1.50 063 | 1.608 5540 | 1.49 621 | 1.619 7848 | 1.49 204 | 1.630 9120 | 1.48 815 |
| 32 | 1.597 4016 | 1.50 056 | 1.608 7421 | 1.49 614 | 1.619 9711 | 1.49 198 | 1.631 0966 | 1.48 809 |
| 33 | 1.597 5916 | 1.50 048 | 1.608 9302 | 1.49 607 | 1.620 1574 | 1.49 191 | 1.631 2812 | 1.48 802 |
| 34 | 1.597 7815 | 1.50 041 | 1.609 1182 | 1.49 599 | 1.620 3436 | 1.49 184 | 1.631 4658 | 1.48 796 |
| 35 | 1.597 9714 | 1.50 033 | 1.609 3061 | 1.49 592 | 1.620 5298 | 1.49 178 | 1.631 6503 | 1.48 790 |
| 36 | 1.598 1613 | 1.50 026 | 1.609 4941 | 1.49 585 | 1.620 7159 | 1.49 171 | 1.631 8348 | 1.48 784 |
| 37 | 1.598 3511 | 1.50 018 | 1.609 6820 | 1.49 578 | 1.620 9021 | 1.49 165 | 1.632 0193 | 1.48 778 |
| 38 | 1.598 5409 | 1.50 011 | 1.609 8699 | 1.49 571 | 1.621 0882 | 1.49 158 | 1.632 2038 | 1.48 771 |
| 39 | 1.598 7307 | 1.50 003 | 1.610 0577 | 1.49 564 | 1.621 2743 | 1.49 151 | 1.632 3882 | 1.48 765 |
| 40 | 1.598 9205 | 1.49 996 | 1.610 2456 | 1.49 557 | 1.621 4603 | 1.49 145 | 1.632 5726 | 1.48 759 |
| 41 | 1.599 1102 | 1.49 988 | 1.610 4334 | 1.49 550 | 1.621 6463 | 1.49 138 | 1.632 7570 | 1.48 753 |
| 42 | 1.599 2998 | 1.49 981 | 1.610 6211 | 1.49 543 | 1.621 8323 | 1.49 132 | 1.632 9413 | 1.48 747 |
| 43 | 1.599 4895 | 1.49 973 | 1.610 8089 | 1.49 536 | 1.622 0183 | 1.49 125 | 1.633 1257 | 1.48 741 |
| 44 | 1.599 6791 | 1.49 966 | 1.610 9966 | 1.49 528 | 1.622 2042 | 1.49 118 | 1.633 3100 | 1.48 734 |
| 45 | 1.599 8686 | 1.49 958 | 1.611 1842 | 1.49 521 | 1.622 3902 | 1.49 112 | 1.633 4942 | 1.48 728 |
| 46 | 1.600 0582 | 1.49 950 | 1.611 3719 | 1.49 514 | 1.622 5760 | 1.49 105 | 1.633 6785 | 1.48 722 |
| 47 | 1.600 2477 | 1.49 943 | 1.611 5595 | 1.49 507 | 1.622 7619 | 1.49 099 | 1.633 8627 | 1.48 716 |
| 48 | 1.600 4371 | 1.49 935 | 1.611 7471 | 1.49 500 | 1.622 9477 | 1.49 092 | 1.634 0469 | 1.48 710 |
| 49 | 1.600 6266 | 1.49 928 | 1.611 9346 | 1.49 493 | 1.623 1335 | 1.49 086 | 1.634 2311 | 1.48 704 |
| 50 | 1.600 8160 | 1.49 921 | 1.612 1222 | 1.49 486 | 1.623 3193 | 1.49 079 | 1.634 4152 | 1.48 698 |
| 51 | 1.601 0054 | 1.49 913 | 1.612 3096 | 1.49 479 | 1.623 5050 | 1.49 072 | 1.634 5993 | 1.48 692 |
| 52 | 1.601 1947 | 1.49 906 | 1.612 4971 | 1.49 472 | 1.623 6907 | 1.49 066 | 1.634 7834 | 1.48 686 |
| 53 | 1.601 3840 | 1.49 898 | 1.612 6846 | 1.49 465 | 1.623 8764 | 1.49 059 | 1.634 9675 | 1.48 679 |
| 54 | 1.601 5733 | 1.49 891 | 1.612 8720 | 1.49 458 | 1.624 0621 | 1.49 053 | 1.635 1515 | 1.48 673 |
| 55 | 1.601 7625 | 1.49 883 | 1.613 0593 | 1.49 451 | 1.624 2477 | 1.49 046 | 1.635 3356 | 1.48 667 |
| 56 | 1.601 9517 | 1.49 876 | 1.613 2466 | 1.49 445 | 1.624 4333 | 1.49 040 | 1.635 5196 | 1.48 661 |
| 57 | 1.602 1409 | 1.49 868 | 1.613 4339 | 1.49 438 | 1.624 6189 | 1.49 033 | 1.635 7035 | 1.48 655 |
| 58 | 1.602 3301 | 1.49 861 | 1.613 6212 | 1.49 431 | 1.624 8044 | 1.49 027 | 1.635 8874 | 1.48 649 |
| 59 | 1.602 5192 | 1.49 853 | 1.613 8085 | 1.49 424 | 1.624 9899 | 1.49 020 | 1.635 0713 | 1.48 643 |
| 60 | 1.602 7083 | 1.49 846 | 1.613 9957 | 1.49 417 | 1.625 1754 | 1.49 014 | 1.636 2552 | 1.48 637 |

## Tafel V.

| v | 52° log M | 52° log Diff. 1″ | 53° log M | 53° log Diff. 1″ | 54° log M | 54° log Diff. 1″ | 55° log M | 55° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.636 2552 | 1.48 637 | 1.647 2426 | 1.48 286 | 1.658 1447 | 1.47 960 | 1.668 9682 | 1.47 657 |
| 1 | 1.636 4391 | 1.48 631 | 1.647 4250 | 1.48 280 | 1.658 3257 | 1.47 955 | 1.669 1480 | 1.47 652 |
| 2 | 1.636 6229 | 1.48 625 | 1.647 6073 | 1.48 275 | 1.658 5067 | 1.47 949 | 1.669 3277 | 1.47 648 |
| 3 | 1.636 8067 | 1.48 618 | 1.647 7897 | 1.48 269 | 1.658 6876 | 1.47 944 | 1.669 5074 | 1.47 643 |
| 4 | 1.636 9905 | 1.48 612 | 1.647 9720 | 1.48 263 | 1.658 8686 | 1.47 939 | 1.669 6871 | 1.47 638 |
| 5 | 1.637 1743 | 1.48 606 | 1.648 1543 | 1.48 258 | 1.659 0495 | 1.47 934 | 1.669 8668 | 1.47 634 |
| 6 | 1.637 3580 | 1.48 600 | 1.648 3365 | 1.48 252 | 1.659 2304 | 1.47 929 | 1.670 0465 | 1.47 629 |
| 7 | 1.637 5417 | 1.48 594 | 1.648 5188 | 1.48 247 | 1.659 4113 | 1.47 923 | 1.670 2261 | 1.47 624 |
| 8 | 1.637 7254 | 1.48 588 | 1.648 7010 | 1.48 241 | 1.659 5922 | 1.47 918 | 1.670 4058 | 1.47 620 |
| 9 | 1.637 9091 | 1.48 582 | 1.648 8832 | 1.48 235 | 1.659 7730 | 1.47 913 | 1.670 5854 | 1.47 615 |
| 10 | 1.638 0927 | 1.48 576 | 1.649 0654 | 1.48 230 | 1.659 9539 | 1.47 908 | 1.670 7650 | 1.47 610 |
| 11 | 1.638 2763 | 1.48 570 | 1.649 2475 | 1.48 224 | 1.660 1346 | 1.47 903 | 1.670 9445 | 1.47 605 |
| 12 | 1.638 4599 | 1.48 564 | 1.649 4296 | 1.48 219 | 1.660 3154 | 1.47 897 | 1.671 1241 | 1.47 601 |
| 13 | 1.638 6434 | 1.48 558 | 1.649 6117 | 1.48 213 | 1.660 4962 | 1.47 892 | 1.671 3036 | 1.47 596 |
| 14 | 1.638 8270 | 1.48 552 | 1.649 7938 | 1.48 207 | 1.660 6769 | 1.47 887 | 1.671 4831 | 1.47 591 |
| 15 | 1.639 0105 | 1.48 546 | 1.649 9759 | 1.48 202 | 1.660 8576 | 1.47 882 | 1.671 6626 | 1.47 587 |
| 16 | 1.639 1940 | 1.48 540 | 1.650 1579 | 1.48 196 | 1.661 0383 | 1.47 877 | 1.671 8421 | 1.47 582 |
| 17 | 1.639 3774 | 1.48 534 | 1.650 3399 | 1.48 191 | 1.661 2190 | 1.47 871 | 1.672 0215 | 1.47 577 |
| 18 | 1.639 5608 | 1.48 528 | 1.650 5219 | 1.48 185 | 1.661 3997 | 1.47 866 | 1.672 2009 | 1.47 573 |
| 19 | 1.639 7442 | 1.48 522 | 1.650 7038 | 1.48 179 | 1.661 5803 | 1.47 861 | 1.672 3804 | 1.47 568 |
| 20 | 1.639 9276 | 1.48 516 | 1.650 8858 | 1.48 174 | 1.661 7609 | 1.47 856 | 1.672 5598 | 1.47 563 |
| 21 | 1.640 1110 | 1.48 510 | 1.651 0677 | 1.48 168 | 1.661 9415 | 1.47 851 | 1.672 7391 | 1.47 559 |
| 22 | 1.640 2943 | 1.48 504 | 1.651 2496 | 1.48 163 | 1.662 1220 | 1.47 846 | 1.672 9185 | 1.47 554 |
| 23 | 1.640 4776 | 1.48 498 | 1.651 4314 | 1.48 157 | 1.662 3026 | 1.47 841 | 1.673 0978 | 1.47 549 |
| 24 | 1.640 6609 | 1.48 492 | 1.651 6133 | 1.48 152 | 1.662 4831 | 1.47 836 | 1.673 2771 | 1.47 545 |
| 25 | 1.640 8441 | 1.48 487 | 1.651 7951 | 1.48 146 | 1.662 6636 | 1.47 831 | 1.673 456[illegible] | 1.47 540 |
| 26 | 1.641 0274 | 1.48 481 | 1.651 9769 | 1.48 141 | 1.662 8441 | 1.47 826 | 1.673 6357 | 1.47 535 |
| 27 | 1.641 2106 | 1.48 475 | 1.652 1587 | 1.48 135 | 1.663 0246 | 1.47 821 | 1.673 8150 | 1.47 531 |
| 28 | 1.641 3937 | 1.48 469 | 1.652 3404 | 1.48 130 | 1.663 2050 | 1.47 816 | 1.673 9942 | 1.47 526 |
| 29 | 1.641 5769 | 1.48 463 | 1.652 5222 | 1.48 124 | 1.663 3854 | 1.47 811 | 1.674 1734 | 1.47 522 |
| 30 | 1.641 7600 | 1.48 457 | 1.652 7039 | 1.48 119 | 1.663 5658 | 1.47 806 | 1.674 3526 | 1.47 517 |
| 31 | 1.641 9431 | 1.48 451 | 1.652 8855 | 1.48 114 | 1.663 7462 | 1.47 801 | 1.674 5318 | 1.47 512 |
| 32 | 1.642 1262 | 1.48 445 | 1.653 0672 | 1.48 108 | 1.663 9266 | 1.47 795 | 1.674 7110 | 1.47 508 |
| 33 | 1.642 3093 | 1.48 440 | 1.653 2488 | 1.48 103 | 1.664 1069 | 1.47 790 | 1.674 8901 | 1.47 503 |
| 34 | 1.642 4923 | 1.48 434 | 1.653 4305 | 1.48 098 | 1.664 2872 | 1.47 785 | 1.675 0692 | 1.47 498 |
| 35 | 1.642 6753 | 1.48 428 | 1.653 6121 | 1.48 092 | 1.664 4675 | 1.47 780 | 1.675 2483 | 1.47 494 |
| 36 | 1.642 8583 | 1.48 422 | 1.653 7936 | 1.48 087 | 1.664 6478 | 1.47 775 | 1.675 4274 | 1.47 489 |
| 37 | 1.643 0413 | 1.48 416 | 1.653 9752 | 1.48 081 | 1.664 8280 | 1.47 770 | 1.675 6065 | 1.47 484 |
| 38 | 1.643 2242 | 1.48 411 | 1.654 1567 | 1.48 076 | 1.665 0083 | 1.47 765 | 1.675 7855 | 1.47 480 |
| 39 | 1.643 4071 | 1.48 405 | 1.654 3382 | 1.48 070 | 1.665 1885 | 1.47 760 | 1.675 9645 | 1.47 475 |
| 40 | 1.643 5900 | 1.48 399 | 1.654 5197 | 1.48 065 | 1.665 3687 | 1.47 755 | 1.676 1436 | 1.47 470 |
| 41 | 1.643 7728 | 1.48 393 | 1.654 7011 | 1.48 059 | 1.665 5488 | 1.47 750 | 1.676 3225 | 1.47 465 |
| 42 | 1.643 9557 | 1.48 388 | 1.654 8826 | 1.48 054 | 1.665 7290 | 1.47 745 | 1.676 5015 | 1.47 461 |
| 43 | 1.644 1385 | 1.48 382 | 1.655 0640 | 1.48 049 | 1.665 9091 | 1.47 740 | 1.676 6805 | 1.47 456 |
| 44 | 1.644 3213 | 1.48 376 | 1.655 2454 | 1.48 043 | 1.666 0892 | 1.47 735 | 1.676 8594 | 1.47 452 |
| 45 | 1.644 5040 | 1.48 370 | 1.655 4268 | 1.48 038 | 1.666 2693 | 1.47 731 | 1.677 0383 | 1.47 447 |
| 46 | 1.644 6868 | 1.48 365 | 1.655 6081 | 1.48 032 | 1.666 4494 | 1.47 726 | 1.677 2172 | 1.47 443 |
| 47 | 1.644 8695 | 1.48 359 | 1.655 7894 | 1.48 027 | 1.666 6294 | 1.47 721 | 1.677 3961 | 1.47 438 |
| 48 | 1.645 0522 | 1.48 353 | 1.655 9707 | 1.48 022 | 1.666 8095 | 1.47 716 | 1.677 5750 | 1.47 434 |
| 49 | 1.645 2349 | 1.48 348 | 1.656 1520 | 1.48 017 | 1.666 9895 | 1.47 711 | 1.677 7538 | 1.47 429 |
| 50 | 1.645 4175 | 1.48 342 | 1.656 3333 | 1.48 012 | 1.667 1695 | 1.47 706 | 1.677 9326 | 1.47 425 |
| 51 | 1.645 6001 | 1.48 336 | 1.656 5145 | 1.48 006 | 1.667 3494 | 1.47 701 | 1.678 1114 | 1.47 420 |
| 52 | 1.645 7827 | 1.48 331 | 1.656 6957 | 1.48 001 | 1.667 5294 | 1.47 696 | 1.678 2902 | 1.47 416 |
| 53 | 1.645 9653 | 1.48 325 | 1.656 8769 | 1.47 996 | 1.667 7093 | 1.47 691 | 1.678 4690 | 1.47 411 |
| 54 | 1.646 1478 | 1.48 319 | 1.657 0581 | 1.47 991 | 1.667 8892 | 1.47 686 | 1.678 6477 | 1.47 407 |
| 55 | 1.646 3304 | 1.48 314 | 1.657 2392 | 1.47 985 | 1.668 0691 | 1.47 682 | 1.678 8265 | 1.47 402 |
| 56 | 1.646 5129 | 1.48 308 | 1.657 4204 | 1.47 980 | 1.668 2489 | 1.47 677 | 1.679 0052 | 1.47 398 |
| 57 | 1.646 6953 | 1.48 303 | 1.657 6015 | 1.47 975 | 1.668 4288 | 1.47 672 | 1.679 1839 | 1.47 393 |
| 58 | 1.646 8778 | 1.48 297 | 1.657 7825 | 1.47 970 | 1.668 6086 | 1.47 667 | 1.679 3625 | 1.47 389 |
| 59 | 1.647 0602 | 1.48 291 | 1.657 9636 | 1.47 965 | 1.668 7884 | 1.47 662 | 1.679 5412 | 1.47 384 |
| 60 | 1.647 2426 | 1.48 286 | 1.658 1447 | 1.47 960 | 1.668 9682 | 1.47 657 | 1.679 7198 | 1.47 380 |

# Tafel V.

| $v$ | 56° | | 57° | | 58° | | 59° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ |
| 0′ | 1.679 7198 | 1.47 380 | 1.690 4059 | 1.47 126 | 1.701 0324 | 1.46 895 | 1.711 6054 | 1.46 687 |
| 1 | 1.679 8985 | 1.47 376 | 1.690 5835 | 1.47 122 | 1.701 2091 | 1.46 891 | 1.711 7812 | 1.46 684 |
| 2 | 1.680 0771 | 1.47 371 | 1.690 7610 | 1.47 118 | 1.701 3857 | 1.46 888 | 1.711 9569 | 1.46 680 |
| 3 | 1.680 2556 | 1.47 367 | 1.690 9386 | 1.47 114 | 1.701 5623 | 1.46 884 | 1.712 1327 | 1.46 677 |
| 4 | 1.680 4342 | 1.47 363 | 1.691 1161 | 1.47 110 | 1.701 7389 | 1.46 880 | 1.712 3085 | 1.46 673 |
| 5 | 1.680 6128 | 1.47 358 | 1.691 2936 | 1.47 106 | 1.701 9155 | 1.46 877 | 1.712 4842 | 1.46 670 |
| 6 | 1.680 7913 | 1.47 354 | 1.691 4711 | 1.47 102 | 1.702 0920 | 1.46 873 | 1.712 6599 | 1.46 667 |
| 7 | 1.680 9698 | 1.47 350 | 1.691 6486 | 1.47 098 | 1.702 2685 | 1.46 869 | 1.712 8357 | 1.46 663 |
| 8 | 1.681 1483 | 1.47 345 | 1.691 8261 | 1.47 094 | 1.702 4451 | 1.46 866 | 1.713 0114 | 1.46 660 |
| 9 | 1.681 3268 | 1.47 341 | 1.692 0035 | 1.47 090 | 1.702 6216 | 1.46 862 | 1.713 1870 | 1.46 657 |
| 10 | 1.681 5052 | 1.47 337 | 1.692 1809 | 1.47 086 | 1.702 7981 | 1.46 858 | 1.713 3627 | 1.46 654 |
| 11 | 1.681 6837 | 1.47 332 | 1.692 3584 | 1.47 082 | 1.702 9746 | 1.46 854 | 1.713 5384 | 1.46 651 |
| 12 | 1.681 8621 | 1.47 328 | 1.692 5358 | 1.47 078 | 1.703 1511 | 1.46 851 | 1.713 7140 | 1.46 647 |
| 13 | 1.682 0405 | 1.47 324 | 1.692 7131 | 1.47 074 | 1.703 3276 | 1.46 847 | 1.713 8897 | 1.46 644 |
| 14 | 1.682 2189 | 1.47 319 | 1.692 8905 | 1.47 070 | 1.703 5040 | 1.46 844 | 1.714 0653 | 1.46 641 |
| 15 | 1.682 3973 | 1.47 315 | 1.693 0679 | 1.47 067 | 1.703 6805 | 1.46 840 | 1.714 2409 | 1.46 638 |
| 16 | 1.682 5756 | 1.47 311 | 1.693 2452 | 1.47 063 | 1.703 8569 | 1.46 837 | 1.714 4165 | 1.46 635 |
| 17 | 1.682 7539 | 1.47 306 | 1.693 4225 | 1.47 059 | 1.704 0333 | 1.46 833 | 1.714 5921 | 1.46 631 |
| 18 | 1.682 9322 | 1.47 302 | 1.693 5998 | 1.47 055 | 1.704 2097 | 1.46 830 | 1.714 7677 | 1.46 628 |
| 19 | 1.683 1105 | 1.47 297 | 1.693 7771 | 1.47 051 | 1.704 3860 | 1.46 826 | 1.714 9432 | 1.46 625 |
| 20 | 1.683 2888 | 1.47 293 | 1.693 9544 | 1.47 047 | 1.704 5624 | 1.46 823 | 1.715 1188 | 1.46 622 |
| 21 | 1.683 4671 | 1.47 289 | 1.694 1316 | 1.47 043 | 1.704 7387 | 1.46 819 | 1.715 2943 | 1.46 619 |
| 22 | 1.683 6453 | 1.47 284 | 1.694 3089 | 1.47 039 | 1.704 9151 | 1.46 816 | 1.715 4698 | 1.46 616 |
| 23 | 1.683 8236 | 1.47 280 | 1.694 4861 | 1.47 035 | 1.705 0914 | 1.46 812 | 1.715 6453 | 1.46 613 |
| 24 | 1.684 0018 | 1.47 276 | 1.694 6633 | 1.47 031 | 1.705 2677 | 1.46 809 | 1.715 8208 | 1.46 609 |
| 25 | 1.684 1800 | 1.47 271 | 1.694 8405 | 1.47 028 | 1.705 4440 | 1.46 805 | 1.715 9963 | 1.46 606 |
| 26 | 1.684 3581 | 1.47 267 | 1.695 0177 | 1.47 024 | 1.705 6203 | 1.46 802 | 1.716 1718 | 1.46 603 |
| 27 | 1.684 5363 | 1.47 263 | 1.695 1948 | 1.47 020 | 1.705 7965 | 1.46 798 | 1.716 3472 | 1.46 600 |
| 28 | 1.684 7144 | 1.47 258 | 1.695 3720 | 1.47 016 | 1.705 9728 | 1.46 795 | 1.716 5227 | 1.46 597 |
| 29 | 1.684 8926 | 1.47 254 | 1.695 5491 | 1.47 012 | 1.706 1490 | 1.46 792 | 1.716 6981 | 1.46 594 |
| 30 | 1.685 0707 | 1.47 250 | 1.695 7262 | 1.47 008 | 1.706 3252 | 1.46 789 | 1.716 8735 | 1.46 591 |
| 31 | 1.685 2488 | 1.47 246 | 1.695 9033 | 1.47 004 | 1.706 5014 | 1.46 785 | 1.717 0489 | 1.46 588 |
| 32 | 1.685 4268 | 1.47 241 | 1.696 0804 | 1.47 001 | 1.706 6776 | 1.46 782 | 1.717 2243 | 1.46 585 |
| 33 | 1.685 6049 | 1.47 237 | 1.696 2575 | 1.46 997 | 1.706 8538 | 1.46 778 | 1.717 3997 | 1.46 582 |
| 34 | 1.685 7829 | 1.47 233 | 1.696 4345 | 1.46 993 | 1.707 0300 | 1.46 775 | 1.717 5751 | 1.46 579 |
| 35 | 1.685 9609 | 1.47 229 | 1.696 6115 | 1.46 989 | 1.707 2061 | 1.46 771 | 1.717 7504 | 1.46 576 |
| 36 | 1.686 1389 | 1.47 225 | 1.696 7886 | 1.46 985 | 1.707 3823 | 1.46 768 | 1.717 9258 | 1.46 573 |
| 37 | 1.686 3169 | 1.47 220 | 1.696 9656 | 1.46 982 | 1.707 5584 | 1.46 764 | 1.718 1011 | 1.46 570 |
| 38 | 1.686 4949 | 1.47 216 | 1.697 1426 | 1.46 978 | 1.707 7345 | 1.46 761 | 1.718 2764 | 1.46 567 |
| 39 | 1.686 6728 | 1.47 212 | 1.697 3195 | 1.46 974 | 1.707 9106 | 1.46 757 | 1.718 4517 | 1.46 564 |
| 40 | 1.686 8508 | 1.47 208 | 1.697 4965 | 1.46 970 | 1.708 0867 | 1.46 754 | 1.718 6270 | 1.46 561 |
| 41 | 1.687 0287 | 1.47 204 | 1.697 6734 | 1.46 966 | 1.708 2627 | 1.46 751 | 1.718 8023 | 1.46 558 |
| 42 | 1.687 2066 | 1.47 200 | 1.697 8504 | 1.46 962 | 1.708 4388 | 1.46 747 | 1.718 9776 | 1.46 555 |
| 43 | 1.687 3845 | 1.47 196 | 1.698 0273 | 1.46 959 | 1.708 6148 | 1.46 744 | 1.719 1529 | 1.46 552 |
| 44 | 1.687 5623 | 1.47 192 | 1.698 2041 | 1.46 955 | 1.708 7908 | 1.46 740 | 1.719 3281 | 1.46 549 |
| 45 | 1.687 7402 | 1.47 187 | 1.698 3810 | 1.46 951 | 1.708 9668 | 1.46 737 | 1.719 5033 | 1.46 546 |
| 46 | 1.687 9180 | 1.47 183 | 1.698 5578 | 1.46 947 | 1.709 1428 | 1.46 734 | 1.719 6786 | 1.46 543 |
| 47 | 1.688 0958 | 1.47 179 | 1.698 7347 | 1.46 944 | 1.709 3188 | 1.46 730 | 1.719 8538 | 1.46 540 |
| 48 | 1.688 2736 | 1.47 175 | 1.698 9116 | 1.46 940 | 1.709 4948 | 1.46 727 | 1.720 0290 | 1.46 537 |
| 49 | 1.688 4514 | 1.47 171 | 1.699 0884 | 1.46 936 | 1.709 6707 | 1.46 723 | 1.720 2042 | 1.46 534 |
| 50 | 1.688 6292 | 1.47 167 | 1.699 2652 | 1.46 932 | 1.709 8467 | 1.46 720 | 1.720 3793 | 1.46 531 |
| 51 | 1.688 8069 | 1.47 163 | 1.699 4420 | 1.46 928 | 1.710 0226 | 1.46 717 | 1.720 5545 | 1.46 528 |
| 52 | 1.688 9846 | 1.47 159 | 1.699 6188 | 1.46 925 | 1.710 1985 | 1.46 713 | 1.720 7297 | 1.46 525 |
| 53 | 1.689 1624 | 1.47 155 | 1.699 7955 | 1.46 921 | 1.710 3744 | 1.46 710 | 1.720 9048 | 1.46 522 |
| 54 | 1.689 3400 | 1.47 151 | 1.699 9723 | 1.46 917 | 1.710 5503 | 1.46 707 | 1.721 0799 | 1.46 519 |
| 55 | 1.689 5177 | 1.47 146 | 1.700 1490 | 1.46 914 | 1.710 7262 | 1.46 703 | 1.721 2550 | 1.46 516 |
| 56 | 1.689 6954 | 1.47 142 | 1.700 3257 | 1.46 910 | 1.710 9021 | 1.46 700 | 1.721 4301 | 1.46 513 |
| 57 | 1.689 8730 | 1.47 138 | 1.700 5024 | 1.46 906 | 1.711 0779 | 1.46 697 | 1.721 6052 | 1.46 510 |
| 58 | 1.690 0507 | 1.47 134 | 1.700 6791 | 1.46 903 | 1.711 2537 | 1.46 693 | 1.721 7803 | 1.46 507 |
| 59 | 1.690 2283 | 1.47 130 | 1.700 8558 | 1.46 899 | 1.711 4296 | 1.46 690 | 1.721 9554 | 1.46 504 |
| 60 | 1.690 4059 | 1.47 126 | 1.701 0324 | 1.46 895 | 1.711 6054 | 1.46 687 | 1.722 1304 | 1.46 501 |

# Tafel V.

| v | 60° log M | 60° log Diff. 1″ | 61° log M | 61° log Diff. 1″ | 62° log M | 62° log Diff. 1″ | 63° log M | 63° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.722 1304 | 1.46 501 | 1.732 6131 | 1.46 337 | 1.743 0589 | 1.46 194 | 1.753 4729 | 1.46 073 |
| 1 | 1.722 3055 | 1.46 498 | 1.732 7875 | 1.46 334 | 1.743 2327 | 1.46 192 | 1.753 6462 | 1.46 071 |
| 2 | 1.722 4805 | 1.46 495 | 1.732 9619 | 1.46 332 | 1.743 4065 | 1.46 190 | 1.753 8196 | 1.46 070 |
| 3 | 1.722 6555 | 1.46 492 | 1.733 1363 | 1.46 329 | 1.743 5803 | 1.46 188 | 1.753 9929 | 1.46 068 |
| 4 | 1.722 8305 | 1.46 489 | 1.733 3106 | 1.46 327 | 1.743 7541 | 1.46 185 | 1.754 1662 | 1.46 066 |
| 5 | 1.723 0055 | 1.46 487 | 1.733 4850 | 1.46 324 | 1.743 9279 | 1.46 183 | 1.754 3395 | 1.46 064 |
| 6 | 1.723 1805 | 1.46 484 | 1.733 6593 | 1.46 322 | 1.744 1016 | 1.46 181 | 1.754 5128 | 1.46 063 |
| 7 | 1.723 3555 | 1.46 481 | 1.733 8336 | 1.46 319 | 1.744 2754 | 1.46 179 | 1.754 6861 | 1.46 061 |
| 8 | 1.723 5304 | 1.46 478 | 1.734 0079 | 1.46 317 | 1.744 4491 | 1.46 177 | 1.754 8593 | 1.46 059 |
| 9 | 1.723 7054 | 1.46 475 | 1.734 1822 | 1.46 314 | 1.744 6229 | 1.46 175 | 1.755 0326 | 1.46 057 |
| 10 | 1.723 8803 | 1.46 472 | 1.734 3565 | 1.46 312 | 1.744 7966 | 1.46 173 | 1.755 2059 | 1.46 055 |
| 11 | 1.724 0553 | 1.46 469 | 1.734 5308 | 1.46 309 | 1.744 9704 | 1.46 170 | 1.755 3791 | 1.46 053 |
| 12 | 1.724 2302 | 1.46 466 | 1.734 7051 | 1.46 306 | 1.745 1441 | 1.46 168 | 1.755 5524 | 1.46 051 |
| 13 | 1.724 4051 | 1.46 463 | 1.734 8793 | 1.46 304 | 1.745 3178 | 1.46 166 | 1.755 7256 | 1.46 050 |
| 14 | 1.724 5800 | 1.46 460 | 1.735 0536 | 1.46 301 | 1.745 4915 | 1.46 164 | 1.755 8989 | 1.46 048 |
| 15 | 1.724 7549 | 1.46 458 | 1.735 2278 | 1.46 298 | 1.745 6652 | 1.46 162 | 1.756 0721 | 1.46 046 |
| 16 | 1.724 9297 | 1.46 455 | 1.735 4021 | 1.46 296 | 1.745 8389 | 1.46 159 | 1.756 2453 | 1.46 044 |
| 17 | 1.725 1046 | 1.46 452 | 1.735 5763 | 1.46 293 | 1.746 0125 | 1.46 157 | 1.756 4185 | 1.46 042 |
| 18 | 1.725 2794 | 1.46 449 | 1.735 7505 | 1.46 291 | 1.746 1862 | 1.46 155 | 1.756 5917 | 1.46 040 |
| 19 | 1.725 4543 | 1.46 446 | 1.735 9247 | 1.46 288 | 1.746 3598 | 1.46 153 | 1.756 7649 | 1.46 038 |
| 20 | 1.725 6291 | 1.46 443 | 1.736 0989 | 1.46 286 | 1.746 5335 | 1.46 151 | 1.756 9381 | 1.46 036 |
| 21 | 1.725 8039 | 1.46 440 | 1.736 2731 | 1.46 284 | 1.746 7071 | 1.46 149 | 1.757 1113 | 1.46 034 |
| 22 | 1.725 9787 | 1.46 438 | 1.736 4473 | 1.46 281 | 1.746 8808 | 1.46 147 | 1.757 2845 | 1.46 033 |
| 23 | 1.726 1535 | 1.46 435 | 1.736 6214 | 1.46 279 | 1.747 0544 | 1.46 145 | 1.757 4576 | 1.46 031 |
| 24 | 1.726 3283 | 1.46 432 | 1.736 7956 | 1.46 276 | 1.747 2280 | 1.46 143 | 1.757 6308 | 1.46 029 |
| 25 | 1.726 5031 | 1.46 430 | 1.736 9697 | 1.46 274 | 1.747 4016 | 1.46 141 | 1.757 8040 | 1.46 028 |
| 26 | 1.726 6778 | 1.46 427 | 1.737 1439 | 1.46 272 | 1.747 5752 | 1.46 139 | 1.757 9771 | 1.46 026 |
| 27 | 1.726 8526 | 1.46 424 | 1.737 3180 | 1.46 269 | 1.747 7488 | 1.46 137 | 1.758 1503 | 1.46 024 |
| 28 | 1.727 0273 | 1.46 422 | 1.737 4921 | 1.46 267 | 1.747 9224 | 1.46 135 | 1.758 3234 | 1.46 023 |
| 29 | 1.727 2020 | 1.46 419 | 1.737 6662 | 1.46 264 | 1.748 0960 | 1.46 133 | 1.758 4965 | 1.46 021 |
| 30 | 1.727 3767 | 1.46 416 | 1.737 8403 | 1.46 262 | 1.748 2695 | 1.46 131 | 1.758 6697 | 1.46 019 |
| 31 | 1.727 5514 | 1.46 413 | 1.738 0144 | 1.46 260 | 1.748 4431 | 1.46 129 | 1.758 8428 | 1.46 017 |
| 32 | 1.727 7261 | 1.46 411 | 1.738 1885 | 1.46 257 | 1.748 6167 | 1.46 127 | 1.759 0159 | 1.46 016 |
| 33 | 1.727 9008 | 1.46 408 | 1.738 3625 | 1.46 255 | 1.748 7902 | 1.46 125 | 1.759 1890 | 1.46 014 |
| 34 | 1.728 0755 | 1.46 405 | 1.738 5366 | 1.46 253 | 1.748 9637 | 1.46 123 | 1.759 3621 | 1.46 012 |
| 35 | 1.728 2501 | 1.46 403 | 1.738 7106 | 1.46 250 | 1.749 1373 | 1.46 121 | 1.759 5352 | 1.46 011 |
| 36 | 1.728 4248 | 1.46 400 | 1.738 8847 | 1.46 248 | 1.749 3108 | 1.46 119 | 1.759 7083 | 1.46 009 |
| 37 | 1.728 5994 | 1.46 397 | 1.739 0587 | 1.46 246 | 1.749 4843 | 1.46 117 | 1.759 8813 | 1.46 008 |
| 38 | 1.728 7740 | 1.46 395 | 1.739 2327 | 1.46 243 | 1.749 6578 | 1.46 115 | 1.760 0544 | 1.46 006 |
| 39 | 1.728 9487 | 1.46 392 | 1.739 4068 | 1.46 241 | 1.749 8313 | 1.46 113 | 1.760 2275 | 1.46 005 |
| 40 | 1.729 1233 | 1.46 389 | 1.739 5808 | 1.46 239 | 1.750 0048 | 1.46 111 | 1.760 4005 | 1.46 003 |
| 41 | 1.729 2979 | 1.46 386 | 1.739 7547 | 1.46 237 | 1.750 1783 | 1.46 109 | 1.760 5736 | 1.46 001 |
| 42 | 1.729 4724 | 1.46 384 | 1.739 9287 | 1.46 234 | 1.750 3517 | 1.46 107 | 1.760 7466 | 1.46 000 |
| 43 | 1.729 6470 | 1.46 381 | 1.740 1027 | 1.46 232 | 1.750 5252 | 1.46 105 | 1.760 9197 | 1.45 998 |
| 44 | 1.729 8216 | 1.46 378 | 1.740 2767 | 1.46 230 | 1.750 6986 | 1.46 103 | 1.761 0927 | 1.45 996 |
| 45 | 1.729 9961 | 1.46 376 | 1.740 4506 | 1.46 227 | 1.750 8721 | 1.46 101 | 1.761 2657 | 1.45 995 |
| 46 | 1.730 1707 | 1.46 373 | 1.740 6246 | 1.46 225 | 1.751 0455 | 1.46 099 | 1.761 4388 | 1.45 993 |
| 47 | 1.730 3452 | 1.46 370 | 1.740 7985 | 1.46 223 | 1.751 2190 | 1.46 097 | 1.761 6118 | 1.45 991 |
| 48 | 1.730 5197 | 1.46 367 | 1.740 9724 | 1.46 220 | 1.751 3924 | 1.46 095 | 1.761 7848 | 1.45 990 |
| 49 | 1.730 6942 | 1.46 365 | 1.741 1464 | 1.46 218 | 1.751 5658 | 1.46 093 | 1.761 9578 | 1.45 988 |
| 50 | 1.730 8687 | 1.46 362 | 1.741 3203 | 1.46 216 | 1.751 7392 | 1.46 091 | 1.762 1308 | 1.45 987 |
| 51 | 1.731 0432 | 1.46 359 | 1.741 4942 | 1.46 214 | 1.751 9126 | 1.46 089 | 1.762 3038 | 1.45 985 |
| 52 | 1.731 2177 | 1.46 357 | 1.741 6681 | 1.46 211 | 1.752 0860 | 1.46 087 | 1.762 4767 | 1.45 984 |
| 53 | 1.731 3922 | 1.46 354 | 1.741 8420 | 1.46 209 | 1.752 2594 | 1.46 086 | 1.762 6497 | 1.45 982 |
| 54 | 1.731 5666 | 1.46 352 | 1.742 0158 | 1.46 207 | 1.752 4328 | 1.46 084 | 1.762 8227 | 1.45 981 |
| 55 | 1.731 7411 | 1.46 349 | 1.742 1897 | 1.46 205 | 1.752 6062 | 1.46 082 | 1.762 9956 | 1.45 979 |
| 56 | 1.731 9155 | 1.46 347 | 1.742 3636 | 1.46 202 | 1.752 7795 | 1.46 080 | 1.763 1686 | 1.45 978 |
| 57 | 1.732 0899 | 1.46 344 | 1.742 5374 | 1.46 200 | 1.752 9529 | 1.46 079 | 1.763 3416 | 1.45 976 |
| 58 | 1.732 2643 | 1.46 342 | 1.742 7112 | 1.46 198 | 1.753 1262 | 1.46 077 | 1.763 5145 | 1.45 975 |
| 59 | 1.732 4387 | 1.46 339 | 1.742 8851 | 1.46 196 | 1.753 2996 | 1.46 075 | 1.763 6874 | 1.45 973 |
| 60 | 1.732 6131 | 1.46 337 | 1.743 0589 | 1.46 194 | 1.753 4729 | 1.46 073 | 1.763 8604 | 1.45 972 |

# Tafel V.

| $v$ | 64° | | 65° | | 66° | | 67° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 1.763 8604 | 1.45 972 | 1.774 2262 | 1.45 892 | 1.784 5754 | 1.45 833 | 1.794 9128 | 1.45 792 |
| 1 | 1.764 0333 | 1.45 970 | 1.774 3988 | 1.45 891 | 1.784 7478 | 1.45 832 | 1.795 0850 | 1.45 792 |
| 2 | 1.764 2062 | 1.45 969 | 1.774 5714 | 1.45 890 | 1.784 9202 | 1.45 831 | 1.795 2572 | 1.45 791 |
| 3 | 1.764 3791 | 1.45 967 | 1.774 7441 | 1.45 889 | 1.785 0925 | 1.45 831 | 1.795 4294 | 1.45 791 |
| 4 | 1.764 5521 | 1.45 966 | 1.774 9167 | 1.45 887 | 1.785 2649 | 1.45 830 | 1.795 6016 | 1.45 790 |
| 5 | 1.764 7250 | 1.45 964 | 1.775 0892 | 1.45 886 | 1.785 4373 | 1.45 829 | 1.795 7738 | 1.45 790 |
| 6 | 1.764 8979 | 1.45 963 | 1.775 2618 | 1.45 885 | 1.785 6096 | 1.45 828 | 1.795 9460 | 1.45 790 |
| 7 | 1.765 0707 | 1.45 961 | 1.775 4344 | 1.45 884 | 1.785 7820 | 1.45 827 | 1.796 1182 | 1.45 789 |
| 8 | 1.765 2436 | 1.45 960 | 1.775 6070 | 1.45 883 | 1.785 9543 | 1.45 826 | 1.796 2904 | 1.45 789 |
| 9 | 1.765 4165 | 1.45 958 | 1.775 7796 | 1.45 882 | 1.786 1267 | 1.45 825 | 1.796 4626 | 1.45 788 |
| 10 | 1.765 5894 | 1.45 957 | 1.775 9521 | 1.45 881 | 1.786 2990 | 1.45 824 | 1.796 6348 | 1.45 788 |
| 11 | 1.765 7623 | 1.45 955 | 1.776 1247 | 1.45 880 | 1.786 4714 | 1.45 823 | 1.796 8070 | 1.45 787 |
| 12 | 1.765 9351 | 1.45 954 | 1.776 2973 | 1.45 879 | 1.786 6437 | 1.45 823 | 1.796 9792 | 1.45 787 |
| 13 | 1.766 1080 | 1.45 952 | 1.776 4698 | 1.45 878 | 1.786 8160 | 1.45 822 | 1.797 1514 | 1.45 786 |
| 14 | 1.766 2808 | 1.45 951 | 1.776 6424 | 1.45 877 | 1.786 9884 | 1.45 821 | 1.797 3236 | 1.45 786 |
| 15 | 1.766 4537 | 1.45 949 | 1.776 8149 | 1.45 875 | 1.787 1607 | 1.45 821 | 1.797 4958 | 1.45 786 |
| 16 | 1.766 6265 | 1.45 948 | 1.776 9875 | 1.45 874 | 1.787 3330 | 1.45 820 | 1.797 6680 | 1.45 785 |
| 17 | 1.766 7993 | 1.45 946 | 1.777 1600 | 1.45 873 | 1.787 5053 | 1.45 819 | 1.797 8402 | 1.45 785 |
| 18 | 1.766 9722 | 1.45 945 | 1.777 3325 | 1.45 872 | 1.787 6777 | 1.45 818 | 1.798 0124 | 1.45 785 |
| 19 | 1.767 1450 | 1.45 943 | 1.777 5051 | 1.45 871 | 1.787 8500 | 1.45 818 | 1.798 1846 | 1.45 784 |
| 20 | 1.767 3178 | 1.45 942 | 1.777 6776 | 1.45 870 | 1.788 0223 | 1.45 817 | 1.798 3567 | 1.45 784 |
| 21 | 1.767 4906 | 1.45 941 | 1.777 8501 | 1.45 869 | 1.788 1946 | 1.45 816 | 1.798 5289 | 1.45 784 |
| 22 | 1.767 6634 | 1.45 939 | 1.778 0226 | 1.45 868 | 1.788 3669 | 1.45 816 | 1.798 7011 | 1.45 783 |
| 23 | 1.767 8362 | 1.45 938 | 1.778 1951 | 1.45 867 | 1.788 5392 | 1.45 815 | 1.798 8733 | 1.45 783 |
| 24 | 1.768 0090 | 1.45 936 | 1.778 3676 | 1.45 866 | 1.788 7115 | 1.45 814 | 1.799 0454 | 1.45 782 |
| 25 | 1.768 1818 | 1.45 935 | 1.778 5402 | 1.45 865 | 1.788 8838 | 1.45 813 | 1.799 2176 | 1 45 782 |
| 26 | 1.768 3546 | 1.45 934 | 1.778 7127 | 1.45 864 | 1.789 0561 | 1.45 813 | 1.799 3898 | 1.45 782 |
| 27 | 1.768 5274 | 1.45 932 | 1.778 8852 | 1.45 863 | 1.789 2284 | 1.45 812 | 1.799 5620 | 1.45 781 |
| 28 | 1.768 7002 | 1.45 931 | 1.779 0576 | 1.45 862 | 1.789 4007 | 1.45 811 | 1.799 7341 | 1.45 781 |
| 29 | 1.768 8729 | 1.45 930 | 1.779 2301 | 1.45 861 | 1.789 5730 | 1.45 810 | 1.799 9063 | 1.45 780 |
| 30 | 1.769 0457 | 1.45 929 | 1.779 4026 | 1.45 860 | 1.789 7453 | 1.45 810 | 1.800 0785 | 1.45 780 |
| 31 | 1.769 2184 | 1.45 927 | 1.779 5751 | 1.45 859 | 1.789 9176 | 1.45 809 | 1.800 2506 | 1.45 780 |
| 32 | 1.769 3912 | 1.45 926 | 1.779 7476 | 1.45 858 | 1.790 0899 | 1.45 809 | 1.800 4228 | 1.45 779 |
| 33 | 1.769 5639 | 1.45 925 | 1.779 9200 | 1.45 857 | 1.790 2621 | 1.45 808 | 1.800 5950 | 1.45 779 |
| 34 | 1.769 7367 | 1.45 924 | 1.780 0925 | 1.45 856 | 1.790 4344 | 1.45 807 | 1.800 7671 | 1.45 778 |
| 35 | 1.769 9094 | 1.45 922 | 1.780 2650 | 1.45 855 | 1.790 6067 | 1.45 807 | 1.800 9393 | 1.45 778 |
| 36 | 1.770 0822 | 1.45 921 | 1.780 4374 | 1.45 854 | 1.790 7790 | 1.45 806 | 1.801 1115 | 1.45 778 |
| 37 | 1.770 2549 | 1.45 920 | 1.780 6099 | 1.45 853 | 1.790 9512 | 1.45 805 | 1.801 2836 | 1.45 777 |
| 38 | 1.770 4276 | 1.45 919 | 1.780 7824 | 1.45 852 | 1.791 1235 | 1.45 805 | 1.801 4558 | 1.45 777 |
| 39 | 1.770 6003 | 1.45 918 | 1.780 9548 | 1.45 851 | 1.791 2957 | 1.45 804 | 1.801 6279 | 1.45 777 |
| 40 | 1.770 7730 | 1.45 917 | 1.781 1273 | 1.45 850 | 1.791 4680 | 1.45 803 | 1.801 8001 | 1.45 776 |
| 41 | 1.770 9458 | 1.45 916 | 1.781 2997 | 1.45 849 | 1.791 6403 | 1.45 802 | 1.801 9722 | 1.45 776 |
| 42 | 1.771 1185 | 1.45 914 | 1.781 4721 | 1.45 848 | 1.791 8125 | 1 45 802 | 1.802 1444 | 1.45 776 |
| 43 | 1.771 2912 | 1.45 913 | 1.781 6446 | 1.45 847 | 1.791 9848 | 1.45 801 | 1.802 3165 | 1.45 776 |
| 44 | 1.771 4638 | 1.45 912 | 1.781 8170 | 1.45 846 | 1.792 1570 | 1.45 800 | 1.802 4887 | 1.45 775 |
| 45 | 1.771 6365 | 1.45 911 | 1.781 9894 | 1.45 846 | 1.792 3293 | 1.45 799 | 1.802 6608 | 1.45 775 |
| 46 | 1.771 8092 | 1.45 909 | 1.782 1619 | 1.45 845 | 1.792 5015 | 1.45 799 | 1.802 8330 | 1.45 775 |
| 47 | 1.771 9819 | 1.45 908 | 1.782 3343 | 1.45 844 | 1.792 6738 | 1.45 798 | 1.803 0051 | 1.45 775 |
| 48 | 1.772 1546 | 1.45 907 | 1.782 5067 | 1.45 843 | 1.792 8460 | 1.45 798 | 1.803 1773 | 1.45 775 |
| 49 | 1.772 3272 | 1.45 906 | 1.782 6791 | 1.45 842 | 1.793 0183 | 1.45 797 | 1.803 3494 | 1.45 774 |
| 50 | 1.772 4999 | 1.45 905 | 1.782 8515 | 1.45 841 | 1.793 1905 | 1.45 797 | 1.803 5216 | 1.45 774 |
| 51 | 1.772 6725 | 1.45 903 | 1.783 0239 | 1.45 840 | 1.793 3627 | 1.45 796 | 1.803 6937 | 1.45 774 |
| 52 | 1.772 8452 | 1.45 902 | 1.783 1963 | 1.45 840 | 1.793 5350 | 1.45 796 | 1.803 8659 | 1.45 774 |
| 53 | 1.773 0178 | 1.45 901 | 1.783 3687 | 1.45 839 | 1.793 7072 | 1.45 795 | 1 804 0380 | 1.45 773 |
| 54 | 1.773 1905 | 1.45 899 | 1.783 5411 | 1.45 838 | 1.793 8794 | 1.45 795 | 1.804 2102 | 1.45 773 |
| 55 | 1.773 3631 | 1.45 898 | 1.783 7135 | 1.45 837 | 1.794 0517 | 1.45 794 | 1.804 3823 | 1.45 773 |
| 56 | 1.773 5358 | 1.45 897 | 1.783 8859 | 1.45 836 | 1.794 2239 | 1.45 794 | 1.804 5544 | 1.45 773 |
| 57 | 1.773 7084 | 1.45 896 | 1.784 0583 | 1.45 836 | 1.794 3961 | 1.45 794 | 1.804 7266 | 1.45 773 |
| 58 | 1.773 8810 | 1.45 894 | 1.784 2307 | 1.45 835 | 1.794 5683 | 1.45 793 | 1.804 8987 | 1.45 772 |
| 59 | 1.774 0536 | 1.45 893 | 1.784 4031 | 1.45 834 | 1.794 7405 | 1.45 793 | 1.805 0708 | 1.45 772 |
| 60 | 1.774 2262 | 1.45 892 | 1.784 5754 | 1.45 833 | 1.794 9128 | 1.45 792 | 1.805 2430 | 1.45 772 |

## Tafel V.

| v | 68° log M | 68° log Diff. 1″ | 69° log M | 69° log Diff. 1″ | 70° log M | 70° log Diff. 1″ | 71° log M | 71° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.805 2430 | 1.45 772 | 1.815 5708 | 1.45 771 | 1.825 9007 | 1.45 790 | 1.836 2373 | 1.45 829 |
| 1 | 1.805 4151 | 1.45 772 | 1.815 7429 | 1.45 771 | 1.826 0729 | 1.45 790 | 1.836 4097 | 1.45 830 |
| 2 | 1.805 5873 | 1.45 772 | 1.815 9150 | 1.45 772 | 1.826 2451 | 1.45 791 | 1.836 5820 | 1.45 830 |
| 3 | 1.805 7594 | 1.45 772 | 1.816 0872 | 1.45 772 | 1.826 4173 | 1.45 791 | 1.836 7544 | 1.45 831 |
| 4 | 1.805 9315 | 1.45 772 | 1.816 2593 | 1.45 772 | 1.826 5895 | 1.45 792 | 1.836 9268 | 1.45 832 |
| 5 | 1.806 1037 | 1.45 772 | 1.816 4314 | 1.45 772 | 1.826 7617 | 1.45 792 | 1.837 0991 | 1.45 832 |
| 6 | 1.806 2758 | 1.45 771 | 1.816 6036 | 1.45 772 | 1.826 9340 | 1.45 793 | 1.837 2715 | 1.45 833 |
| 7 | 1.806 4479 | 1.45 771 | 1.816 7757 | 1.45 772 | 1.827 1062 | 1.45 793 | 1.837 4439 | 1.45 834 |
| 8 | 1.806 6201 | 1.45 771 | 1.816 9478 | 1.45 772 | 1.827 2784 | 1.45 794 | 1.837 6163 | 1.45 834 |
| 9 | 1.806 7922 | 1.45 771 | 1.817 1200 | 1.45 773 | 1.827 4506 | 1.45 794 | 1.837 7887 | 1.45 835 |
| 10 | 1.806 9643 | 1.45 771 | 1.817 2921 | 1.45 773 | 1.827 6229 | 1.45 795 | 1.837 9611 | 1.45 836 |
| 11 | 1.807 1365 | 1.45 771 | 1.817 4643 | 1.45 773 | 1.827 7951 | 1.45 795 | 1.838 1334 | 1.45 837 |
| 12 | 1.807 3086 | 1.45 771 | 1.817 6364 | 1.45 773 | 1.827 9673 | 1.45 796 | 1.838 3058 | 1.45 838 |
| 13 | 1.807 4807 | 1.45 771 | 1.817 8086 | 1.45 774 | 1.828 1396 | 1.45 796 | 1.838 4783 | 1.45 839 |
| 14 | 1.807 6528 | 1.45 771 | 1.817 9807 | 1.45 774 | 1.828 3118 | 1.45 797 | 1.838 6507 | 1.45 840 |
| 15 | 1.807 8250 | 1.45 771 | 1.818 1529 | 1.45 774 | 1.828 4840 | 1.45 798 | 1.838 8231 | 1.45 840 |
| 16 | 1.807 9971 | 1.45 771 | 1.818 3250 | 1.45 775 | 1.828 6563 | 1.45 798 | 1.838 9955 | 1.45 841 |
| 17 | 1.808 1692 | 1.45 770 | 1.818 4971 | 1.45 775 | 1.828 8285 | 1.45 799 | 1.839 1679 | 1.45 842 |
| 18 | 1.808 3414 | 1.45 770 | 1.818 6693 | 1.45 775 | 1.829 0007 | 1.45 799 | 1.839 3403 | 1.45 843 |
| 19 | 1.808 5135 | 1.45 770 | 1.818 8414 | 1.45 776 | 1.829 1730 | 1.45 800 | 1.839 5127 | 1.45 844 |
| 20 | 1.808 6856 | 1.45 770 | 1.819 0136 | 1.45 776 | 1.829 3453 | 1.45 801 | 1.839 6851 | 1.45 845 |
| 21 | 1.808 8577 | 1.45 770 | 1.819 1858 | 1.45 776 | 1.829 5175 | 1.45 801 | 1.839 8576 | 1.45 846 |
| 22 | 1.809 0299 | 1.45 770 | 1.819 3580 | 1.45 776 | 1.829 6898 | 1.45 802 | 1.840 0300 | 1.45 847 |
| 23 | 1.809 2020 | 1.45 770 | 1.819 5301 | 1.45 777 | 1.829 8620 | 1.45 803 | 1.840 2024 | 1.45 848 |
| 24 | 1.809 3741 | 1.45 770 | 1.819 7022 | 1.45 777 | 1.830 0343 | 1.45 803 | 1.840 3749 | 1.45 849 |
| 25 | 1.809 5463 | 1.45 770 | 1.819 8744 | 1.45 777 | 1.830 2065 | 1.45 804 | 1.840 5473 | 1.45 849 |
| 26 | 1.809 7184 | 1.45 770 | 1.820 0465 | 1.45 778 | 1.830 3788 | 1.45 804 | 1.840 7198 | 1.45 850 |
| 27 | 1.809 8905 | 1.45 770 | 1.820 2187 | 1.45 778 | 1.830 5511 | 1.45 805 | 1.840 8922 | 1.45 851 |
| 28 | 1.810 0626 | 1.45 770 | 1.820 3908 | 1.45 778 | 1.830 7233 | 1.45 806 | 1.841 0647 | 1.45 852 |
| 29 | 1.810 2348 | 1.45 770 | 1.820 5630 | 1.45 779 | 1.830 8956 | 1.45 806 | 1.841 2371 | 1.45 853 |
| 30 | 1.810 4069 | 1.45 770 | 1.820 7352 | 1.45 779 | 1.831 0679 | 1.45 807 | 1.841 4096 | 1.45 854 |
| 31 | 1.810 5790 | 1.45 770 | 1.820 9073 | 1.45 779 | 1.831 2401 | 1.45 808 | 1.841 5820 | 1.45 855 |
| 32 | 1.810 7511 | 1.45 770 | 1.821 0795 | 1.45 780 | 1.831 4124 | 1.45 808 | 1.841 7545 | 1.45 856 |
| 33 | 1.810 9233 | 1.45 770 | 1.821 2516 | 1.45 780 | 1.831 ·5847 | 1.45 809 | 1.841 9270 | 1.45 857 |
| 34 | 1.811 0954 | 1.45 770 | 1.821 4238 | 1.45 781 | 1.831 7571 | 1.45 810 | 1.842 0994 | 1.45 858 |
| 35 | 1.811 2675 | 1.45 770 | 1.821 5960 | 1.45 781 | 1.831 9293 | 1.45 810 | 1.842 2719 | 1.45 859 |
| 36 | 1.811 4396 | 1.45 770 | 1.821 7682 | 1.45 781 | 1.832 1016 | 1.45 811 | 1.842 4444 | 1.45 860 |
| 37 | 1.811 6118 | 1.45 770 | 1.821 9403 | 1.45 782 | 1.832 2739 | 1.45 812 | 1.842 6169 | 1.45 861 |
| 38 | 1.811 7839 | 1.45 770 | 1.822 1125 | 1.45 782 | 1.832 4461 | 1.45 812 | 1.842 7894 | 1.45 862 |
| 39 | 1.811 9560 | 1.45 770 | 1.822 2847 | 1.45 783 | 1.832 6184 | 1.45 813 | 1.842 9619 | 1.45 863 |
| 40 | 1.812 1282 | 1.45 770 | 1.822 4568 | 1.45 783 | 1.832 7907 | 1.45 813 | 1.843 1344 | 1.45 864 |
| 41 | 1.812 3003 | 1.45 770 | 1.822 6290 | 1.45 783 | 1.832 9630 | 1.45 814 | 1.843 3069 | 1.45 865 |
| 42 | 1.812 4724 | 1.45 770 | 1.822 8012 | 1.45 784 | 1.833 1353 | 1.45 815 | 1.843 4794 | 1.45 866 |
| 43 | 1.812 6445 | 1.45 770 | 1.822 9734 | 1.45 784 | 1.833 3077 | 1.45 815 | 1.843 6519 | 1.45 867 |
| 44 | 1.812 8167 | 1.45 770 | 1.823 1455 | 1.45 784 | 1.833 4800 | 1.45 816 | 1.843 8244 | 1.45 868 |
| 45 | 1.812 9888 | 1.45 770 | 1.823 3177 | 1.45 785 | 1.833 6523 | 1.45 817 | 1.843 9969 | 1.45 869 |
| 46 | 1.813 1609 | 1.45 770 | 1.823 4899 | 1.45 785 | 1.833 8246 | 1.45 818 | 1.844 1694 | 1.45 870 |
| 47 | 1.813 3330 | 1.45 770 | 1.823 6621 | 1.45 785 | 1.833 9969 | 1.45 819 | 1.844 3420 | 1.45 871 |
| 48 | 1.813 5052 | 1.45 770 | 1.823 8343 | 1.45 786 | 1.834 1692 | 1.45 819 | 1.844 5145 | 1.45 872 |
| 49 | 1.813 6773 | 1.45 770 | 1.824 0065 | 1.45 786 | 1.834 3416 | 1.45 820 | 1.844 6870 | 1.45 873 |
| 50 | 1.813 8494 | 1.45 770 | 1.824 1787 | 1.45 786 | 1.834 5139 | 1.45 821 | 1.844 8596 | 1.45 874 |
| 51 | 1.814 0216 | 1.45 770 | 1.824 3509 | 1.45 787 | 1.834 6862 | 1.45 822 | 1.845 0321 | 1.45 875 |
| 52 | 1.814 1937 | 1.45 770 | 1.824 5231 | 1.45 787 | 1.834 8585 | 1.45 822 | 1.845 2047 | 1.45 876 |
| 53 | 1.814 3658 | 1.45 771 | 1.824 6953 | 1.45 787 | 1.835 0309 | 1.45 823 | 1.845 3772 | 1.45 877 |
| 54 | 1.814 5380 | 1.45 771 | 1.824 8675 | 1.45 788 | 1.835 2032 | 1.45 824 | 1.845 5498 | 1.45 878 |
| 55 | 1.814 7101 | 1.45 771 | 1.825 0397 | 1.45 788 | 1.835 3756 | 1.45 825 | 1.845 7223 | 1.45 879 |
| 56 | 1.814 8822 | 1.45 771 | 1.825 2119 | 1.45 788 | 1.835 5479 | 1.45 826 | 1.845 8949 | 1.45 880 |
| 57 | 1.815 0544 | 1.45 771 | 1.825 3841 | 1.45 789 | 1.835 7203 | 1.45 827 | 1.846 0675 | 1.45 881 |
| 58 | 1.815 2265 | 1.45 771 | 1.825 5563 | 1.45 789 | 1.835 8926 | 1.45 827 | 1.846 2400 | 1.45 882 |
| 59 | 1.815 3986 | 1.45 771 | 1.825 7285 | 1.45 789 | 1.836 0650 | 1.45 828 | 1.846 4126 | 1.45 884 |
| 60 | 1.815 5708 | 1.45 771 | 1.825 9007 | 1.45 790 | 1.836 2373 | 1.45 829 | 1.846 5852 | 1.45 885 |

## Tafel V.

| $v$ | 72° log $M$ | 72° log Diff. 1″ | 73° log $M$ | 73° log Diff. 1″ | 74° log $M$ | 74° log Diff. 1″ | 75° log $M$ | 75° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.846 5852 | 1.45 885 | 1.856 9488 | 1.45 959 | 1.867 3325 | 1.46 053 | 1.877 7409 | 1.46 165 |
| 1 | 1.846 7578 | 1.45 886 | 1.857 1217 | 1.45 960 | 1.867 5058 | 1.46 055 | 1.877 9146 | 1.46 167 |
| 2 | 1.846 9304 | 1.45 887 | 1.857 2945 | 1.45 962 | 1.867 6791 | 1.46 056 | 1.878 0883 | 1.46 169 |
| 3 | 1.847 1030 | 1.45 888 | 1.857 4674 | 1.45 963 | 1.867 8523 | 1.46 058 | 1.878 2621 | 1.46 171 |
| 4 | 1.847 2756 | 1.45 889 | 1.857 6403 | 1.45 965 | 1.868 0256 | 1.46 060 | 1.878 4358 | 1.46 173 |
| 5 | 1.847 4482 | 1.45 891 | 1.857 8133 | 1.45 966 | 1.868 1989 | 1.46 062 | 1.878 6095 | 1.46 176 |
| 6 | 1.847 6208 | 1.45 892 | 1.857 9862 | 1.45 968 | 1.868 3722 | 1.46 064 | 1.878 7833 | 1.46 178 |
| 7 | 1.847 7934 | 1.45 893 | 1.858 1591 | 1.45 969 | 1.868 5455 | 1.46 065 | 1.878 9570 | 1.46 180 |
| 8 | 1.847 9660 | 1.45 894 | 1.858 3320 | 1.45 971 | 1.868 7188 | 1.46 067 | 1.879 1308 | 1.46 182 |
| 9 | 1.848 1386 | 1.45 895 | 1.858 5049 | 1.45 972 | 1.868 8921 | 1.46 069 | 1.879 3046 | 1.46 184 |
| 10 | 1.848 3112 | 1.45 896 | 1.858 6779 | 1.45 974 | 1.869 0654 | 1.46 071 | 1.879 4783 | 1.46 186 |
| 11 | 1.848 4839 | 1.45 897 | 1.858 8508 | 1.45 975 | 1.869 2388 | 1.46 073 | 1.879 6521 | 1.46 188 |
| 12 | 1.848 6565 | 1.45 898 | 1.859 0238 | 1.45 977 | 1.869 4121 | 1.46 074 | 1.879 8259 | 1.46 190 |
| 13 | 1.848 8291 | 1.45 899 | 1.859 1967 | 1.45 978 | 1.869 5854 | 1.46 076 | 1.879 9997 | 1.46 192 |
| 14 | 1.849 0018 | 1.45 900 | 1.859 3697 | 1.45 980 | 1.869 7588 | 1.46 078 | 1.880 1735 | 1.46 194 |
| 15 | 1.849 1744 | 1.45 902 | 1.859 5427 | 1.45 981 | 1.869 9322 | 1.46 079 | 1.880 3474 | 1.46 197 |
| 16 | 1.849 3471 | 1.45 903 | 1.859 7156 | 1.45 983 | 1.870 1055 | 1.46 081 | 1.880 5212 | 1.46 199 |
| 17 | 1.849 5197 | 1.45 904 | 1.859 8886 | 1.45 984 | 1.870 2789 | 1.46 083 | 1.880 6950 | 1.46 201 |
| 18 | 1.849 6924 | 1.45 905 | 1.860 0616 | 1.45 986 | 1.870 4523 | 1.46 084 | 1.880 8689 | 1.46 203 |
| 19 | 1.849 8651 | 1.45 906 | 1.860 2346 | 1.45 987 | 1.870 6256 | 1.46 086 | 1.881 0427 | 1.46 205 |
| 20 | 1.850 0378 | 1.45 907 | 1.860 4076 | 1.45 989 | 1.870 7990 | 1.46 088 | 1.881 2166 | 1.46 207 |
| 21 | 1.850 2104 | 1.45 908 | 1.860 5806 | 1.45 990 | 1.870 9724 | 1.46 090 | 1.881 3905 | 1.46 209 |
| 22 | 1.850 3831 | 1.45 910 | 1.860 7536 | 1.45 992 | 1.871 1458 | 1.46 092 | 1.881 5644 | 1.46 212 |
| 23 | 1.850 5558 | 1.45 911 | 1.860 9266 | 1.45 993 | 1.871 3193 | 1.46 094 | 1.881 7382 | 1.46 214 |
| 24 | 1.850 7285 | 1.45 912 | 1.861 0996 | 1.45 995 | 1.871 4927 | 1.46 096 | 1.881 9121 | 1.46 216 |
| 25 | 1.850 9012 | 1.45 914 | 1.861 2726 | 1.45 996 | 1.871 6661 | 1.46 097 | 1.882 0861 | 1.46 218 |
| 26 | 1.851 0739 | 1.45 915 | 1.861 4457 | 1.45 998 | 1.871 8395 | 1.46 099 | 1.882 2600 | 1.46 220 |
| 27 | 1.851 2466 | 1.45 916 | 1.861 6187 | 1.45 999 | 1.872 0130 | 1.46 101 | 1.882 4339 | 1.46 223 |
| 28 | 1.851 4193 | 1.45 918 | 1.861 7917 | 1.46 001 | 1.872 1864 | 1.46 103 | 1.882 6078 | 1.46 225 |
| 29 | 1.851 5920 | 1.45 919 | 1.861 9648 | 1.46 002 | 1.872 3599 | 1.46 105 | 1.882 7818 | 1.46 227 |
| 30 | 1.851 7647 | 1.45 920 | 1.862 1379 | 1.46 004 | 1.872 5334 | 1.46 107 | 1.882 9557 | 1.46 229 |
| 31 | 1.851 9375 | 1.45 921 | 1.862 3109 | 1.46 006 | 1.872 7068 | 1.46 109 | 1.883 1297 | 1.46 231 |
| 32 | 1.852 1102 | 1.45 923 | 1.862 4840 | 1.46 007 | 1.872 8803 | 1.46 111 | 1.883 3036 | 1.46 234 |
| 33 | 1.852 2829 | 1.45 924 | 1.862 6571 | 1.46 009 | 1.873 0538 | 1.46 113 | 1.883 4776 | 1.46 236 |
| 34 | 1.852 4557 | 1.45 925 | 1.862 8301 | 1.46 011 | 1.873 2273 | 1.46 115 | 1.883 6516 | 1.46 238 |
| 35 | 1.852 6284 | 1.45 927 | 1.863 0032 | 1.46 012 | 1.873 4008 | 1.46 117 | 1.883 8256 | 1.46 240 |
| 36 | 1.852 8012 | 1.45 928 | 1.863 1763 | 1.46 014 | 1.873 5743 | 1.46 119 | 1.883 9996 | 1.46 243 |
| 37 | 1.852 9739 | 1.45 929 | 1.863 3494 | 1.46 015 | 1.873 7478 | 1.46 121 | 1.884 1736 | 1.46 245 |
| 38 | 1.853 1467 | 1.45 931 | 1.863 5225 | 1.46 017 | 1.873 9214 | 1.46 123 | 1.884 3476 | 1.46 247 |
| 39 | 1.853 3195 | 1.45 932 | 1.863 6956 | 1.46 018 | 1.874 0949 | 1.46 125 | 1.884 5217 | 1.46 249 |
| 40 | 1.853 4922 | 1.45 933 | 1.863 8688 | 1.46 020 | 1.874 2684 | 1.46 127 | 1.884 6957 | 1.46 251 |
| 41 | 1.853 6650 | 1.45 934 | 1.864 0419 | 1.46 021 | 1.874 4420 | 1.46 129 | 1.884 8697 | 1.46 253 |
| 42 | 1.853 8378 | 1.45 936 | 1.864 2150 | 1.46 023 | 1.874 6155 | 1.46 131 | 1.885 0438 | 1.46 256 |
| 43 | 1.854 0106 | 1.45 937 | 1.864 3882 | 1.46 024 | 1.874 7891 | 1.46 133 | 1.885 2179 | 1.46 258 |
| 44 | 1.854 1834 | 1.45 938 | 1.864 5613 | 1.46 026 | 1.874 9627 | 1.46 135 | 1.885 3919 | 1.46 260 |
| 45 | 1.854 3562 | 1.45 940 | 1.864 7345 | 1.46 028 | 1.875 1363 | 1.46 136 | 1.885 5660 | 1.46 262 |
| 46 | 1.854 5290 | 1.45 941 | 1.864 9076 | 1.46 029 | 1.875 3099 | 1.46 138 | 1.885 7401 | 1.46 265 |
| 47 | 1.854 7018 | 1.45 942 | 1.865 0808 | 1.46 031 | 1.875 4835 | 1.46 140 | 1.885 9142 | 1.46 267 |
| 48 | 1.854 8746 | 1.45 944 | 1.865 2539 | 1.46 032 | 1.875 6571 | 1.46 142 | 1.886 0883 | 1.46 269 |
| 49 | 1.855 0474 | 1.45 945 | 1.865 4271 | 1.46 034 | 1.875 8307 | 1.46 144 | 1.886 2624 | 1.46 271 |
| 50 | 1.855 2202 | 1.45 946 | 1.865 6003 | 1.46 036 | 1.876 0043 | 1.46 146 | 1.886 4366 | 1.46 273 |
| 51 | 1.855 3931 | 1.45 947 | 1.865 7735 | 1.46 038 | 1.876 1779 | 1.46 148 | 1.886 6107 | 1.46 275 |
| 52 | 1.855 5659 | 1.45 949 | 1.865 9467 | 1.46 039 | 1.876 3515 | 1.46 150 | 1.886 7848 | 1.46 278 |
| 53 | 1.855 7387 | 1.45 950 | 1.866 1199 | 1.46 041 | 1.876 5252 | 1.46 152 | 1.886 9590 | 1.46 280 |
| 54 | 1.855 9116 | 1.45 951 | 1.866 2931 | 1.46 043 | 1.876 6988 | 1.46 154 | 1.887 1332 | 1.46 282 |
| 55 | 1.856 0844 | 1.45 953 | 1.866 4663 | 1.46 044 | 1.876 8725 | 1.46 155 | 1.887 3073 | 1.46 284 |
| 56 | 1.856 2573 | 1.45 954 | 1.866 6396 | 1.46 046 | 1.877 0462 | 1.46 157 | 1.887 4815 | 1.46 286 |
| 57 | 1.856 4301 | 1.45 955 | 1.866 8128 | 1.46 048 | 1.877 2198 | 1.46 159 | 1.887 6557 | 1.46 289 |
| 58 | 1.856 6030 | 1.45 957 | 1.866 9860 | 1.46 049 | 1.877 3935 | 1.46 161 | 1.887 8299 | 1.46 291 |
| 59 | 1.856 7759 | 1.45 958 | 1.867 1593 | 1.46 051 | 1.877 5672 | 1.46 163 | 1.888 0041 | 1.46 293 |
| 60 | 1.856 9488 | 1.45 959 | 1.867 3325 | 1.46 053 | 1.877 7409 | 1.46 165 | 1.888 1783 | 1.46 295 |

## Tafel V.

| v | 76° log M | 76° log Diff. 1″ | 77° log M | 77° log Diff. 1″ | 78° log M | 78° log Diff. 1″ | 79° log M | 79° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.888 1783 | 1.46 295 | 1.898 6492 | 1.46 443 | 1.909 1580 | 1.46 609 | 1.919 7092 | 1.46 793 |
| 1 | 1.888 3526 | 1.46 297 | 1.898 8240 | 1.46 446 | 1.909 3335 | 1.46 612 | 1.919 8854 | 1.46 796 |
| 2 | 1.888 5268 | 1.46 300 | 1.898 9989 | 1.46 448 | 1.909 5090 | 1.46 615 | 1.920 0617 | 1.46 800 |
| 3 | 1.888 7010 | 1.46 302 | 1.899 1737 | 1.46 451 | 1.909 6845 | 1.46 618 | 1.920 2379 | 1.46 803 |
| 4 | 1.888 8753 | 1.46 304 | 1.899 3486 | 1.46 454 | 1.909 8601 | 1.46 621 | 1.920 4142 | 1.46 806 |
| 5 | 1.889 0496 | 1.46 307 | 1.899 5235 | 1.46 456 | 1.910 0356 | 1.46 624 | 1.920 5905 | 1.46 809 |
| 6 | 1.889 2238 | 1.46 309 | 1.899 6983 | 1.46 459 | 1.910 2112 | 1.46 627 | 1.920 7668 | 1.46 812 |
| 7 | 1.889 3981 | 1.46 312 | 1.899 8732 | 1.46 462 | 1.910 3867 | 1.46 630 | 1.920 9431 | 1.46 816 |
| 8 | 1.889 5724 | 1.46 314 | 1.900 0481 | 1.46 464 | 1.910 5623 | 1.46 633 | 1.921 1194 | 1.46 819 |
| 9 | 1.889 7467 | 1.46 316 | 1.900 2230 | 1.46 467 | 1.910 7379 | 1.46 636 | 1.921 2958 | 1.46 822 |
| 10 | 1.889 9210 | 1.46 319 | 1.900 3979 | 1.46 470 | 1.910 9135 | 1.46 639 | 1.921 4721 | 1.46 825 |
| 11 | 1.890 0954 | 1.46 321 | 1.900 5729 | 1.46 473 | 1.911 0891 | 1.46 642 | 1.921 6485 | 1.46 828 |
| 12 | 1.890 2697 | 1.46 324 | 1.900 7478 | 1.46 475 | 1.911 2647 | 1.46 644 | 1.921 8249 | 1.46 832 |
| 13 | 1.890 4440 | 1.46 326 | 1.900 9228 | 1.46 478 | 1.911 4404 | 1.46 647 | 1.922 0013 | 1.46 835 |
| 14 | 1.890 6184 | 1.46 328 | 1.901 0977 | 1.46 481 | 1.911 6160 | 1.46 650 | 1.922 1777 | 1.46 838 |
| 15 | 1.890 7927 | 1.46 331 | 1.901 2727 | 1.46 483 | 1.911 7917 | 1.46 653 | 1.922 3541 | 1.46 842 |
| 16 | 1.890 9671 | 1.46 333 | 1.901 4477 | 1.46 486 | 1.911 9673 | 1.46 656 | 1.922 5305 | 1.46 845 |
| 17 | 1.891 1415 | 1.46 336 | 1.901 6227 | 1.46 489 | 1.912 1430 | 1.46 659 | 1.922 7070 | 1.46 848 |
| 18 | 1.891 3159 | 1.46 338 | 1.901 7977 | 1.46 491 | 1.912 3187 | 1.46 662 | 1.922 8835 | 1.46 852 |
| 19 | 1.891 4903 | 1.46 341 | 1.901 9727 | 1.46 494 | 1.912 4944 | 1.46 665 | 1.923 0599 | 1.46 855 |
| 20 | 1.891 6647 | 1.46 343 | 1.902 1477 | 1.46 497 | 1.912 6702 | 1.46 668 | 1.923 2364 | 1.46 858 |
| 21 | 1.891 8391 | 1.46 345 | 1.902 3228 | 1.46 500 | 1.912 8459 | 1.46 671 | 1.923 4129 | 1.46 861 |
| 22 | 1.892 0135 | 1.46 348 | 1.902 4978 | 1.46 502 | 1.913 0216 | 1.46 674 | 1.923 5894 | 1.46 865 |
| 23 | 1.892 1880 | 1.46 350 | 1.902 6729 | 1.46 505 | 1.913 1974 | 1.46 677 | 1.923 7660 | 1.46 868 |
| 24 | 1.892 3624 | 1.46 352 | 1.902 8479 | 1.46 508 | 1.913 3731 | 1.46 680 | 1.923 9425 | 1.46 871 |
| 25 | 1.892 5369 | 1.46 355 | 1.903 0230 | 1.46 510 | 1.913 5489 | 1.46 684 | 1.924 1191 | 1.46 875 |
| 26 | 1.892 7114 | 1.46 357 | 1.903 1981 | 1.46 513 | 1.913 7247 | 1.46 687 | 1.924 2956 | 1.46 878 |
| 27 | 1.892 8858 | 1.46 360 | 1.903 3732 | 1.46 516 | 1.913 9005 | 1.46 690 | 1.924 4722 | 1.46 881 |
| 28 | 1.893 0603 | 1.46 362 | 1.903 5483 | 1.46 518 | 1.914 0764 | 1.46 693 | 1.924 6488 | 1.46 885 |
| 29 | 1.893 2348 | 1.46 365 | 1.903 7235 | 1.46 521 | 1.914 2522 | 1.46 696 | 1.924 8254 | 1.46 888 |
| 30 | 1.893 4093 | 1.46 367 | 1.903 8986 | 1.46 524 | 1.914 4280 | 1.46 699 | 1.925 0020 | 1.46 891 |
| 31 | 1.893 5838 | 1.46 370 | 1.904 0738 | 1.46 527 | 1.914 6039 | 1.46 702 | 1.925 1787 | 1.46 894 |
| 32 | 1.893 7584 | 1.46 372 | 1.904 2489 | 1.46 530 | 1.914 7797 | 1.46 705 | 1.925 3553 | 1.46 898 |
| 33 | 1.893 9329 | 1.46 375 | 1.904 4241 | 1.46 532 | 1.914 9556 | 1.46 708 | 1.925 5320 | 1.46 901 |
| 34 | 1.894 1074 | 1.46 377 | 1.904 5993 | 1.46 535 | 1.915 1315 | 1.46 711 | 1.925 7087 | 1.46 904 |
| 35 | 1.894 2820 | 1.46 380 | 1.904 7745 | 1.46 538 | 1.915 3074 | 1.46 715 | 1.925 8854 | 1.46 908 |
| 36 | 1.894 4566 | 1.46 383 | 1.904 9497 | 1.46 541 | 1.915 4834 | 1.46 718 | 1.926 0621 | 1.46 911 |
| 37 | 1.894 6311 | 1.46 385 | 1.905 1249 | 1.46 543 | 1.915 6593 | 1.46 721 | 1.926 2388 | 1.46 915 |
| 38 | 1.894 8057 | 1.46 388 | 1.905 3001 | 1.46 546 | 1.915 8352 | 1.46 724 | 1.926 4155 | 1.46 918 |
| 39 | 1.894 9803 | 1.46 390 | 1.905 4753 | 1.46 549 | 1.916 0112 | 1.46 727 | 1.926 5923 | 1.46 921 |
| 40 | 1.895 1549 | 1.46 393 | 1.905 6506 | 1.46 552 | 1.916 1871 | 1.46 730 | 1.926 7690 | 1.46 925 |
| 41 | 1.895 3295 | 1.46 395 | 1.905 8259 | 1.46 555 | 1.916 3631 | 1.46 733 | 1.926 9458 | 1.46 928 |
| 42 | 1.895 5042 | 1.46 398 | 1.906 0011 | 1.46 558 | 1.916 5391 | 1.46 736 | 1.927 1226 | 1.46 932 |
| 43 | 1.895 6788 | 1.46 400 | 1.906 1764 | 1.46 561 | 1.916 7151 | 1.46 739 | 1.927 2994 | 1.46 935 |
| 44 | 1.895 8534 | 1.46 403 | 1.906 3517 | 1.46 564 | 1.916 8911 | 1.46 742 | 1.927 4762 | 1.46 938 |
| 45 | 1.896 0281 | 1.46 405 | 1.906 5270 | 1.46 566 | 1.917 0671 | 1.46 746 | 1.927 6530 | 1.46 942 |
| 46 | 1.896 2028 | 1.46 408 | 1.906 7024 | 1.46 569 | 1.917 2432 | 1.46 749 | 1.927 8299 | 1.46 945 |
| 47 | 1.896 3775 | 1.46 410 | 1.906 8777 | 1.46 572 | 1.917 4193 | 1.46 752 | 1.928 0067 | 1.46 949 |
| 48 | 1.896 5522 | 1.46 413 | 1.907 0530 | 1.46 575 | 1.917 5953 | 1.46 755 | 1.928 1836 | 1.46 952 |
| 49 | 1.896 7269 | 1.46 415 | 1.907 2284 | 1.46 578 | 1.917 7714 | 1.46 758 | 1.928 3605 | 1.46 956 |
| 50 | 1.896 9016 | 1.46 418 | 1.907 4037 | 1.46 581 | 1.917 9475 | 1.46 761 | 1.928 5374 | 1.46 959 |
| 51 | 1.897 0763 | 1.46 420 | 1.907 5791 | 1.46 583 | 1.918 1236 | 1.46 764 | 1.928 7143 | 1.46 962 |
| 52 | 1.897 2510 | 1.46 423 | 1.907 7545 | 1.46 586 | 1.918 2998 | 1.46 768 | 1.928 8912 | 1.46 966 |
| 53 | 1.897 4257 | 1.46 425 | 1.907 9299 | 1.46 589 | 1.918 4759 | 1.46 771 | 1.929 0682 | 1.46 969 |
| 54 | 1.897 6005 | 1.46 428 | 1.908 1053 | 1.46 592 | 1.918 6520 | 1.46 774 | 1.929 2451 | 1.46 973 |
| 55 | 1.897 7753 | 1.46 430 | 1.908 2807 | 1.46 595 | 1.918 8282 | 1.46 777 | 1.929 4221 | 1.46 976 |
| 56 | 1.897 9500 | 1.46 433 | 1.908 4562 | 1.46 597 | 1.919 0044 | 1.46 780 | 1.929 5991 | 1.46 980 |
| 57 | 1.898 1248 | 1.46 435 | 1.908 6316 | 1.46 600 | 1.919 1805 | 1.46 784 | 1.929 7761 | 1.46 983 |
| 58 | 1.898 2996 | 1.46 438 | 1.908 8071 | 1.46 603 | 1.919 3567 | 1.46 787 | 1.929 9531 | 1.46 987 |
| 59 | 1.898 4744 | 1.46 440 | 1.908 9825 | 1.46 606 | 1.919 5329 | 1.46 790 | 1.930 1301 | 1.46 990 |
| 60 | 1.898 6492 | 1.46 443 | 1.909 1580 | 1.46 609 | 1.919 7092 | 1.46 793 | 1.930 3072 | 1.46 994 |

## Tafel V.

| v | 80° | | 81° | | 82° | | 83° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ |
| 0′ | 1.930 3072 | 1.46 994 | 1.940 9564 | 1.47 213 | 1.951 6616 | 1.47 448 | 1.962 4271 | 1.47 701 |
| 1 | 1.930 4842 | 1.46 997 | 1.941 1344 | 1.47 217 | 1.951 8405 | 1.47 452 | 1.962 6071 | 1.47 705 |
| 2 | 1.930 6613 | 1.47 001 | 1.941 3123 | 1.47 221 | 1.952 0194 | 1.47 456 | 1.962 7870 | 1.47 710 |
| 3 | 1.930 8384 | 1.47 004 | 1.941 4903 | 1.47 224 | 1.952 1984 | 1.47 460 | 1.962 9670 | 1.47 714 |
| 4 | 1.931 0155 | 1.47 008 | 1.941 6683 | 1.47 228 | 1.952 3773 | 1.47 464 | 1.963 1470 | 1.47 718 |
| 5 | 1.931 1926 | 1.47 011 | 1.941 8463 | 1.47 232 | 1.952 5563 | 1.47 469 | 1.963 3271 | 1.47 723 |
| 6 | 1.931 3697 | 1.47 015 | 1.942 0244 | 1.47 236 | 1.952 7353 | 1.47 473 | 1.963 5071 | 1.47 727 |
| 7 | 1.931 5468 | 1.47 018 | 1.942 2024 | 1.47 239 | 1.952 9143 | 1.47 477 | 1.963 6872 | 1.47 732 |
| 8 | 1.931 7240 | 1.47 022 | 1.942 3805 | 1.47 243 | 1.953 0934 | 1.47 481 | 1.963 8673 | 1.47 736 |
| 9 | 1.931 9012 | 1.47 025 | 1.942 5585 | 1.47 247 | 1.953 2724 | 1.47 485 | 1.964 0474 | 1.47 741 |
| 10 | 1.932 0784 | 1.47 029 | 1.942 7366 | 1.47 251 | 1.953 4515 | 1.47 489 | 1.964 2275 | 1.47 745 |
| 11 | 1.932 2556 | 1.47 033 | 1.942 9147 | 1.47 255 | 1.953 6306 | 1.47 493 | 1.964 4077 | 1.47 749 |
| 12 | 1.932 4328 | 1.47 036 | 1.943 0928 | 1.47 259 | 1.953 8097 | 1.47 498 | 1.964 5878 | 1.47 754 |
| 13 | 1.932 6100 | 1.47 040 | 1.943 2710 | 1.47 262 | 1.953 9888 | 1.47 502 | 1.964 7680 | 1.47 758 |
| 14 | 1.932 7872 | 1.47 043 | 1.943 4491 | 1.47 266 | 1.954 1679 | 1.47 506 | 1.964 9482 | 1.47 762 |
| 15 | 1.932 9645 | 1.47 047 | 1.943 6273 | 1.47 270 | 1.954 3471 | 1.47 510 | 1.965 1284 | 1.47 767 |
| 16 | 1.933 1418 | 1.47 051 | 1.943 8055 | 1.47 274 | 1.954 5263 | 1.47 514 | 1.965 3087 | 1.47 771 |
| 17 | 1.933 3190 | 1.47 054 | 1.943 9837 | 1.47 277 | 1.954 7054 | 1.47 519 | 1.965 4889 | 1.47 776 |
| 18 | 1.933 4963 | 1.47 058 | 1.944 1619 | 1.47 281 | 1.954 8847 | 1.47 523 | 1.965 6692 | 1.47 780 |
| 19 | 1.933 6736 | 1.47 061 | 1.944 3401 | 1.47 285 | 1.955 0639 | 1.47 527 | 1.965 8495 | 1.47 785 |
| 20 | 1.933 8510 | 1.47 065 | 1.944 5184 | 1.47 289 | 1.955 2431 | 1.47 531 | 1.966 0298 | 1.47 789 |
| 21 | 1.934 0283 | 1.47 069 | 1.944 6966 | 1.47 293 | 1.955 4224 | 1.47 535 | 1.966 2101 | 1.47 793 |
| 22 | 1.934 2057 | 1.47 072 | 1.944 8749 | 1.47 297 | 1.955 6017 | 1.47 539 | 1.966 3905 | 1.47 798 |
| 23 | 1.934 3831 | 1.47 076 | 1.945 0532 | 1.47 301 | 1.955 7810 | 1.47 544 | 1.966 5709 | 1.47 802 |
| 24 | 1.934 5605 | 1.47 080 | 1.945 2315 | 1.47 305 | 1.955 9603 | 1.47 548 | 1.966 7512 | 1.47 807 |
| 25 | 1.934 7379 | 1.47 083 | 1.945 4099 | 1.47 308 | 1.956 1396 | 1.47 552 | 1.966 9316 | 1.47 811 |
| 26 | 1.934 9153 | 1.47 087 | 1.945 5882 | 1.47 312 | 1.956 3189 | 1.47 556 | 1.967 1121 | 1.47 816 |
| 27 | 1.935 0927 | 1.47 090 | 1.945 7666 | 1.47 316 | 1.956 4983 | 1.47 560 | 1.967 2925 | 1.47 820 |
| 28 | 1.935 2702 | 1.47 094 | 1.945 9449 | 1.47 320 | 1.956 6777 | 1.47 565 | 1.967 4730 | 1.47 825 |
| 29 | 1.935 4476 | 1.47 097 | 1.946 1233 | 1.47 324 | 1.956 8571 | 1.47 569 | 1.967 6534 | 1.47 829 |
| 30 | 1.935 6251 | 1.47 101 | 1.946 3017 | 1.47 328 | 1.957 0365 | 1.47 573 | 1.967 8339 | 1.47 834 |
| 31 | 1.935 8026 | 1.47 105 | 1.946 4802 | 1.47 332 | 1.957 2159 | 1.47 577 | 1.968 0145 | 1.47 838 |
| 32 | 1.935 9801 | 1.47 108 | 1.946 6586 | 1.47 336 | 1.957 3954 | 1.47 581 | 1.968 1950 | 1.47 843 |
| 33 | 1.936 1577 | 1.47 112 | 1.946 8371 | 1.47 340 | 1.957 5748 | 1.47 586 | 1.968 3755 | 1.47 847 |
| 34 | 1.936 3351 | 1.47 116 | 1.947 0155 | 1.47 344 | 1.957 7543 | 1.47 590 | 1.968 5561 | 1.47 852 |
| 35 | 1.936 5127 | 1.47 119 | 1.947 1940 | 1.47 348 | 1.957 9338 | 1.47 594 | 1.968 7367 | 1.47 856 |
| 36 | 1.936 6903 | 1.47 123 | 1.947 3725 | 1.47 352 | 1.958 1133 | 1.47 598 | 1.968 9173 | 1.47 861 |
| 37 | 1.936 8678 | 1.47 127 | 1.947 5510 | 1.47 356 | 1.958 2929 | 1.47 603 | 1.969 0979 | 1.47 865 |
| 38 | 1.937 0455 | 1.47 131 | 1.947 7296 | 1.47 360 | 1.958 4724 | 1.47 607 | 1.969 2786 | 1.47 870 |
| 39 | 1.937 2231 | 1.47 134 | 1.947 9081 | 1.47 364 | 1.958 6520 | 1.47 611 | 1.969 4592 | 1.47 874 |
| 40 | 1.937 4007 | 1.47 138 | 1.948 0867 | 1.47 368 | 1.958 8316 | 1.47 615 | 1.969 6399 | 1.47 879 |
| 41 | 1.937 5783 | 1.47 142 | 1.948 2653 | 1.47 372 | 1.959 0112 | 1.47 619 | 1.969 8206 | 1.47 883 |
| 42 | 1.937 7560 | 1.47 146 | 1.948 4439 | 1.47 376 | 1.959 1908 | 1.47 623 | 1.970 0014 | 1.47 888 |
| 43 | 1.937 9337 | 1.47 149 | 1.948 6225 | 1.47 380 | 1.959 3705 | 1.47 628 | 1.970 1821 | 1.47 892 |
| 44 | 1.938 1113 | 1.47 153 | 1.948 8011 | 1.47 384 | 1.959 5501 | 1.47 632 | 1.970 3629 | 1.47 897 |
| 45 | 1.938 2891 | 1.47 157 | 1.948 9798 | 1.47 388 | 1.959 7298 | 1.47 636 | 1.970 5436 | 1.47 902 |
| 46 | 1.938 4668 | 1.47 160 | 1.949 1585 | 1.47 392 | 1.959 9095 | 1.47 640 | 1.970 7244 | 1.47 907 |
| 47 | 1.938 6445 | 1.47 164 | 1.949 3371 | 1.47 396 | 1.960 0892 | 1.47 645 | 1.970 9053 | 1.47 911 |
| 48 | 1.938 8223 | 1.47 168 | 1.949 5159 | 1.47 400 | 1.960 2689 | 1.47 649 | 1.971 0861 | 1.47 916 |
| 49 | 1.939 0000 | 1.47 171 | 1.949 6946 | 1.47 404 | 1.960 4487 | 1.47 653 | 1.971 2669 | 1.47 920 |
| 50 | 1.939 1778 | 1.47 175 | 1.949 8733 | 1.47 408 | 1.960 6284 | 1.47 657 | 1.971 4478 | 1.47 925 |
| 51 | 1.939 3556 | 1.47 179 | 1.950 0521 | 1.47 412 | 1.960 8082 | 1.47 661 | 1.971 6287 | 1.47 929 |
| 52 | 1.939 5334 | 1.47 183 | 1.950 2308 | 1.47 416 | 1.960 9880 | 1.47 666 | 1.971 8096 | 1.47 933 |
| 53 | 1.939 7112 | 1.47 186 | 1.950 4096 | 1.47 420 | 1.961 1679 | 1.47 670 | 1.971 9906 | 1.47 938 |
| 54 | 1.939 8891 | 1.47 190 | 1.950 5884 | 1.47 424 | 1.961 3477 | 1.47 674 | 1.972 1715 | 1.47 943 |
| 55 | 1.940 0669 | 1.47 194 | 1.950 7672 | 1.47 428 | 1.961 5275 | 1.47 679 | 1.972 3525 | 1.47 947 |
| 56 | 1.940 2448 | 1.47 198 | 1.950 9461 | 1.47 432 | 1.961 7074 | 1.47 683 | 1.972 5335 | 1.47 952 |
| 57 | 1.940 4227 | 1.47 201 | 1.951 1249 | 1.47 436 | 1.961 8873 | 1.47 688 | 1.972 7145 | 1.47 957 |
| 58 | 1.940 6006 | 1.47 205 | 1.951 3038 | 1.47 440 | 1.962 0672 | 1.47 692 | 1.972 8955 | 1.47 962 |
| 59 | 1.940 7785 | 1.47 209 | 1.951 4827 | 1.47 444 | 1.962 2471 | 1.47 697 | 1.973 0766 | 1.47 966 |
| 60 | 1.940 9564 | 1.47 213 | 1.951 6616 | 1.47 448 | 1.962 4271 | 1.47 701 | 1.973 2576 | 1.47 971 |

## Tafel V.

| v | 84° log M | 84° log Diff. 1″ | 85° log M | 85° log Diff. 1″ | 86° log M | 86° log Diff. 1″ | 87° log M | 87° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 1.973 2576 | 1.47 971 | 1.984 1579 | 1.48 258 | 1.995 1325 | 1.48 562 | 2.006 1863 | 1.48 883 |
| 1 | 1.973 4387 | 1.47 975 | 1.984 3401 | 1.48 263 | 1.995 3161 | 1.48 567 | 2.006 3713 | 1.48 888 |
| 2 | 1.973 6198 | 1.47 980 | 1.984 5225 | 1.48 268 | 1.995 4997 | 1.48 573 | 2.006 5562 | 1.48 894 |
| 3 | 1.973 8010 | 1.47 984 | 1.984 7048 | 1.48 273 | 1.995 6833 | 1.48 578 | 2.006 7412 | 1.48 899 |
| 4 | 1.973 9821 | 1.47 989 | 1.984 8871 | 1.48 278 | 1.995 8669 | 1.48 583 | 2.006 9262 | 1.48 905 |
| 5 | 1.974 1633 | 1.47 994 | 1.985 0695 | 1.48 283 | 1.996 0506 | 1.48 588 | 2.007 1112 | 1.48 910 |
| 6 | 1.974 3445 | 1.47 998 | 1.985 2519 | 1.48 288 | 1.996 2342 | 1.48 593 | 2.007 2963 | 1.48 916 |
| 7 | 1.974 5256 | 1.48 003 | 1.985 4343 | 1.48 293 | 1.996 4179 | 1.48 599 | 2.007 4813 | 1.48 921 |
| 8 | 1.974 7069 | 1.48 007 | 1.985 6167 | 1.48 298 | 1.996 6017 | 1.48 604 | 2.007 6664 | 1.48 927 |
| 9 | 1.974 8881 | 1.48 012 | 1.985 7992 | 1.48 303 | 1.996 7854 | 1.48 609 | 2.007 8515 | 1.48 932 |
| 10 | 1.975 0694 | 1.48 017 | 1.985 9817 | 1.48 308 | 1.996 9692 | 1.48 614 | 2.008 0367 | 1.48 938 |
| 11 | 1.975 2507 | 1.48 022 | 1.986 1642 | 1.48 313 | 1.997 1530 | 1.48 619 | 2.008 2219 | 1.48 943 |
| 12 | 1.975 4320 | 1.48 026 | 1.986 3467 | 1.48 318 | 1.997 3368 | 1.48 625 | 2.008 4070 | 1.48 949 |
| 13 | 1.975 6133 | 1.48 031 | 1.986 5292 | 1.48 323 | 1.997 5206 | 1.48 630 | 2.008 5923 | 1.48 954 |
| 14 | 1.975 7946 | 1.48 036 | 1.986 7118 | 1.48 328 | 1.997 7045 | 1.48 635 | 2.008 7775 | 1.48 960 |
| 15 | 1.975 9760 | 1.48 041 | 1.986 8944 | 1.48 333 | 1.997 8883 | 1.48 641 | 2.008 9628 | 1.48 965 |
| 16 | 1.976 1574 | 1.48 046 | 1.987 0770 | 1.48 338 | 1.998 0722 | 1.48 646 | 2.009 1480 | 1.48 971 |
| 17 | 1.976 3388 | 1.48 050 | 1.987 2596 | 1.48 343 | 1.998 2562 | 1.48 651 | 2.009 3333 | 1.48 976 |
| 18 | 1.976 5202 | 1.48 055 | 1.987 4422 | 1.48 348 | 1.998 4401 | 1.48 657 | 2.009 5187 | 1.48 982 |
| 19 | 1.976 7016 | 1.48 060 | 1.987 6249 | 1.48 353 | 1.998 6241 | 1.48 662 | 2.009 7040 | 1.48 98[illegible] |
| 20 | 1.976 8831 | 1.48 065 | 1.987 8076 | 1.48 358 | 1.998 8081 | 1.48 667 | 2.009 8894 | 1.48 993 |
| 21 | 1.977 0645 | 1.48 069 | 1.987 9903 | 1.48 363 | 1.998 9921 | 1.48 672 | 2.010 0748 | 1.48 999 |
| 22 | 1.977 2460 | 1.48 074 | 1.988 1730 | 1.48 368 | 1.999 1761 | 1.48 678 | 2.010 2602 | 1.49 004 |
| 23 | 1.977 4276 | 1.48 079 | 1.988 3557 | 1.48 373 | 1.999 3602 | 1.48 683 | 2.010 4457 | 1.49 010 |
| 24 | 1.977 6091 | 1.48 083 | 1.988 5385 | 1.48 378 | 1.999 5443 | 1.48 688 | 2.010 6312 | 1.49 015 |
| 25 | 1.977 7907 | 1.48 088 | 1.988 7213 | 1.48 383 | 1.999 7284 | 1.48 694 | 2.010 8166 | 1.49 021 |
| 26 | 1.977 9722 | 1.48 093 | 1.988 9041 | 1.48 388 | 1.999 9125 | 1.48 699 | 2.011 0022 | 1.49 02[illegible] |
| 27 | 1.978 1538 | 1.48 098 | 1.989 0869 | 1.48 393 | 2.000 0966 | 1.48 704 | 2.011 1877 | 1.49 032 |
| 28 | 1.978 3355 | 1.48 102 | 1.989 2698 | 1.48 398 | 2.000 2808 | 1.48 710 | 2.011 3733 | 1.49 038 |
| 29 | 1.978 5171 | 1.48 107 | 1.989 4527 | 1.48 403 | 2.000 4650 | 1.48 715 | 2.011 5589 | 1.49 044 |
| 30 | 1.978 6987 | 1.48 112 | 1.989 6356 | 1.48 408 | 2.000 6492 | 1.48 720 | 2.011 7445 | 1.49 050 |
| 31 | 1.978 8804 | 1.48 117 | 1.989 8185 | 1.48 413 | 2.000 8335 | 1.48 725 | 2.011 9301 | 1.49 055 |
| 32 | 1.979 0621 | 1.48 122 | 1.990 0014 | 1.48 418 | 2.001 0177 | 1.48 731 | 2.012 1158 | 1.49 061 |
| 33 | 1.979 2438 | 1.48 127 | 1.990 1844 | 1.48 423 | 2.001 2020 | 1.48 736 | 2.012 3015 | 1.49 066 |
| 34 | 1.979 4256 | 1.48 132 | 1.990 3674 | 1.48 428 | 2.001 3863 | 1.48 741 | 2.012 4872 | 1.49 0[illegible]2 |
| 35 | 1.979 6073 | 1.48 136 | 1.990 5504 | 1.48 434 | 2.001 5706 | 1.48 747 | 2.012 6729 | 1.49 0[illegible]8 |
| 36 | 1.979 7891 | 1.48 141 | 1.990 7334 | 1.48 439 | 2.001 7550 | 1.48 752 | 2.012 8587 | 1.49 083 |
| 37 | 1.979 9709 | 1.48 146 | 1.990 9164 | 1.48 444 | 2.001 9394 | 1.48 758 | 2.013 0445 | 1.49 089 |
| 38 | 1.980 1527 | 1.48 151 | 1.991 0995 | 1.48 449 | 2.002 1238 | 1.48 763 | 2.013 2303 | 1.49 095 |
| 39 | 1.980 3346 | 1.48 156 | 1.991 2826 | 1.48 454 | 2.002 3082 | 1.48 768 | 2.013 4161 | 1.49 100 |
| 40 | 1.980 5164 | 1.48 161 | 1.991 4657 | 1.48 459 | 2.002 4926 | 1.48 774 | 2.013 6020 | 1.49 106 |
| 41 | 1.980 6983 | 1.48 166 | 1.991 6489 | 1.48 464 | 2.002 6771 | 1.48 779 | 2.013 7879 | 1.49 112 |
| 42 | 1.980 8802 | 1.48 170 | 1.991 8320 | 1.48 469 | 2.002 8616 | 1.48 785 | 2.013 9738 | 1.49 11[illegible] |
| 43 | 1.981 0621 | 1.48 175 | 1.992 0152 | 1.48 4[illegible]4 | 2.003 0461 | 1.48 790 | 2.014 1597 | 1.49 123 |
| 44 | 1.981 2440 | 1.48 180 | 1.992 1984 | 1.48 479 | 2.003 2306 | 1.48 795 | 2.014 3457 | 1.49 129 |
| 45 | 1.981 4260 | 1.48 185 | 1.992 3816 | 1.48 485 | 2.003 4152 | 1.48 801 | 2.014 5316 | 1.49 134 |
| 46 | 1.981 6080 | 1.48 190 | 1.992 5648 | 1.48 490 | 2.003 5998 | 1.48 806 | 2.014 7177 | 1.49 140 |
| 47 | 1.981 7900 | 1.48 194 | 1.992 7481 | 1.48 495 | 2.003 7844 | 1.48 812 | 2.014 9037 | 1.49 146 |
| 48 | 1.981 9720 | 1.48 199 | 1.992 9314 | 1.48 500 | 2.003 9690 | 1.48 817 | 2.015 [illegible] | 1.49 151 |
| 49 | 1.982 1540 | 1.48 204 | 1.993 1147 | 1.48 505 | 2.004 1537 | 1.48 822 | 2.015 2758 | 1.49 15[illegible] |
| 50 | 1.982 3361 | 1.48 209 | 1.993 2980 | 1.48 510 | 2.004 3383 | 1.48 828 | 2.015 4619 | 1.49 163 |
| 51 | 1.982 5182 | 1.48 214 | 1.993 4814 | 1.48 515 | 2.004 5230 | 1.48 833 | 2.015 6480 | 1.49 169 |
| 52 | 1.982 7003 | 1.48 219 | 1.993 6647 | 1.48 521 | 2.004 7077 | 1.48 839 | 2.015 8342 | 1.49 1[illegible]4 |
| 53 | 1.982 8824 | 1.48 224 | 1.993 8481 | 1.48 526 | 2.004 8925 | 1.48 844 | 2.016 0204 | 1.49 180 |
| 54 | 1.983 0646 | 1.48 229 | 1.994 0315 | 1.48 531 | 2.005 0773 | 1.48 850 | 2.016 2066 | 1.49 186 |
| 55 | 1.983 2467 | 1.48 233 | 1.994 2150 | 1.48 536 | 2.005 2620 | 1.48 855 | 2.016 3928 | 1.49 191 |
| 56 | 1.983 4289 | 1.48 238 | 1.994 3985 | 1.48 541 | 2.005 4469 | 1.48 861 | 2.016 5790 | 1.49 19[illegible] |
| 57 | 1.983 6111 | 1.48 243 | 1.994 5819 | 1.48 547 | 2.005 6317 | 1.48 866 | 2.016 7653 | 1.49 202 |
| 58 | 1.983 7934 | 1.48 248 | 1.994 7654 | 1.48 552 | 2.005 8165 | 1.48 872 | 2.016 9516 | 1.49 208 |
| 59 | 1.983 9756 | 1.48 253 | 1.994 9489 | 1.48 557 | 2.006 0014 | 1.48 877 | 2.017 1379 | 1.49 214 |
| 60 | 1.984 1579 | 1.48 258 | 1.995 1325 | 1.48 562 | 2.006 1863 | 1.48 883 | 2.017 3243 | 1.49 220 |

## Tafel V.

| 0 | 88° log *M* | 88° log Diff. 1″ | 89° log *M* | 89° log Diff. 1″ | 90° log *M* | 90° log Diff. 1″ | 91° log *M* | 91° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.017 3243 | 1.49 220 | 2.028 5512 | 1.49 574 | 2.039 8723 | 1.49 945 | 2.051 2926 | 1.50 332 |
| 1 | 2.017 5106 | 1.49 226 | 2.028 7391 | 1.49 580 | 2.040 0618 | 1.49 951 | 2.051 4838 | 1.50 339 |
| 2 | 2.017 6970 | 1.49 231 | 2.028 9271 | 1.49 586 | 2.040 2513 | 1.49 958 | 2.051 6750 | 1.50 345 |
| 3 | 2.017 8835 | 1.49 237 | 2.029 1150 | 1.49 592 | 2.040 4409 | 1.49 964 | 2.051 8663 | 1.50 352 |
| 4 | 2.018 0699 | 1.49 243 | 2.029 3030 | 1.49 598 | 2.040 6305 | 1.49 970 | 2.052 0576 | 1.50 359 |
| 5 | 2.018 2564 | 1.49 249 | 2.029 4910 | 1.49 605 | 2.040 8201 | 1.49 977 | 2.052 2489 | 1.50 365 |
| 6 | 2.018 4429 | 1.49 255 | 2.029 6790 | 1.49 611 | 2.041 0098 | 1.49 983 | 2.052 4403 | 1.50 372 |
| 7 | 2.018 6294 | 1.49 260 | 2.029 8671 | 1.49 617 | 2.041 1995 | 1.49 989 | 2.052 6317 | 1.50 379 |
| 8 | 2.018 8159 | 1.49 266 | 2.030 0552 | 1.49 623 | 2.041 3892 | 1.49 996 | 2.052 8231 | 1.50 385 |
| 9 | 2.019 0025 | 1.49 272 | 2.030 2433 | 1.49 629 | 2.041 5789 | 1.50 002 | 2.053 0145 | 1.50 392 |
| 10 | 2.019 1891 | 1.49 278 | 2.030 4314 | 1.49 635 | 2.041 7686 | 1.50 008 | 2.053 2060 | 1.50 399 |
| 11 | 2.019 3757 | 1.49 284 | 2.030 6196 | 1.49 641 | 2.041 9584 | 1.50 014 | 2.053 3975 | 1.50 406 |
| 12 | 2.019 5624 | 1.49 290 | 2.030 8078 | 1.49 647 | 2.042 1482 | 1.50 021 | 2.053 5890 | 1.50 412 |
| 13 | 2.019 7491 | 1.49 296 | 2.030 9960 | 1.49 653 | 2.042 3381 | 1.50 027 | 2.053 7806 | 1.50 419 |
| 14 | 2.019 9358 | 1.49 302 | 2.031 1842 | 1.49 659 | 2.042 5280 | 1.50 033 | 2.053 9722 | 1.50 426 |
| 15 | 2.020 1225 | 1.49 307 | 2.031 3725 | 1.49 666 | 2.042 7179 | 1.50 040 | 2.054 1638 | 1.50 432 |
| 16 | 2.020 3092 | 1.49 313 | 2.031 5608 | 1.49 672 | 2.042 9078 | 1.50 046 | 2.054 3554 | 1.50 439 |
| 17 | 2.020 4960 | 1.49 319 | 2.031 7491 | 1.49 678 | 2.043 0977 | 1.50 053 | 2.054 5471 | 1.50 446 |
| 18 | 2.020 6828 | 1.49 325 | 2.031 9374 | 1.49 684 | 2.043 2877 | 1.50 059 | 2.054 7388 | 1.50 452 |
| 19 | 2.020 8696 | 1.49 331 | 2.032 1258 | 1.49 690 | 2.043 4777 | 1.50 065 | 2.054 9305 | 1.50 459 |
| 20 | 2.021 0565 | 1.49 337 | 2.032 3142 | 1.49 696 | 2.043 6678 | 1.50 072 | 2.055 1223 | 1.50 465 |
| 21 | 2.021 2433 | 1.49 343 | 2.032 5027 | 1.49 702 | 2.043 8578 | 1.50 078 | 2.055 3141 | 1.50 472 |
| 22 | 2.021 4302 | 1.49 349 | 2.032 6911 | 1.49 708 | 2.044 0479 | 1.50 085 | 2.055 5059 | 1.50 479 |
| 23 | 2.021 6172 | 1.49 355 | 2.032 8796 | 1.49 714 | 2.044 2381 | 1.50 091 | 2.055 6978 | 1.50 485 |
| 24 | 2.021 8041 | 1.49 361 | 2.033 0681 | 1.49 720 | 2.044 4282 | 1.50 097 | 2.055 8897 | 1.50 492 |
| 25 | 2.021 9911 | 1.49 366 | 2.033 2566 | 1.49 727 | 2.044 6184 | 1.50 104 | 2.056 0816 | 1.50 499 |
| 26 | 2.022 1781 | 1.49 372 | 2.033 4452 | 1.49 733 | 2.044 8086 | 1.50 110 | 2.056 2735 | 1.50 506 |
| 27 | 2.022 3651 | 1.49 378 | 2.033 6338 | 1.49 739 | 2.044 9988 | 1.50 117 | 2.056 4655 | 1.50 512 |
| 28 | 2.022 5521 | 1.49 384 | 2.033 8224 | 1.49 745 | 2.045 1891 | 1.50 123 | 2.056 6575 | 1.50 519 |
| 29 | 2.022 7392 | 1.49 390 | 2.034 0110 | 1.49 751 | 2.045 3794 | 1.50 129 | 2.056 8495 | 1.50 525 |
| 30 | 2.022 9263 | 1.49 396 | 2.034 1997 | 1.49 757 | 2.045 5697 | 1.50 136 | 2.057 0416 | 1.50 532 |
| 31 | 2.023 1134 | 1.49 402 | 2.034 3884 | 1.49 763 | 2.045 7601 | 1.50 142 | 2.057 2337 | 1.50 539 |
| 32 | 2.023 3006 | 1.49 407 | 2.034 5771 | 1.49 770 | 2.045 9504 | 1.50 149 | 2.057 4258 | 1.50 545 |
| 33 | 2.023 4878 | 1.49 413 | 2.034 7659 | 1.49 776 | 2.046 1408 | 1.50 155 | 2.057 6179 | 1.50 552 |
| 34 | 2.023 6750 | 1.49 419 | 2.034 9546 | 1.49 782 | 2.046 3313 | 1.50 162 | 2.057 8101 | 1.50 559 |
| 35 | 2.023 8622 | 1.49 425 | 2.035 1434 | 1.49 788 | 2.046 5217 | 1.50 168 | 2.058 0023 | 1.50 566 |
| 36 | 2.024 0495 | 1.49 431 | 2.035 3323 | 1.49 794 | 2.046 7122 | 1.50 175 | 2.058 1946 | 1.50 573 |
| 37 | 2.024 2367 | 1.49 437 | 2.035 5211 | 1.49 801 | 2.046 9027 | 1.50 181 | 2.058 3868 | 1.50 579 |
| 38 | 2.024 4240 | 1.49 443 | 2.035 7100 | 1.49 807 | 2.047 0933 | 1.50 188 | 2.058 5791 | 1.50 586 |
| 39 | 2.024 6114 | 1.49 448 | 2.035 8989 | 1.49 813 | 2.047 2839 | 1.50 194 | 2.058 7715 | 1.50 593 |
| 40 | 2.024 7987 | 1.49 454 | 2.036 0878 | 1.49 819 | 2.047 4745 | 1.50 201 | 2.058 9638 | 1.50 600 |
| 41 | 2.024 9861 | 1.49 460 | 2.036 2768 | 1.49 825 | 2.047 6651 | 1.50 207 | 2.059 1562 | 1.50 607 |
| 42 | 2.025 1735 | 1.49 466 | 2.036 4658 | 1.49 832 | 2.047 8558 | 1.50 214 | 2.059 3486 | 1.50 613 |
| 43 | 2.025 3609 | 1.49 472 | 2.036 6548 | 1.49 838 | 2.048 0465 | 1.50 220 | 2.059 5411 | 1.50 620 |
| 44 | 2.025 5484 | 1.49 478 | 2.036 8439 | 1.49 844 | 2.048 2372 | 1.50 227 | 2.059 7336 | 1.50 627 |
| 45 | 2.025 7359 | 1.49 484 | 2.037 0329 | 1.49 851 | 2.048 4279 | 1.50 233 | 2.059 9261 | 1.50 634 |
| 46 | 2.025 9234 | 1.49 490 | 2.037 2220 | 1.49 857 | 2.048 6187 | 1.50 240 | 2.060 1186 | 1.50 641 |
| 47 | 2.026 1109 | 1.49 496 | 2.037 4112 | 1.49 863 | 2.048 8095 | 1.50 246 | 2.060 3112 | 1.50 647 |
| 48 | 2.026 2985 | 1.49 502 | 2.037 6003 | 1.49 870 | 2.049 0003 | 1.50 253 | 2.060 5038 | 1.50 654 |
| 49 | 2.026 4861 | 1.49 508 | 2.037 7895 | 1.49 876 | 2.049 1912 | 1.50 259 | 2.060 6964 | 1.50 661 |
| 50 | 2.026 6737 | 1.49 514 | 2.037 9787 | 1.49 882 | 2.049 3821 | 1.50 266 | 2.060 8891 | 1.50 668 |
| 51 | 2.026 8613 | 1.49 520 | 2.038 1679 | 1.49 888 | 2.049 5730 | 1.50 272 | 2.061 0818 | 1.50 675 |
| 52 | 2.027 0490 | 1.49 526 | 2.038 3572 | 1.49 895 | 2.049 7640 | 1.50 279 | 2.061 2745 | 1.50 682 |
| 53 | 2.027 2367 | 1.49 532 | 2.038 5465 | 1.49 901 | 2.049 9549 | 1.50 285 | 2.061 4672 | 1.50 689 |
| 54 | 2.027 4244 | 1.49 538 | 2.038 7358 | 1.49 907 | 2.050 1459 | 1.50 292 | 2.061 6600 | 1.50 696 |
| 55 | 2.027 6121 | 1.49 544 | 2.038 9252 | 1.49 914 | 2.050 3370 | 1.50 299 | 2.061 8528 | 1.50 702 |
| 56 | 2.027 7999 | 1.49 550 | 2.039 1145 | 1.49 920 | 2.050 5280 | 1.50 305 | 2.062 0457 | 1.50 709 |
| 57 | 2.027 9877 | 1.49 556 | 2.039 3039 | 1.49 926 | 2.050 7191 | 1.50 312 | 2.062 2385 | 1.50 716 |
| 58 | 2.028 1755 | 1.49 562 | 2.039 4934 | 1.49 933 | 2.050 9103 | 1.50 318 | 2.062 4314 | 1.50 723 |
| 59 | 2.028 3634 | 1.49 568 | 2.039 6828 | 1.49 939 | 2.051 1014 | 1.50 325 | 2.062 6244 | 1.50 730 |
| 60 | 2.028 5512 | 1.49 574 | 2.039 8723 | 1.49 945 | 2.051 2926 | 1.50 332 | 2.062 8173 | 1.50 737 |

# Tafel V.

| v | 92° log M | 92° log Diff. 1″ | 93° log M | 93° log Diff. 1″ | 94° log M | 94° log Diff. 1″ | 95° log M | 95° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.062 8173 | 1.50 737 | 2.074 4520 | 1.51 156 | 2.086 2019 | 1.51 593 | 2.098 0728 | 1.52 046 |
| 1 | 2.063 0103 | 1.50 744 | 2.074 6468 | 1.51 163 | 2.086 3987 | 1.51 600 | 2.098 2717 | 1.52 054 |
| 2 | 2.063 2034 | 1.50 750 | 2.074 8417 | 1.51 171 | 2.086 5956 | 1.51 608 | 2.098 4706 | 1.52 061 |
| 3 | 2.063 3964 | 1.50 757 | 2.075 0367 | 1.51 178 | 2.086 7925 | 1.51 615 | 2.098 6696 | 1.52 069 |
| 4 | 2.063 5895 | 1.50 764 | 2.075 2316 | 1.51 185 | 2.086 9895 | 1.51 622 | 2.098 8686 | 1.52 077 |
| 5 | 2.063 7826 | 1.50 771 | 2.075 4266 | 1.51 192 | 2.087 1864 | 1.51 630 | 2.099 0676 | 1.52 084 |
| 6 | 2.063 9758 | 1.50 778 | 2.075 6217 | 1.51 199 | 2.087 3834 | 1.51 637 | 2.099 2667 | 1.52 092 |
| 7 | 2.064 1690 | 1.50 784 | 2.075 8167 | 1.51 207 | 2.087 5805 | 1.51 645 | 2.099 4658 | 1.52 100 |
| 8 | 2.064 3622 | 1.50 791 | 2.076 0118 | 1.51 214 | 2.087 7776 | 1.51 652 | 2.099 6650 | 1.52 107 |
| 9 | 2.064 5554 | 1.50 798 | 2.076 2070 | 1.51 221 | 2.087 9747 | 1.51 660 | 2.099 8642 | 1.52 115 |
| 10 | 2.064 7487 | 1.50 805 | 2.076 4021 | 1.51 228 | 2.088 1718 | 1.51 667 | 2.100 0634 | 1.52 123 |
| 11 | 2.064 9420 | 1.50 812 | 2.076 5973 | 1.51 235 | 2.088 3690 | 1.51 674 | 2.100 2627 | 1.52 131 |
| 12 | 2.065 1353 | 1.50 819 | 2.076 7925 | 1.51 242 | 2.088 5662 | 1.51 682 | 2.100 4620 | 1.52 138 |
| 13 | 2.065 3287 | 1.50 826 | 2.076 9878 | 1.51 250 | 2.088 7635 | 1.51 689 | 2.100 6613 | 1.52 146 |
| 14 | 2.065 5221 | 1.50 833 | 2.077 1831 | 1.51 257 | 2.088 9607 | 1.51 697 | 2.100 8607 | 1.52 154 |
| 15 | 2.065 7155 | 1.50 839 | 2.077 3784 | 1.51 264 | 2.089 1580 | 1.51 704 | 2.101 0601 | 1.52 162 |
| 16 | 2.065 9090 | 1.50 846 | 2.077 5738 | 1.51 271 | 2.089 3554 | 1.51 712 | 2.101 2595 | 1.52 170 |
| 17 | 2.066 1024 | 1.50 853 | 2.077 7692 | 1.51 278 | 2.089 5528 | 1.51 719 | 2.101 4590 | 1.52 178 |
| 18 | 2.066 2959 | 1.50 860 | 2.077 9646 | 1.51 286 | 2.089 7502 | 1.51 727 | 2.101 6585 | 1.52 185 |
| 19 | 2.066 4895 | 1.50 867 | 2.078 1600 | 1.51 293 | 2.089 9476 | 1.51 734 | 2.101 8580 | 1.52 193 |
| 20 | 2.066 6831 | 1.50 874 | 2.078 3555 | 1.51 300 | 2.090 1451 | 1.51 742 | 2.102 0576 | 1.52 201 |
| 21 | 2.066 8767 | 1.50 881 | 2.078 5510 | 1.51 307 | 2.090 3426 | 1.51 749 | 2.102 2572 | 1.52 209 |
| 22 | 2.067 0703 | 1.50 888 | 2.078 7466 | 1.51 314 | 2.090 5402 | 1.51 757 | 2.102 4569 | 1.52 217 |
| 23 | 2.067 2640 | 1.50 895 | 2.078 9422 | 1.51 322 | 2.090 7378 | 1.51 764 | 2.102 6565 | 1.52 224 |
| 24 | 2.067 4577 | 1.50 902 | 2.079 1378 | 1.51 329 | 2.090 9354 | 1.51 772 | 2.102 8563 | 1.52 232 |
| 25 | 2.067 6514 | 1.50 909 | 2.079 3334 | 1.51 336 | 2.091 1331 | 1.51 779 | 2.103 0560 | 1.52 240 |
| 26 | 2.067 8452 | 1.50 916 | 2.079 5291 | 1.51 343 | 2.091 3308 | 1.51 787 | 2.103 2558 | 1.52 248 |
| 27 | 2.068 0390 | 1.50 923 | 2.079 7248 | 1.51 351 | 2.091 5285 | 1.51 794 | 2.103 4556 | 1.52 256 |
| 28 | 2.068 2328 | 1.50 930 | 2.079 9205 | 1.51 358 | 2.091 7262 | 1.51 802 | 2.103 6555 | 1.52 263 |
| 29 | 2.068 4267 | 1.50 937 | 2.080 1163 | 1.51 365 | 2.091 9240 | 1.51 809 | 2.103 8554 | 1.52 271 |
| 30 | 2.068 6206 | 1.50 944 | 2.080 3122 | 1.51 372 | 2.092 1219 | 1.51 817 | 2.104 0554 | 1.52 279 |
| 31 | 2.068 8145 | 1.50 951 | 2.080 5080 | 1.51 379 | 2.092 3197 | 1.51 824 | 2.104 2553 | 1.52 287 |
| 32 | 2.069 0084 | 1.50 958 | 2.080 7039 | 1.51 387 | 2.092 5176 | 1.51 832 | 2.104 4553 | 1.52 295 |
| 33 | 2.069 2024 | 1.50 965 | 2.080 8998 | 1.51 394 | 2.092 7155 | 1.51 839 | 2.104 6554 | 1.52 303 |
| 34 | 2.069 3964 | 1.50 972 | 2.081 0957 | 1.51 401 | 2.092 9135 | 1.51 847 | 2.104 8555 | 1.52 311 |
| 35 | 2.069 5905 | 1.50 979 | 2.081 2917 | 1.51 409 | 2.093 1115 | 1.51 855 | 2.105 0556 | 1.52 318 |
| 36 | 2.069 7846 | 1.50 986 | 2.081 4877 | 1.51 416 | 2.093 3095 | 1.51 862 | 2.105 2557 | 1.52 326 |
| 37 | 2.069 9787 | 1.50 993 | 2.081 6837 | 1.51 423 | 2.093 5076 | 1.51 870 | 2.105 4559 | 1.52 334 |
| 38 | 2.070 1728 | 1.51 000 | 2.081 8798 | 1.51 431 | 2.093 7057 | 1.51 877 | 2.105 6562 | 1.52 342 |
| 39 | 2.070 3670 | 1.51 007 | 2.082 0759 | 1.51 438 | 2.093 9038 | 1.51 885 | 2.105 8564 | 1.52 350 |
| 40 | 2.070 5612 | 1.51 014 | 2.082 2721 | 1.51 445 | 2.094 1020 | 1.51 893 | 2.106 0567 | 1.52 357 |
| 41 | 2.070 7554 | 1.51 021 | 2.082 4683 | 1.51 452 | 2.094 3002 | 1.51 900 | 2.106 2570 | 1.52 365 |
| 42 | 2.070 9497 | 1.51 028 | 2.082 6645 | 1.51 460 | 2.094 4985 | 1.51 908 | 2.106 4574 | 1.52 373 |
| 43 | 2.071 1440 | 1.51 035 | 2.082 8607 | 1.51 467 | 2.094 6967 | 1.51 916 | 2.106 6578 | 1.52 381 |
| 44 | 2.071 3383 | 1.51 042 | 2.083 0570 | 1.51 474 | 2.094 8950 | 1.51 923 | 2.106 8583 | 1.52 389 |
| 45 | 2.071 5327 | 1.51 049 | 2.083 2533 | 1.51 482 | 2.095 0934 | 1.51 931 | 2.107 0588 | 1.52 397 |
| 46 | 2.071 7271 | 1.51 057 | 2.083 4496 | 1.51 489 | 2.095 2918 | 1.51 938 | 2.107 2593 | 1.52 404 |
| 47 | 2.071 9215 | 1.51 064 | 2.083 6460 | 1.51 497 | 2.095 4902 | 1.51 946 | 2.107 4598 | 1.52 412 |
| 48 | 2.072 1160 | 1.51 071 | 2.083 8424 | 1.51 504 | 2.095 6886 | 1.51 954 | 2.107 6604 | 1.52 420 |
| 49 | 2.072 3105 | 1.51 078 | 2.084 0388 | 1.51 511 | 2.095 8871 | 1.51 961 | 2.107 8610 | 1.52 428 |
| 50 | 2.072 5050 | 1.51 085 | 2.084 2353 | 1.51 519 | 2.096 0856 | 1.51 969 | 2.108 0617 | 1.52 436 |
| 51 | 2.072 6995 | 1.51 092 | 2.084 4318 | 1.51 526 | 2.096 2842 | 1.51 977 | 2.108 2624 | 1.52 444 |
| 52 | 2.072 8941 | 1.51 099 | 2.084 6284 | 1.51 534 | 2.096 4828 | 1.51 984 | 2.108 4631 | 1.52 452 |
| 53 | 2.073 0887 | 1.51 106 | 2.084 8249 | 1.51 541 | 2.096 6814 | 1.51 992 | 2.108 6639 | 1.52 460 |
| 54 | 2.073 2834 | 1.51 113 | 2.085 0215 | 1.51 548 | 2.096 8801 | 1.52 000 | 2.108 8647 | 1.52 468 |
| 55 | 2.073 4781 | 1.51 121 | 2.085 2182 | 1.51 556 | 2.097 0788 | 1.52 007 | 2.109 0656 | 1.52 475 |
| 56 | 2.073 6728 | 1.51 128 | 2.085 4149 | 1.51 563 | 2.097 2775 | 1.52 015 | 2.109 2665 | 1.52 483 |
| 57 | 2.073 8675 | 1.51 135 | 2.085 6116 | 1.51 571 | 2.097 4763 | 1.52 023 | 2.109 4674 | 1.52 491 |
| 58 | 2.074 0623 | 1.51 142 | 2.085 8083 | 1.51 578 | 2.097 6751 | 1.52 030 | 2.109 6683 | 1.52 499 |
| 59 | 2.074 2571 | 1.51 149 | 2.086 0051 | 1.51 586 | 2.097 8739 | 1.52 038 | 2.109 8693 | 1.52 507 |
| 60 | 2.074 4520 | 1.51 156 | 2.086 2019 | 1.51 593 | 2.098 0728 | 1.52 046 | 2.110 0703 | 1.52 515 |

# Tafel V.

| v | 96° log M | 96° log Diff. 1″ | 97° log M | 97° log Diff. 1″ | 98° log M | 98° log Diff. 1″ | 99° log M | 99° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.110 0703 | 1.52 515 | 2.122 2005 | 1.53 000 | 2.134 4694 | 1.53 502 | 2.146 8832 | 1.54 020 |
| 1 | 2.110 2714 | 1.52 523 | 2.122 4039 | 1.53 008 | 2.134 6751 | 1.53 510 | 2.147 0913 | 1.54 029 |
| 2 | 2.110 4725 | 1.52 531 | 2.122 6072 | 1.53 017 | 2.134 8808 | 1.53 519 | 2.147 2995 | 1.54 038 |
| 3 | 2.110 6737 | 1.52 539 | 2.122 8106 | 1.53 025 | 2.135 0866 | 1.53 527 | 2.147 5078 | 1.54 046 |
| 4 | 2.110 8748 | 1.52 547 | 2.123 0141 | 1.53 033 | 2.135 2924 | 1.53 536 | 2.147 7160 | 1.54 055 |
| 5 | 2.111 0760 | 1.52 555 | 2.123 2176 | 1.53 042 | 2.135 4983 | 1.53 544 | 2.147 9244 | 1.54 064 |
| 6 | 2.111 2773 | 1.52 563 | 2.123 4211 | 1.53 050 | 2.135 7041 | 1.53 553 | 2.148 1327 | 1.54 073 |
| 7 | 2.111 4786 | 1.52 571 | 2.123 6246 | 1.53 058 | 2.135 9101 | 1.53 561 | 2.148 3412 | 1.54 081 |
| 8 | 2.111 6799 | 1.52 579 | 2.123 8282 | 1.53 067 | 2.136 1161 | 1.53 570 | 2.148 5496 | 1.54 090 |
| 9 | 2.111 8813 | 1.52 587 | 2.124 0319 | 1.53 075 | 2.136 3221 | 1.53 578 | 2.148 7581 | 1.54 099 |
| 10 | 2.112 0827 | 1.52 595 | 2.124 2356 | 1.53 083 | 2.136 5281 | 1.53 587 | 2.148 9667 | 1.54 108 |
| 11 | 2.112 2841 | 1.52 603 | 2.124 4393 | 1.53 091 | 2.136 7342 | 1.53 595 | 2.149 1752 | 1.54 117 |
| 12 | 2.112 4856 | 1.52 611 | 2.124 6430 | 1.53 100 | 2.136 9404 | 1.53 604 | 2.149 3839 | 1.54 126 |
| 13 | 2.112 6871 | 1.52 619 | 2.124 8468 | 1.53 108 | 2.137 1465 | 1.53 612 | 2.149 5925 | 1.54 135 |
| 14 | 2.112 8886 | 1.52 627 | 2.125 0506 | 1.53 116 | 2.137 3527 | 1.53 621 | 2.149 8012 | 1.54 144 |
| 15 | 2.113 0902 | 1.52 635 | 2.125 2545 | 1.53 125 | 2.137 5590 | 1.53 630 | 2.150 0100 | 1.54 152 |
| 16 | 2.113 2918 | 1.52 643 | 2.125 4584 | 1.53 133 | 2.137 7653 | 1.53 638 | 2.150 2188 | 1.54 161 |
| 17 | 2.113 4935 | 1.52 651 | 2.125 6624 | 1.53 141 | 2.137 9716 | 1.53 647 | 2.150 4276 | 1.54 170 |
| 18 | 2.113 6952 | 1.52 659 | 2.125 8664 | 1.53 150 | 2.138 1780 | 1.53 655 | 2.150 6365 | 1.54 179 |
| 19 | 2.113 8969 | 1.52 667 | 2.126 0704 | 1.53 158 | 2.138 3844 | 1.53 664 | 2.150 8454 | 1.54 188 |
| 20 | 2.114 0987 | 1.52 675 | 2.126 2744 | 1.53 166 | 2.138 5909 | 1.53 673 | 2.151 0544 | 1.54 197 |
| 21 | 2.114 3005 | 1.52 683 | 2.126 4785 | 1.53 174 | 2.138 7974 | 1.53 681 | 2.151 2634 | 1.54 206 |
| 22 | 2.114 5024 | 1.52 691 | 2.126 6827 | 1.53 183 | 2.139 0039 | 1.53 690 | 2.151 4724 | 1.54 215 |
| 23 | 2.114 7043 | 1.52 699 | 2.126 8869 | 1.53 191 | 2.139 2105 | 1.53 698 | 2.151 6815 | 1.54 224 |
| 24 | 2.114 9062 | 1.52 707 | 2.127 0911 | 1.53 199 | 2.139 4172 | 1.53 707 | 2.151 8907 | 1.54 233 |
| 25 | 2.115 1081 | 1.52 715 | 2.127 2954 | 1.53 208 | 2.139 6238 | 1.53 716 | 2.152 0998 | 1.54 241 |
| 26 | 2.115 3101 | 1.52 723 | 2.127 4997 | 1.53 216 | 2.139 8305 | 1.53 724 | 2.152 3091 | 1.54 250 |
| 27 | 2.115 5122 | 1.52 731 | 2.127 7040 | 1.53 224 | 2.140 0373 | 1.53 733 | 2.152 5183 | 1.54 259 |
| 28 | 2.115 7142 | 1.52 739 | 2.127 9084 | 1.53 233 | 2.140 2441 | 1.53 741 | 2.152 7276 | 1.54 268 |
| 29 | 2.115 9163 | 1.52 747 | 2.128 1128 | 1.53 241 | 2.140 4509 | 1.53 750 | 2.152 9370 | 1.54 277 |
| 30 | 2.116 1185 | 1.52 755 | 2.128 3172 | 1.53 250 | 2.140 6578 | 1.53 759 | 2.153 1464 | 1.54 286 |
| 31 | 2.116 3207 | 1.52 763 | 2.128 5217 | 1.53 258 | 2.140 8647 | 1.53 767 | 2.153 3558 | 1.54 295 |
| 32 | 2.116 5230 | 1.52 771 | 2.128 7263 | 1.53 266 | 2.141 0716 | 1.53 776 | 2.153 5653 | 1.54 303 |
| 33 | 2.116 7252 | 1.52 779 | 2.128 9309 | 1.53 275 | 2.141 2786 | 1.53 784 | 2.153 7748 | 1.54 312 |
| 34 | 2.116 9275 | 1.52 787 | 2.129 1355 | 1.53 283 | 2.141 4857 | 1.53 793 | 2.153 9844 | 1.54 321 |
| 35 | 2.117 1298 | 1.52 796 | 2.129 3401 | 1.53 291 | 2.141 6927 | 1.53 802 | 2.154 1940 | 1.54 330 |
| 36 | 2.117 3322 | 1.52 804 | 2.129 5448 | 1.53 300 | 2.141 8999 | 1.53 810 | 2.154 4036 | 1.54 339 |
| 37 | 2.117 5346 | 1.52 812 | 2.129 7495 | 1.53 308 | 2.142 1070 | 1.53 819 | 2.154 6133 | 1.54 347 |
| 38 | 2.117 7370 | 1.52 820 | 2.129 9543 | 1.53 316 | 2.142 3142 | 1.53 827 | 2.154 8231 | 1.54 356 |
| 39 | 2.117 9395 | 1.52 828 | 2.130 1591 | 1.53 325 | 2.142 5215 | 1.53 836 | 2.155 0328 | 1.54 365 |
| 40 | 2.118 1420 | 1.52 836 | 2.130 3640 | 1.53 333 | 2.142 7287 | 1.53 845 | 2.155 2427 | 1.54 374 |
| 41 | 2.118 3446 | 1.52 844 | 2.130 5689 | 1.53 341 | 2.142 9361 | 1.53 854 | 2.155 4525 | 1.54 383 |
| 42 | 2.118 5472 | 1.52 853 | 2.130 7738 | 1.53 350 | 2.143 1434 | 1.53 863 | 2.155 6624 | 1.54 392 |
| 43 | 2.118 7498 | 1.52 861 | 2.130 9788 | 1.53 358 | 2.143 3508 | 1.53 871 | 2.155 8724 | 1.54 401 |
| 44 | 2.118 9525 | 1.52 869 | 2.131 1838 | 1.53 367 | 2.143 5583 | 1.53 880 | 2.156 0824 | 1.54 410 |
| 45 | 2.119 1552 | 1.52 877 | 2.131 3888 | 1.53 375 | 2.143 7658 | 1.53 889 | 2.156 2924 | 1.54 419 |
| 46 | 2.119 3580 | 1.52 885 | 2.131 5939 | 1.53 384 | 2.143 9733 | 1.53 898 | 2.156 5024 | 1.54 428 |
| 47 | 2.119 5608 | 1.52 894 | 2.131 7991 | 1.53 392 | 2.144 1809 | 1.53 906 | 2.156 7126 | 1.54 437 |
| 48 | 2.119 7636 | 1.52 902 | 2.132 0042 | 1.53 401 | 2.144 3885 | 1.53 915 | 2.156 9228 | 1.54 446 |
| 49 | 2.119 9665 | 1.52 910 | 2.132 2094 | 1.53 409 | 2.144 5962 | 1.53 924 | 2.157 1330 | 1.54 455 |
| 50 | 2.120 1694 | 1.52 918 | 2.132 4147 | 1.53 418 | 2.144 8039 | 1.53 933 | 2.157 3433 | 1.54 464 |
| 51 | 2.120 3723 | 1.52 926 | 2.132 6200 | 1.53 426 | 2.145 0116 | 1.53 942 | 2.157 5536 | 1.54 473 |
| 52 | 2.120 5753 | 1.52 934 | 2.132 8253 | 1.53 435 | 2.145 2194 | 1.53 950 | 2.157 7639 | 1.54 482 |
| 53 | 2.120 7783 | 1.52 943 | 2.133 0307 | 1.53 443 | 2.145 4272 | 1.53 959 | 2.157 9743 | 1.54 491 |
| 54 | 2.120 9814 | 1.52 951 | 2.133 2361 | 1.53 451 | 2.145 6351 | 1.53 968 | 2.158 1847 | 1.54 500 |
| 55 | 2.121 1845 | 1.52 959 | 2.133 4415 | 1.53 460 | 2.145 8430 | 1.53 976 | 2.158 3952 | 1.54 509 |
| 56 | 2.121 3876 | 1.52 967 | 2.133 6470 | 1.53 468 | 2.146 0509 | 1.53 985 | 2.158 6057 | 1.54 518 |
| 57 | 2.121 5908 | 1.52 976 | 2.133 8526 | 1.53 477 | 2.146 2589 | 1.53 994 | 2.158 8163 | 1.54 527 |
| 58 | 2.121 7940 | 1.52 984 | 2.134 0581 | 1.53 485 | 2.146 4670 | 1.54 002 | 2.159 0269 | 1.54 536 |
| 59 | 2.121 9972 | 1.52 992 | 2.134 2637 | 1.53 494 | 2.146 6750 | 1.54 011 | 2.159 2375 | 1.54 545 |
| 60 | 2.122 2005 | 1.53 000 | 2.134 4694 | 1.53 502 | 2.146 8832 | 1.54 020 | 2.159 4482 | 1.54 554 |

## Tafel V.

| v | 100° log M | 100° log Diff. 1″ | 101° log M | 101° log Diff. 1″ | 102° log M | 102° log Diff. 1″ | 103° log M | 103° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.159 4482 | 1.54 554 | 2.172 1712 | 1.55 105 | 2.185 0589 | 1.55 671 | 2.198 1183 | 1.56 254 |
| 1 | 2.159 6590 | 1.54 563 | 2.172 3846 | 1.55 114 | 2.185 2751 | 1.55 681 | 2.198 3375 | 1.56 264 |
| 2 | 2.159 8697 | 1.54 572 | 2.172 5981 | 1.55 124 | 2.185 4914 | 1.55 690 | 2.198 5567 | 1.56 274 |
| 3 | 2.160 0806 | 1.54 581 | 2.172 8116 | 1.55 133 | 2.185 7077 | 1.55 700 | 2.198 7759 | 1.56 284 |
| 4 | 2.160 2914 | 1.54 590 | 2.173 0252 | 1.55 142 | 2.185 9241 | 1.55 709 | 2.198 9952 | 1.56 294 |
| 5 | 2.160 5024 | 1.54 599 | 2.173 2388 | 1.55 152 | 2.186 1405 | 1.55 719 | 2.199 2146 | 1.56 303 |
| 6 | 2.160 7133 | 1.54 608 | 2.173 4525 | 1.55 161 | 2.186 3570 | 1.55 728 | 2.199 4340 | 1.56 313 |
| 7 | 2.160 9243 | 1.54 617 | 2.173 6662 | 1.55 170 | 2.186 5735 | 1.55 738 | 2.199 6534 | 1.56 323 |
| 8 | 2.161 1353 | 1.54 626 | 2.173 8799 | 1.55 180 | 2.186 7901 | 1.55 747 | 2.199 8729 | 1.56 333 |
| 9 | 2.161 3464 | 1.54 635 | 2.174 0937 | 1.55 189 | 2.187 0067 | 1.55 757 | 2.200 0925 | 1.56 343 |
| 10 | 2.161 5576 | 1.54 644 | 2.174 3075 | 1.55 198 | 2.187 2233 | 1.55 767 | 2.200 3121 | 1.56 353 |
| 11 | 2.161 7688 | 1.54 653 | 2.174 5214 | 1.55 207 | 2.187 4400 | 1.55 777 | 2.200 5317 | 1.56 363 |
| 12 | 2.161 9800 | 1.54 663 | 2.174 7354 | 1.55 217 | 2.187 6568 | 1.55 786 | 2.200 7514 | 1.56 373 |
| 13 | 2.162 1913 | 1.54 672 | 2.174 9493 | 1.55 226 | 2.187 8736 | 1.55 796 | 2.200 9712 | 1.56 383 |
| 14 | 2.162 4026 | 1.54 681 | 2.175 1633 | 1.55 236 | 2.188 0905 | 1.55 806 | 2.201 1910 | 1.56 393 |
| 15 | 2.162 6139 | 1.54 690 | 2.175 3774 | 1.55 245 | 2.188 3074 | 1.55 815 | 2.201 4108 | 1.56 402 |
| 16 | 2.162 8253 | 1.54 699 | 2.175 5915 | 1.55 254 | 2.188 5243 | 1.55 825 | 2.201 6307 | 1.56 412 |
| 17 | 2.163 0367 | 1.54 709 | 2.175 8057 | 1.55 264 | 2.188 7413 | 1.55 835 | 2.201 8507 | 1.56 422 |
| 18 | 2.163 2482 | 1.54 718 | 2.176 0199 | 1.55 273 | 2.188 9584 | 1.55 844 | 2.202 0707 | 1.56 432 |
| 19 | 2.163 4598 | 1.54 727 | 2.176 2342 | 1.55 283 | 2.189 1755 | 1.55 854 | 2.202 2908 | 1.56 442 |
| 20 | 2.163 6713 | 1.54 736 | 2.176 4485 | 1.55 292 | 2.189 3926 | 1.55 864 | 2.202 5109 | 1.56 452 |
| 21 | 2.163 8830 | 1.54 745 | 2.176 6628 | 1.55 301 | 2.189 6098 | 1.55 874 | 2.202 7310 | 1.56 462 |
| 22 | 2.164 0946 | 1.54 755 | 2.176 8772 | 1.55 311 | 2.189 8270 | 1.55 883 | 2.202 9512 | 1.56 472 |
| 23 | 2.164 3063 | 1.54 764 | 2.177 0916 | 1.55 320 | 2.190 0443 | 1.55 893 | 2.203 1715 | 1.56 482 |
| 24 | 2.164 5181 | 1.54 773 | 2.177 3061 | 1.55 330 | 2.190 2616 | 1.55 903 | 2.203 3918 | 1.56 492 |
| 25 | 2.164 7299 | 1.54 782 | 2.177 5207 | 1.55 339 | 2.190 4790 | 1.55 913 | 2.203 6121 | 1.56 502 |
| 26 | 2.164 9417 | 1.54 791 | 2.177 7353 | 1.55 349 | 2.190 6965 | 1.55 922 | 2.203 8325 | 1.56 512 |
| 27 | 2.165 1536 | 1.54 800 | 2.177 9499 | 1.55 358 | 2.190 9140 | 1.55 932 | 2.204 0530 | 1.56 522 |
| 28 | 2.165 3656 | 1.54 809 | 2.178 1645 | 1.55 368 | 2.191 1315 | 1.55 942 | 2.204 2735 | 1.56 532 |
| 29 | 2.165 5775 | 1.54 819 | 2.178 3793 | 1.55 377 | 2.191 3491 | 1.55 952 | 2.204 4941 | 1.56 542 |
| 30 | 2.165 7896 | 1.54 828 | 2.178 5940 | 1.55 387 | 2.191 5667 | 1.55 962 | 2.204 7147 | 1.56 552 |
| 31 | 2.166 0016 | 1.54 837 | 2.178 8088 | 1.55 396 | 2.191 7844 | 1.55 971 | 2.204 9353 | 1.56 562 |
| 32 | 2.166 2137 | 1.54 846 | 2.179 0237 | 1.55 406 | 2.192 0021 | 1.55 981 | 2.205 1560 | 1.56 572 |
| 33 | 2.166 4259 | 1.54 855 | 2.179 2386 | 1.55 415 | 2.192 2199 | 1.55 991 | 2.205 3768 | 1.56 582 |
| 34 | 2.166 6381 | 1.54 864 | 2.179 4536 | 1.55 425 | 2.192 4377 | 1.56 001 | 2.205 5976 | 1.56 592 |
| 35 | 2.166 8503 | 1.54 874 | 2.179 6686 | 1.55 434 | 2.192 6556 | 1.56 010 | 2.205 8185 | 1.56 602 |
| 36 | 2.167 0626 | 1.54 883 | 2.179 8836 | 1.55 443 | 2.192 8735 | 1.56 020 | 2.206 0394 | 1.56 612 |
| 37 | 2.167 2750 | 1.54 892 | 2.180 0987 | 1.55 453 | 2.193 0915 | 1.56 030 | 2.206 2604 | 1.56 622 |
| 38 | 2.167 4874 | 1.54 901 | 2.180 3138 | 1.55 462 | 2.193 3095 | 1.56 040 | 2.206 4814 | 1.56 632 |
| 39 | 2.167 6998 | 1.54 910 | 2.180 5290 | 1.55 472 | 2.193 5275 | 1.56 049 | 2.206 7024 | 1.56 642 |
| 40 | 2.167 9123 | 1.54 919 | 2.180 7443 | 1.55 481 | 2.193 7457 | 1.56 059 | 2.206 9236 | 1.56 652 |
| 41 | 2.168 1248 | 1.54 928 | 2.180 9596 | 1.55 490 | 2.193 9638 | 1.56 069 | 2.207 1447 | 1.56 662 |
| 42 | 2.168 3373 | 1.54 938 | 2.181 1749 | 1.55 500 | 2.194 1820 | 1.56 078 | 2.207 3659 | 1.56 672 |
| 43 | 2.168 5499 | 1.54 947 | 2.181 3903 | 1.55 509 | 2.194 4003 | 1.56 088 | 2.207 5872 | 1.56 682 |
| 44 | 2.168 7626 | 1.54 956 | 2.181 6057 | 1.55 519 | 2.194 6186 | 1.56 098 | 2.207 8085 | 1.56 692 |
| 45 | 2.168 9753 | 1.54 966 | 2.181 8212 | 1.55 528 | 2.194 8370 | 1.56 108 | 2.208 0299 | 1.56 702 |
| 46 | 2.169 1880 | 1.54 975 | 2.182 0367 | 1.55 538 | 2.195 0554 | 1.56 117 | 2.208 2513 | 1.56 712 |
| 47 | 2.169 4008 | 1.54 984 | 2.182 2522 | 1.55 547 | 2.195 2738 | 1.56 127 | 2.208 4728 | 1.56 722 |
| 48 | 2.169 6137 | 1.54 993 | 2.182 4678 | 1.55 557 | 2.195 4923 | 1.56 137 | 2.208 6943 | 1.56 732 |
| 49 | 2.169 8265 | 1.55 003 | 2.182 6835 | 1.55 566 | 2.195 7109 | 1.56 146 | 2.208 9159 | 1.56 742 |
| 50 | 2.170 0395 | 1.55 012 | 2.182 8992 | 1.55 576 | 2.195 9295 | 1.56 156 | 2.209 1375 | 1.56 752 |
| 51 | 2.170 2524 | 1.55 021 | 2.183 1150 | 1.55 585 | 2.196 1482 | 1.56 166 | 2.209 3592 | 1.56 763 |
| 52 | 2.170 4654 | 1.55 031 | 2.183 3308 | 1.55 595 | 2.196 3669 | 1.56 176 | 2.209 5810 | 1.56 773 |
| 53 | 2.170 6785 | 1.55 040 | 2.183 5466 | 1.55 604 | 2.196 5856 | 1.56 185 | 2.209 8027 | 1.56 783 |
| 54 | 2.170 8916 | 1.55 049 | 2.183 7625 | 1.55 614 | 2.196 8044 | 1.56 195 | 2.210 0246 | 1.56 793 |
| 55 | 2.171 1048 | 1.55 059 | 2.183 9785 | 1.55 623 | 2.197 0233 | 1.56 205 | 2.210 2465 | 1.56 803 |
| 56 | 2.171 3180 | 1.55 068 | 2.184 1945 | 1.55 633 | 2.197 2422 | 1.56 215 | 2.210 4684 | 1.56 813 |
| 57 | 2.171 5312 | 1.55 077 | 2.184 4105 | 1.55 642 | 2.197 4612 | 1.56 225 | 2.210 6904 | 1.56 823 |
| 58 | 2.171 7445 | 1.55 086 | 2.184 6266 | 1.55 652 | 2.197 6802 | 1.56 234 | 2.210 9124 | 1.56 834 |
| 59 | 2.171 9578 | 1.55 096 | 2.184 8427 | 1.55 661 | 2.197 8992 | 1.56 244 | 2.211 1345 | 1.56 844 |
| 60 | 2.172 1712 | 1.55 105 | 2.185 0589 | 1.55 671 | 2.198 1183 | 1.56 254 | 2.211 3567 | 1.56 854 |

# Tafel V.

| $v$ | 104° log $M$ | 104° log Diff. 1″ | 105° log $M$ | 105° log Diff. 1″ | 106° log $M$ | 106° log Diff. 1″ | 107° log $M$ | 107° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.211 3567 | 1.56 854 | 2.224 7815 | 1.57 469 | 2.238 4005 | 1.58 101 | 2.252 2216 | 1.58 749 |
| 1 | 2.211 5789 | 1.56 864 | 2.225 0069 | 1.57 479 | 2.238 6291 | 1.58 112 | 2.252 4537 | 1.58 760 |
| 2 | 2.211 8011 | 1.56 874 | 2.225 2323 | 1.57 490 | 2.238 8579 | 1.58 122 | 2.252 6859 | 1.58 771 |
| 3 | 2.212 0234 | 1.56 884 | 2.225 4578 | 1.57 500 | 2.239 0867 | 1.58 133 | 2.252 9181 | 1.58 782 |
| 4 | 2.212 2458 | 1.56 894 | 2.225 6833 | 1.57 511 | 2.239 3155 | 1.58 143 | 2.253 1504 | 1.58 793 |
| 5 | 2.212 4682 | 1.56 905 | 2.225 9089 | 1.57 521 | 2.239 5444 | 1.58 154 | 2.253 3827 | 1.58 804 |
| 6 | 2.212 6907 | 1.56 915 | 2.226 1345 | 1.57 531 | 2.239 7733 | 1.58 165 | 2.253 6151 | 1.58 815 |
| 7 | 2.212 9132 | 1.56 925 | 2.226 3602 | 1.57 542 | 2.240 0023 | 1.58 175 | 2.253 8476 | 1.58 826 |
| 8 | 2.213 1357 | 1.56 935 | 2.226 5860 | 1.57 552 | 2.240 2314 | 1.58 186 | 2.254 0801 | 1.58 837 |
| 9 | 2.213 3583 | 1.56 945 | 2.226 8118 | 1.57 563 | 2.240 4605 | 1.58 196 | 2.254 3127 | 1.58 848 |
| 10 | 2.213 5810 | 1.56 955 | 2.227 0376 | 1.57 573 | 2.240 6897 | 1.58 207 | 2.254 5453 | 1.58 859 |
| 11 | 2.213 8037 | 1.56 965 | 2.227 2635 | 1.57 583 | 2.240 9190 | 1.58 218 | 2.254 7780 | 1.58 870 |
| 12 | 2.214 0265 | 1.56 976 | 2.227 4895 | 1.57 594 | 2.241 1483 | 1.58 228 | 2.255 0108 | 1.58 881 |
| 13 | 2.214 2493 | 1.56 986 | 2.227 7155 | 1.57 604 | 2.241 3776 | 1.58 239 | 2.255 2436 | 1.58 892 |
| 14 | 2.214 4722 | 1.56 996 | 2.227 9416 | 1.57 615 | 2.241 6070 | 1.58 250 | 2.255 4765 | 1.58 903 |
| 15 | 2.214 6951 | 1.57 006 | 2.228 1677 | 1.57 625 | 2.241 8365 | 1.58 261 | 2.255 7094 | 1.58 914 |
| 16 | 2.214 9181 | 1.57 016 | 2.228 3939 | 1.57 636 | 2.242 0660 | 1.58 272 | 2.255 9424 | 1.58 925 |
| 17 | 2.215 1411 | 1.57 027 | 2.228 6201 | 1.57 646 | 2.242 2956 | 1.58 282 | 2.256 1755 | 1.58 936 |
| 18 | 2.215 3642 | 1.57 037 | 2.228 8464 | 1.57 657 | 2.242 5252 | 1.58 293 | 2.256 4086 | 1.58 947 |
| 19 | 2.215 5873 | 1.57 047 | 2.229 0728 | 1.57 667 | 2.242 7549 | 1.58 304 | 2.256 6417 | 1.58 958 |
| 20 | 2.215 8105 | 1.57 057 | 2.229 2992 | 1.57 678 | 2.242 9846 | 1.58 315 | 2.256 8750 | 1.58 969 |
| 21 | 2.216 0338 | 1.57 067 | 2.229 5256 | 1.57 689 | 2.243 2144 | 1.58 326 | 2.257 1083 | 1.58 980 |
| 22 | 2.216 2571 | 1.57 078 | 2.229 7521 | 1.57 699 | 2.243 4443 | 1.58 337 | 2.257 3416 | 1.58 991 |
| 23 | 2.216 4804 | 1.57 088 | 2.229 9787 | 1.57 710 | 2.243 6742 | 1.58 347 | 2.257 5750 | 1.59 002 |
| 24 | 2.216 7038 | 1.57 098 | 2.230 2053 | 1.57 720 | 2.243 9042 | 1.58 358 | 2.257 8085 | 1.59 013 |
| 25 | 2.216 9273 | 1.57 109 | 2.230 4320 | 1.57 731 | 2.244 1342 | 1.58 369 | 2.258 0420 | 1.59 024 |
| 26 | 2.217 1508 | 1.57 119 | 2.230 6587 | 1.57 742 | 2.244 3643 | 1.58 380 | 2.258 2756 | 1.59 035 |
| 27 | 2.217 3743 | 1.57 129 | 2.230 8855 | 1.57 752 | 2.244 5945 | 1.58 391 | 2.258 5092 | 1.59 046 |
| 28 | 2.217 5979 | 1.57 139 | 2.231 1124 | 1.57 763 | 2.244 8247 | 1.58 401 | 2.258 7429 | 1.59 057 |
| 29 | 2.217 8216 | 1.57 150 | 2.231 3393 | 1.57 773 | 2.245 0549 | 1.58 412 | 2.258 9767 | 1.59 068 |
| 30 | 2.218 0453 | 1.57 160 | 2.231 5662 | 1.57 784 | 2.245 2852 | 1.58 423 | 2.259 2105 | 1.59 079 |
| 31 | 2.218 2691 | 1.57 170 | 2.231 7932 | 1.57 794 | 2.245 5156 | 1.58 434 | 2.259 4444 | 1.59 090 |
| 32 | 2.218 4929 | 1.57 180 | 2.232 0203 | 1.57 805 | 2.245 7460 | 1.58 445 | 2.259 6784 | 1.59 101 |
| 33 | 2.218 7168 | 1.57 191 | 2.232 2474 | 1.57 815 | 2.245 9765 | 1.58 455 | 2.259 9124 | 1.59 112 |
| 34 | 2.218 9407 | 1.57 201 | 2.232 4746 | 1.57 826 | 2.246 2071 | 1.58 466 | 2.260 1464 | 1.59 123 |
| 35 | 2.219 1647 | 1.57 211 | 2.232 7018 | 1.57 836 | 2.246 4377 | 1.58 477 | 2.260 3805 | 1.59 135 |
| 36 | 2.219 3887 | 1.57 221 | 2.232 9291 | 1.57 847 | 2.246 6684 | 1.58 488 | 2.260 6147 | 1.59 146 |
| 37 | 2.219 6128 | 1.57 231 | 2.233 1564 | 1.57 857 | 2.246 8991 | 1.58 499 | 2.260 8490 | 1.59 157 |
| 38 | 2.219 8369 | 1.57 242 | 2.233 3838 | 1.57 868 | 2.247 1298 | 1.58 509 | 2.261 0833 | 1.59 168 |
| 39 | 2.220 0611 | 1.57 252 | 2.233 6112 | 1.57 878 | 2.247 3607 | 1.58 520 | 2.261 3176 | 1.59 179 |
| 40 | 2.220 2854 | 1.57 262 | 2.233 8387 | 1.57 889 | 2.247 5916 | 1.58 531 | 2.261 5520 | 1.59 190 |
| 41 | 2.220 5097 | 1.57 272 | 2.234 0663 | 1.57 900 | 2.247 8225 | 1.58 542 | 2.261 7865 | 1.59 201 |
| 42 | 2.220 7340 | 1.57 283 | 2.234 2939 | 1.57 910 | 2.248 0535 | 1.58 553 | 2.262 0211 | 1.59 212 |
| 43 | 2.220 9584 | 1.57 293 | 2.234 5216 | 1.57 921 | 2.248 2846 | 1.58 564 | 2.262 2557 | 1.59 223 |
| 44 | 2.221 1829 | 1.57 303 | 2.234 7493 | 1.57 931 | 2.248 5157 | 1.58 575 | 2.262 4903 | 1.59 234 |
| 45 | 2.221 4074 | 1.57 313 | 2.234 9771 | 1.57 942 | 2.248 7469 | 1.58 585 | 2.262 7251 | 1.59 246 |
| 46 | 2.221 6320 | 1.57 324 | 2.235 2049 | 1.57 953 | 2.248 9781 | 1.58 596 | 2.262 9599 | 1.59 257 |
| 47 | 2.221 8566 | 1.57 334 | 2.235 4328 | 1.57 963 | 2.249 2094 | 1.58 607 | 2.263 1947 | 1.59 268 |
| 48 | 2.222 0812 | 1.57 344 | 2.235 6608 | 1.57 974 | 2.249 4408 | 1.58 618 | 2.263 4296 | 1.59 279 |
| 49 | 2.222 3060 | 1.57 355 | 2.235 8888 | 1.57 984 | 2.249 6722 | 1.58 629 | 2.263 6646 | 1.59 290 |
| 50 | 2.222 5307 | 1.57 365 | 2.236 1168 | 1.57 995 | 2.249 9037 | 1.58 640 | 2.263 8996 | 1.59 301 |
| 51 | 2.222 7556 | 1.57 375 | 2.236 3449 | 1.58 005 | 2.250 1352 | 1.58 651 | 2.264 1347 | 1.59 312 |
| 52 | 2.222 9805 | 1.57 386 | 2.236 5731 | 1.58 016 | 2.250 3668 | 1.58 662 | 2.264 3698 | 1.59 324 |
| 53 | 2.223 2054 | 1.57 396 | 2.236 8013 | 1.58 026 | 2.250 5984 | 1.58 673 | 2.264 6050 | 1.59 335 |
| 54 | 2.223 4304 | 1.57 406 | 2.237 0296 | 1.58 037 | 2.250 8301 | 1.58 684 | 2.264 8403 | 1.59 346 |
| 55 | 2.223 6554 | 1.57 417 | 2.237 2579 | 1.58 048 | 2.251 0619 | 1.58 694 | 2.265 0756 | 1.59 357 |
| 56 | 2.223 8805 | 1.57 427 | 2.237 4863 | 1.58 058 | 2.251 2937 | 1.58 705 | 2.265 3110 | 1.59 368 |
| 57 | 2.224 1057 | 1.57 438 | 2.237 7148 | 1.58 069 | 2.251 5256 | 1.58 716 | 2.265 5464 | 1.59 379 |
| 58 | 2.224 3309 | 1.57 448 | 2.237 9433 | 1.58 080 | 2.251 7575 | 1.58 727 | 2.265 7819 | 1.59 391 |
| 59 | 2.224 5562 | 1.57 459 | 2.238 1718 | 1.58 090 | 2.251 9895 | 1.58 738 | 2.266 0175 | 1.59 402 |
| 60 | 2.224 7815 | 1.57 469 | 2.238 4005 | 1.58 101 | 2.252 2216 | 1.58 749 | 2.266 2531 | 1.59 413 |

## Tafel V.

| v | 108° log M | 108° log Diff. 1″ | 109° log M | 109° log Diff. 1″ | 110° log M | 110° log Diff. 1″ | 111° log M | 111° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.266 2531 | 1.59 413 | 2.280 5037 | 1.60 094 | 2.294 9822 | 1.60 792 | 2.309 6978 | 1.61 505 |
| 1 | 2.266 4888 | 1.59 424 | 2.280 7431 | 1.60 105 | 2.295 2255 | 1.60 804 | 2.309 9451 | 1.61 517 |
| 2 | 2.266 7246 | 1.59 436 | 2.280 9826 | 1.60 117 | 2.295 4688 | 1.60 815 | 2.310 1925 | 1.61 529 |
| 3 | 2.266 9604 | 1.59 447 | 2.281 2221 | 1.60 128 | 2.295 7122 | 1.60 827 | 2.310 4399 | 1.61 541 |
| 4 | 2.267 1963 | 1.59 458 | 2.281 4617 | 1.60 140 | 2.295 9557 | 1.60 839 | 2.310 6875 | 1.61 553 |
| 5 | 2.267 4322 | 1.59 470 | 2.281 7014 | 1.60 151 | 2.296 1993 | 1.60 851 | 2.310 9351 | 1.61 566 |
| 6 | 2.267 6682 | 1.59 481 | 2.281 9411 | 1.60 163 | 2.296 4429 | 1.60 863 | 2.311 1827 | 1.61 578 |
| 7 | 2.267 9043 | 1.59 492 | 2.282 1809 | 1.60 174 | 2.296 6866 | 1.60 875 | 2.311 4305 | 1.61 590 |
| 8 | 2.268 1404 | 1.59 504 | 2.282 4208 | 1.60 186 | 2.296 9303 | 1.60 886 | 2.311 6783 | 1.61 602 |
| 9 | 2.268 3766 | 1.59 515 | 2.282 6607 | 1.60 197 | 2.297 1742 | 1.60 898 | 2.311 9261 | 1.61 614 |
| 10 | 2.268 6128 | 1.59 526 | 2.282 9007 | 1.60 209 | 2.297 4181 | 1.60 909 | 2.312 1741 | 1.61 626 |
| 11 | 2.268 8491 | 1.59 537 | 2.283 1408 | 1.60 221 | 2.297 6620 | 1.60 921 | 2.312 4221 | 1.61 638 |
| 12 | 2.269 0854 | 1.59 548 | 2.283 3809 | 1.60 232 | 2.297 9060 | 1.60 932 | 2.312 6702 | 1.61 650 |
| 13 | 2.269 3219 | 1.59 560 | 2.283 6211 | 1.60 243 | 2.298 1501 | 1.60 944 | 2.312 9183 | 1.61 662 |
| 14 | 2.269 5584 | 1.59 571 | 2.283 8613 | 1.60 255 | 2.298 3943 | 1.60 956 | 2.313 1665 | 1.61 674 |
| 15 | 2.269 7949 | 1.59 582 | 2.284 1016 | 1.60 266 | 2.298 6385 | 1.60 968 | 2.313 4148 | 1.61 687 |
| 16 | 2.270 0315 | 1.59 593 | 2.284 3420 | 1.60 278 | 2.298 8828 | 1.60 980 | 2.313 6632 | 1.61 699 |
| 17 | 2.270 2682 | 1.59 605 | 2.284 5824 | 1.60 290 | 2.299 1271 | 1.60 992 | 2.313 9116 | 1.61 711 |
| 18 | 2.270 5049 | 1.59 616 | 2.284 8229 | 1.60 301 | 2.299 3715 | 1.61 003 | 2.314 1601 | 1.61 723 |
| 19 | 2.270 7417 | 1.59 627 | 2.285 0635 | 1.60 313 | 2.299 6160 | 1.61 015 | 2.314 4087 | 1.61 735 |
| 20 | 2.270 9786 | 1.59 638 | 2.285 3041 | 1.60 325 | 2.299 8606 | 1.61 027 | 2.314 6573 | 1.61 747 |
| 21 | 2.271 2155 | 1.59 649 | 2.285 5448 | 1.60 337 | 2.300 1052 | 1.61 039 | 2.314 9060 | 1.61 759 |
| 22 | 2.271 4525 | 1.59 661 | 2.285 7855 | 1.60 348 | 2.300 3499 | 1.61 051 | 2.315 1548 | 1.61 771 |
| 23 | 2.271 6895 | 1.59 672 | 2.286 0264 | 1.60 360 | 2.300 5946 | 1.61 063 | 2.315 4036 | 1.61 783 |
| 24 | 2.271 9266 | 1.59 684 | 2.286 2672 | 1.60 371 | 2.300 8394 | 1.61 075 | 2.315 6525 | 1.61 795 |
| 25 | 2.272 1638 | 1.59 695 | 2.286 5082 | 1.60 383 | 2.301 0843 | 1.61 086 | 2.315 9015 | 1.61 808 |
| 26 | 2.272 4010 | 1.59 706 | 2.286 7492 | 1.60 395 | 2.301 3293 | 1.61 098 | 2.316 1506 | 1.61 820 |
| 27 | 2.272 6383 | 1.59 718 | 2.286 9903 | 1.60 406 | 2.301 5743 | 1.61 110 | 2.316 3997 | 1.61 832 |
| 28 | 2.272 8756 | 1.59 729 | 2.287 2314 | 1.60 418 | 2.301 8194 | 1.61 122 | 2.316 6489 | 1.61 844 |
| 29 | 2.273 1130 | 1.59 740 | 2.287 4726 | 1.60 429 | 2.302 0645 | 1.61 134 | 2.316 8981 | 1.61 856 |
| 30 | 2.273 3505 | 1.59 752 | 2.287 7139 | 1.60 441 | 2.302 3097 | 1.61 146 | 2.317 1475 | 1.61 868 |
| 31 | 2.273 5880 | 1.59 763 | 2.287 9552 | 1.60 453 | 2.302 5550 | 1.61 158 | 2.317 3969 | 1.61 880 |
| 32 | 2.273 8256 | 1.59 775 | 2.288 1966 | 1.60 464 | 2.302 8004 | 1.61 170 | 2.317 6463 | 1.61 892 |
| 33 | 2.274 0633 | 1.59 786 | 2.288 4381 | 1.60 476 | 2.303 0458 | 1.61 182 | 2.317 8959 | 1.61 905 |
| 34 | 2.274 3010 | 1.59 798 | 2.288 6796 | 1.60 487 | 2.303 2913 | 1.61 194 | 2.318 1455 | 1.61 917 |
| 35 | 2.274 5388 | 1.59 809 | 2.288 9212 | 1.60 499 | 2.303 5368 | 1.61 206 | 2.318 3952 | 1.61 929 |
| 36 | 2.274 7766 | 1.59 820 | 2.289 1629 | 1.60 511 | 2.303 7825 | 1.61 218 | 2.318 6449 | 1.61 941 |
| 37 | 2.275 0145 | 1.59 832 | 2.289 4046 | 1.60 522 | 2.304 0282 | 1.61 230 | 2.318 8947 | 1.61 953 |
| 38 | 2.275 2525 | 1.59 843 | 2.289 6464 | 1.60 534 | 2.304 2739 | 1.61 242 | 2.319 1446 | 1.61 966 |
| 39 | 2.275 4906 | 1.59 855 | 2.289 8882 | 1.60 545 | 2.304 5197 | 1.61 254 | 2.319 3946 | 1.61 978 |
| 40 | 2.275 7286 | 1.59 866 | 2.290 1301 | 1.60 557 | 2.304 7656 | 1.61 266 | 2.319 6446 | 1.61 990 |
| 41 | 2.275 9668 | 1.59 877 | 2.290 3721 | 1.60 569 | 2.305 0116 | 1.61 278 | 2.319 8947 | 1.62 002 |
| 42 | 2.276 2050 | 1.59 889 | 2.290 6142 | 1.60 580 | 2.305 2576 | 1.61 290 | 2.320 1449 | 1.62 014 |
| 43 | 2.276 4433 | 1.59 900 | 2.290 8563 | 1.60 592 | 2.305 5037 | 1.61 301 | 2.320 3951 | 1.62 027 |
| 44 | 2.276 6816 | 1.59 912 | 2.291 0985 | 1.60 604 | 2.305 7499 | 1.61 313 | 2.320 6454 | 1.62 039 |
| 45 | 2.276 9201 | 1.59 923 | 2.291 3407 | 1.60 615 | 2.305 9961 | 1.61 325 | 2.320 8958 | 1.62 051 |
| 46 | 2.277 1585 | 1.59 934 | 2.291 5830 | 1.60 627 | 2.306 2424 | 1.61 337 | 2.321 1463 | 1.62 063 |
| 47 | 2.277 3970 | 1.59 946 | 2.291 8254 | 1.60 638 | 2.306 4888 | 1.61 349 | 2.321 3968 | 1.62 075 |
| 48 | 2.277 6356 | 1.59 957 | 2.292 0678 | 1.60 650 | 2.306 7352 | 1.61 361 | 2.321 6474 | 1.62 088 |
| 49 | 2.277 8743 | 1.59 969 | 2.292 3103 | 1.60 662 | 2.306 9817 | 1.61 373 | 2.321 8981 | 1.62 100 |
| 50 | 2.278 1130 | 1.59 980 | 2.292 5529 | 1.60 674 | 2.307 2283 | 1.61 385 | 2.322 1488 | 1.62 112 |
| 51 | 2.278 3518 | 1.59 991 | 2.292 7955 | 1.60 686 | 2.307 4749 | 1.61 397 | 2.322 3996 | 1.62 124 |
| 52 | 2.278 5907 | 1.60 003 | 2.293 0382 | 1.60 697 | 2.307 7216 | 1.61 409 | 2.322 6505 | 1.62 137 |
| 53 | 2.278 8296 | 1.60 014 | 2.293 2810 | 1.60 709 | 2.307 9684 | 1.61 421 | 2.322 9014 | 1.62 149 |
| 54 | 2.279 0685 | 1.60 026 | 2.293 5238 | 1.60 721 | 2.308 2153 | 1.61 433 | 2.323 1524 | 1.62 161 |
| 55 | 2.279 3076 | 1.60 037 | 2.293 7667 | 1.60 733 | 2.308 4622 | 1.61 445 | 2.323 4035 | 1.62 174 |
| 56 | 2.279 5467 | 1.60 048 | 2.294 0097 | 1.60 745 | 2.308 7092 | 1.61 457 | 2.323 6547 | 1.62 186 |
| 57 | 2.279 7858 | 1.60 060 | 2.294 2527 | 1.60 757 | 2.308 9562 | 1.61 469 | 2.323 9059 | 1.62 198 |
| 58 | 2.280 0251 | 1.60 071 | 2.294 4958 | 1.60 768 | 2.309 2033 | 1.61 481 | 2.324 1572 | 1.62 211 |
| 59 | 2.280 2644 | 1.60 083 | 2.294 7389 | 1.60 780 | 2.309 4505 | 1.61 493 | 2.324 4086 | 1.62 223 |
| 60 | 2.280 5037 | 1.60 094 | 2.294 9822 | 1.60 792 | 2.309 6978 | 1.61 505 | 2.324 6601 | 1.62 235 |

## Tafel V.

| v | 112° log M | 112° log Diff. 1″ | 113° log M | 113° log Diff. 1″ | 114° log M | 114° log Diff. 1″ | 115° log M | 115° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.324 6601 | 1.62 235 | 2.339 8790 | 1.62 982 | 2.355 3650 | 1.63 746 | 2.371 1287 | 1.64 527 |
| 1 | 2.324 9116 | 1.62 247 | 2.340 1349 | 1.62 995 | 2.355 6254 | 1.63 759 | 2.371 3939 | 1.64 540 |
| 2 | 2.325 1632 | 1.62 260 | 2.340 3909 | 1.63 007 | 2.355 8859 | 1.63 772 | 2.371 6591 | 1.64 553 |
| 3 | 2.325 4148 | 1.62 272 | 2.340 6469 | 1.63 020 | 2.356 1465 | 1.63 785 | 2.371 9244 | 1.64 567 |
| 4 | 2.325 6666 | 1.62 284 | 2.340 9030 | 1.63 032 | 2.356 4071 | 1.63 798 | 2.372 1898 | 1.64 580 |
| 5 | 2.325 9184 | 1.62 297 | 2.341 1592 | 1.63 045 | 2.356 6679 | 1.63 810 | 2.372 4553 | 1.64 593 |
| 6 | 2.326 1702 | 1.62 309 | 2.341 4154 | 1.63 058 | 2.356 9287 | 1.63 823 | 2.372 7208 | 1.64 606 |
| 7 | 2.326 4222 | 1.62 321 | 2.341 6718 | 1.63 070 | 2.357 1896 | 1.63 836 | 2.372 9864 | 1.64 619 |
| 8 | 2.326 6742 | 1.62 334 | 2.341 9282 | 1.63 083 | 2.357 4505 | 1.63 849 | 2.373 2522 | 1.64 633 |
| 9 | 2.326 9263 | 1.62 346 | 2.342 1846 | 1.63 095 | 2.357 7116 | 1.63 862 | 2.373 5179 | 1.64 646 |
| 10 | 2.327 1785 | 1.62 358 | 2.342 4412 | 1.63 108 | 2.357 9727 | 1.63 875 | 2.373 7838 | 1.64 659 |
| 11 | 2.327 4307 | 1.62 371 | 2.342 6978 | 1.63 121 | 2.358 2339 | 1.63 888 | 2.374 0498 | 1.64 672 |
| 12 | 2.327 6830 | 1.62 383 | 2.342 9545 | 1.63 133 | 2.358 4952 | 1.63 901 | 2.374 3158 | 1.64 685 |
| 13 | 2.327 9354 | 1.62 396 | 2.343 2113 | 1.63 146 | 2.358 7565 | 1.63 914 | 2.374 5819 | 1.64 699 |
| 14 | 2.328 1878 | 1.62 408 | 2.343 4681 | 1.63 159 | 2.359 0179 | 1.63 927 | 2.374 8481 | 1.64 712 |
| 15 | 2.328 4403 | 1.62 421 | 2.343 7251 | 1.63 171 | 2.359 2795 | 1.63 939 | 2.375 1144 | 1.64 725 |
| 16 | 2.328 6929 | 1.62 433 | 2.343 9821 | 1.63 184 | 2.359 5410 | 1.63 952 | 2.375 3807 | 1.64 738 |
| 17 | 2.328 9456 | 1.62 445 | 2.344 2391 | 1.63 197 | 2.359 8027 | 1.63 965 | 2.375 6472 | 1.64 751 |
| 18 | 2.329 1983 | 1.62 458 | 2.344 4963 | 1.63 209 | 2.360 0644 | 1.63 978 | 2.375 9137 | 1.64 765 |
| 19 | 2.329 4511 | 1.62 470 | 2.344 7535 | 1.63 222 | 2.360 3263 | 1.63 991 | 2.376 1803 | 1.64 778 |
| 20 | 2.329 7040 | 1.62 483 | 2.345 0108 | 1.63 235 | 2.360 5882 | 1.64 004 | 2.376 4470 | 1.64 791 |
| 21 | 2.329 9570 | 1.62 495 | 2.345 2682 | 1.63 248 | 2.360 8501 | 1.64 017 | 2.376 7137 | 1.64 804 |
| 22 | 2.330 2100 | 1.62 508 | 2.345 5256 | 1.63 260 | 2.361 1122 | 1.64 030 | 2.376 9806 | 1.64 817 |
| 23 | 2.330 4631 | 1.62 520 | 2.345 7832 | 1.63 273 | 2.361 3743 | 1.64 043 | 2.377 2475 | 1.64 831 |
| 24 | 2.330 7163 | 1.62 532 | 2.346 0408 | 1.63 286 | 2.361 6365 | 1.64 056 | 2.377 5145 | 1.64 844 |
| 25 | 2.330 9695 | 1.62 545 | 2.346 2984 | 1.63 299 | 2.361 8988 | 1.64 069 | 2.377 7816 | 1.64 857 |
| 26 | 2.331 2228 | 1.62 557 | 2.346 5562 | 1.63 311 | 2.362. 1612 | 1.64 082 | 2.378 0488 | 1.64 870 |
| 27 | 2.331 4762 | 1.62 570 | 2.346 8140 | 1.63 324 | 2.362 4236 | 1.64 095 | 2.378 3160 | 1.64 884 |
| 28 | 2.331 7297 | 1.62 582 | 2.347 0719 | 1.63 337 | 2.362 6862 | 1.64 108 | 2.378 5834 | 1.64 897 |
| 29 | 2.331 9832 | 1.62 595 | 2.347 3299 | 1.63 349 | 2.362 9488 | 1.64 121 | 2.378 8508 | 1.64 910 |
| 30 | 2.332 2368 | 1.62 607 | 2.347 5880 | 1.63 362 | 2.363 2114 | 1.64 134 | 2.379 1183 | 1.64 923 |
| 31 | 2.332 4905 | 1.62 619 | 2.347 8461 | 1.63 375 | 2.363 4742 | 1.64 147 | 2.379 3858 | 1.64 936 |
| 32 | 2.332 7442 | 1.62 632 | 2.348 1043 | 1.63 388 | 2.363 7370 | 1.64 160 | 2.379 6535 | 1.64 950 |
| 33 | 2.332 9981 | 1.62 644 | 2.348 3626 | 1.63 400 | 2.364 0000 | 1.64 173 | 2.379 9213 | 1.64 963 |
| 34 | 2.333 2520 | 1.62 657 | 2.348 6209 | 1.63 413 | 2.364 2630 | 1.64 186 | 2.380 1891 | 1.64 976 |
| 35 | 2.333 5059 | 1.62 669 | 2.348 8794 | 1.63 426 | 2.364 5260 | 1.64 200 | 2.380 4570 | 1.64 990 |
| 36 | 2.333 7600 | 1.62 682 | 2.349 1379 | 1.63 439 | 2.364 7892 | 1.64 213 | 2.380 7250 | 1.65 003 |
| 37 | 2.334 0141 | 1.62 694 | 2.349 3965 | 1.63 452 | 2.365 0524 | 1.64 226 | 2.380 9930 | 1.65 016 |
| 38 | 2.334 2683 | 1.62 707 | 2.349 6551 | 1.63 464 | 2.365 3157 | 1.64 239 | 2.381 2612 | 1.65 030 |
| 39 | 2.334 5226 | 1.62 719 | 2.349 9139 | 1.63 477 | 2.365 5791 | 1.64 252 | 2.381 5294 | 1.65 043 |
| 40 | 2.334 7769 | 1.62 732 | 2.350 1727 | 1.63 490 | 2.365 8426 | 1.64 265 | 2.381 7978 | 1.65 056 |
| 41 | 2.335 0313 | 1.62 744 | 2.350 4316 | 1.63 503 | 2.366 1062 | 1.64 278 | 2.382 0662 | 1.65 069 |
| 42 | 2.335 2858 | 1.62 757 | 2.350 6905 | 1.63 516 | 2.366 3698 | 1.64 291 | 2.382 3346 | 1.65 083 |
| 43 | 2.335 5403 | 1.62 769 | 2.350 9496 | 1.63 528 | 2.366 6335 | 1.64 304 | 2.382 6032 | 1.65 096 |
| 44 | 2.335 7950 | 1.62 782 | 2.351 2087 | 1.63 541 | 2.366 8973 | 1.64 317 | 2.382 8718 | 1.65 110 |
| 45 | 2.336 0497 | 1.62 794 | 2.351 4679 | 1.63 554 | 2.367 1612 | 1.64 331 | 2.383 1406 | 1.65 123 |
| 46 | 2.336 3044 | 1.62 807 | 2.351 7272 | 1.63 567 | 2.367 4251 | 1.64 344 | 2.383 4094 | 1.65 136 |
| 47 | 2.336 5593 | 1.62 819 | 2.351 9865 | 1.63 580 | 2.367 6891 | 1.64 357 | 2.383 6783 | 1.65 150 |
| 48 | 2.336 8142 | 1.62 832 | 2.352 2459 | 1.63 592 | 2.367 9532 | 1.64 370 | 2.383 9473 | 1.65 163 |
| 49 | 2.337 0692 | 1.62 844 | 2.352 5054 | 1.63 605 | 2.368 2174 | 1.64 383 | 2.384 2163 | 1.65 177 |
| 50 | 2.337 3243 | 1.62 857 | 2.352 7650 | 1.63 618 | 2.368 4817 | 1.64 396 | 2.384 4855 | 1.65 190 |
| 51 | 2.337 5794 | 1.62 869 | 2.353 0247 | 1.63 631 | 2.368 7460 | 1.64 409 | 2.384 7547 | 1.65 203 |
| 52 | 2.337 8346 | 1.62 882 | 2.353 2844 | 1.63 644 | 2.369 0105 | 1.64 422 | 2.385 0240 | 1.65 217 |
| 53 | 2.338 0899 | 1.62 894 | 2.353 5442 | 1.63 656 | 2.369 2750 | 1.64 435 | 2.385 2934 | 1.65 230 |
| 54 | 2.338 3453 | 1.62 907 | 2.353 8041 | 1.63 669 | 2.369 5395 | 1.64 448 | 2.385 5629 | 1.65 244 |
| 55 | 2.338 6007 | 1.62 919 | 2.354 0640 | 1.63 682 | 2.369 8042 | 1.64 462 | 2.385 8324 | 1.65 257 |
| 56 | 2.338 8562 | 1.62 932 | 2.354 3241 | 1.63 695 | 2.370 0690 | 1.64 475 | 2.386 1021 | 1.65 270 |
| 57 | 2.339 1118 | 1.62 944 | 2.354 5842 | 1.63 708 | 2.370 3338 | 1.64 488 | 2.386 3718 | 1.65 284 |
| 58 | 2.339 3675 | 1.62 957 | 2.354 8444 | 1.63 721 | 2.370 5987 | 1.64 501 | 2.386 6416 | 1.65 297 |
| 59 | 2.339 6232 | 1.62 969 | 2.355 1046 | 1.63 733 | 2.370 8637 | 1.64 514 | 2.386 9115 | 1.65 311 |
| 60 | 2.339 8790 | 1.62 982 | 2.355 3650 | 1.63 746 | 2.371 1287 | 1.64 527 | 2.387 1815 | 1.65 324 |

## Tafel V.

| *v* | 116° | | 117° | | 118° | | 119° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ | log *M* | log Diff. 1″ |
| 0′ | 2.387 1815 | 1.65 324 | 2.403 5349 | 1.66 139 | 2.420 2013 | 1.66 970 | 2.437 1933 | 1.67 819 |
| 1 | 2.387 4515 | 1.65 337 | 2.403 8101 | 1.66 152 | 2.420 4818 | 1.66 984 | 2.437 4793 | 1.67 833 |
| 2 | 2.387 7217 | 1.65 351 | 2.404 0854 | 1.66 166 | 2.420 7624 | 1.66 998 | 2.437 7654 | 1.67 848 |
| 3 | 2.387 9919 | 1.65 364 | 2.404 3608 | 1.66 180 | 2.421 0431 | 1.67 012 | 2.438 0517 | 1.67 862 |
| 4 | 2.388 2622 | 1.65 378 | 2.404 6362 | 1.66 193 | 2.421 3238 | 1.67 026 | 2.438 3380 | 1.67 876 |
| 5 | 2.388 5326 | 1.65 391 | 2.404 9117 | 1.66 207 | 2.421 6047 | 1.67 041 | 2.438 6244 | 1.67 891 |
| 6 | 2.388 8031 | 1.65 405 | 2.405 1873 | 1.66 221 | 2.421 8856 | 1.67 055 | 2.438 9109 | 1.67 905 |
| 7 | 2.389 0737 | 1.65 418 | 2.405 4630 | 1.66 235 | 2.422 1667 | 1.67 069 | 2.439 1975 | 1.67 919 |
| 8 | 2.389 3443 | 1.65 432 | 2.405 7388 | 1.66 248 | 2.422 4478 | 1.67 083 | 2.439 4842 | 1.67 934 |
| 9 | 2.389 6151 | 1.65 445 | 2.406 0146 | 1.66 262 | 2.422 7290 | 1.67 097 | 2.439 7710 | 1.67 948 |
| 10 | 2.389 8859 | 1.65 459 | 2.406 2906 | 1.66 276 | 2.423 0103 | 1.67 111 | 2.440 0579 | 1.67 962 |
| 11 | 2.390 1568 | 1.65 472 | 2.406 5667 | 1.66 290 | 2.423 2917 | 1.67 125 | 2.440 3448 | 1.67 976 |
| 12 | 2.390 4277 | 1.65 486 | 2.406 8428 | 1.66 303 | 2.423 5732 | 1.67 139 | 2.440 6319 | 1.67 991 |
| 13 | 2.390 6988 | 1.65 499 | 2.407 1190 | 1.66 317 | 2.423 8548 | 1.67 153 | 2.440 9191 | 1.68 005 |
| 14 | 2.390 9700 | 1.65 513 | 2.407 3953 | 1.66 331 | 2.424 1365 | 1.67 167 | 2.441 2063 | 1.68 019 |
| 15 | 2.391 2412 | 1.65 526 | 2.407 6717 | 1.66 345 | 2.424 4183 | 1.67 181 | 2.441 4937 | 1.68 034 |
| 16 | 2.391 5125 | 1.65 540 | 2.407 9482 | 1.66 358 | 2.424 7001 | 1.67 195 | 2.441 7811 | 1.68 048 |
| 17 | 2.391 7839 | 1.65 553 | 2.408 2248 | 1.66 372 | 2.424 9821 | 1.67 209 | 2.442 0687 | 1.68 063 |
| 18 | 2.392 0554 | 1.65 567 | 2.408 5014 | 1.66 386 | 2.425 2641 | 1.67 223 | 2.442 3563 | 1.68 077 |
| 19 | 2.392 3270 | 1.65 580 | 2.408 7782 | 1.66 400 | 2.425 5462 | 1.67 237 | 2.442 6441 | 1.68 092 |
| 20 | 2.392 5986 | 1.65 594 | 2.409 0550 | 1.66 414 | 2.425 8285 | 1.67 251 | 2.442 9319 | 1.68 106 |
| 21 | 2.392 8704 | 1.65 607 | 2.409 3319 | 1.66 428 | 2.426 1108 | 1.67 265 | 2.443 2198 | 1.68 120 |
| 22 | 2.393 1422 | 1.65 621 | 2.409 6090 | 1.66 441 | 2.426 3932 | 1.67 280 | 2.443 5079 | 1.68 135 |
| 23 | 2.393 4141 | 1.65 634 | 2.409 8861 | 1.66 455 | 2.426 6757 | 1.67 294 | 2.443 7960 | 1.68 149 |
| 24 | 2.393 6861 | 1.65 648 | 2.410 1632 | 1.66 469 | 2.426 9583 | 1.67 308 | 2.444 0842 | 1.68 164 |
| 25 | 2.393 9582 | 1.65 661 | 2.410 4405 | 1.66 483 | 2.427 2410 | 1.67 322 | 2.444 3725 | 1.68 178 |
| 26 | 2.394 2304 | 1.65 675 | 2.410 7179 | 1.66 497 | 2.427 5237 | 1.67 336 | 2.444 6609 | 1.68 193 |
| 27 | 2.394 5026 | 1.65 688 | 2.410 9953 | 1.66 510 | 2.427 8066 | 1.67 350 | 2.444 9494 | 1.68 207 |
| 28 | 2.394 7750 | 1.65 702 | 2.411 2729 | 1.66 524 | 2.428 0896 | 1.67 365 | 2.445 2380 | 1.68 222 |
| 29 | 2.395 0474 | 1.65 715 | 2.411 5505 | 1.66 538 | 2.428 3726 | 1.67 379 | 2.445 5267 | 1.68 236 |
| 30 | 2.395 3199 | 1.65 729 | 2.411 8282 | 1.66 552 | 2.428 6558 | 1.67 393 | 2.445 8155 | 1.68 251 |
| 31 | 2.395 5925 | 1.65 742 | 2.412 1060 | 1.66 566 | 2.428 9390 | 1.67 407 | 2.446 1044 | 1.68 265 |
| 32 | 2.395 8651 | 1.65 756 | 2.412 3839 | 1.66 580 | 2.429 2223 | 1.67 422 | 2.446 3934 | 1.68 280 |
| 33 | 2.396 1379 | 1.65 769 | 2.412 6619 | 1.66 594 | 2.429 5058 | 1.67 436 | 2.446 6825 | 1.68 294 |
| 34 | 2.396 4108 | 1.65 783 | 2.412 9400 | 1.66 608 | 2.429 7893 | 1.67 450 | 2.446 9716 | 1.68 309 |
| 35 | 2.396 6837 | 1.65 797 | 2.413 2182 | 1.66 621 | 2.430 0729 | 1.67 464 | 2.447 2609 | 1.68 323 |
| 36 | 2.396 9567 | 1.65 810 | 2.413 4964 | 1.66 635 | 2.430 3566 | 1.67 478 | 2.447 5503 | 1.68 337 |
| 37 | 2.397 2298 | 1.65 824 | 2.413 7747 | 1.66 649 | 2.430 6404 | 1.67 493 | 2.447 8397 | 1.68 352 |
| 38 | 2.397 5030 | 1.65 837 | 2.414 0532 | 1.66 663 | 2.430 9242 | 1.67 507 | 2.448 1293 | 1.68 366 |
| 39 | 2.397 7763 | 1.65 851 | 2.414 3317 | 1.66 677 | 2.431 2082 | 1.67 521 | 2.448 4190 | 1.68 380 |
| 40 | 2.398 0496 | 1.65 865 | 2.414 6103 | 1.66 691 | 2.431 4923 | 1.67 535 | 2.448 7087 | 1.68 395 |
| 41 | 2.398 3231 | 1.65 878 | 2.414 8890 | 1.66 705 | 2.431 7765 | 1.67 549 | 2.448 9986 | 1.68 409 |
| 42 | 2.398 5966 | 1.65 892 | 2.415 1678 | 1.66 719 | 2.432 0607 | 1.67 563 | 2.449 2885 | 1.68 424 |
| 43 | 2.398 8702 | 1.65 905 | 2.415 4467 | 1.66 733 | 2.432 3451 | 1.67 577 | 2.449 5786 | 1.68 438 |
| 44 | 2.399 1439 | 1.65 919 | 2.415 7256 | 1.66 747 | 2.432 6295 | 1.67 591 | 2.449 8687 | 1.68 453 |
| 45 | 2.399 4177 | 1.65 933 | 2.416 0047 | 1.66 760 | 2.432 9140 | 1.67 606 | 2.450 1589 | 1.68 467 |
| 46 | 2.399 6916 | 1.65 946 | 2.416 2838 | 1.66 774 | 2.433 1987 | 1.67 620 | 2.450 4493 | 1.68 482 |
| 47 | 2.399 9656 | 1.65 960 | 2.416 5631 | 1.66 788 | 2.433 4834 | 1.67 634 | 2.450 7397 | 1.68 496 |
| 48 | 2.400 2396 | 1.65 973 | 2.416 8424 | 1.66 802 | 2.433 7682 | 1.67 648 | 2.451 0302 | 1.68 511 |
| 49 | 2.400 5138 | 1.65 987 | 2.417 1218 | 1.66 816 | 2.434 0531 | 1.67 662 | 2.451 3209 | 1.68 525 |
| 50 | 2.400 7880 | 1.66 001 | 2.417 4013 | 1.66 830 | 2.434 3381 | 1.67 676 | 2.451 6116 | 1.68 540 |
| 51 | 2.401 0623 | 1.66 014 | 2.417 6809 | 1.66 844 | 2.434 6232 | 1.67 690 | 2.451 9024 | 1.68 554 |
| 52 | 2.401 3367 | 1.66 028 | 2.417 9606 | 1.66 858 | 2.434 9084 | 1.67 705 | 2.452 1933 | 1.68 569 |
| 53 | 2.401 6112 | 1.66 042 | 2.418 2404 | 1.66 872 | 2.435 1937 | 1.67 719 | 2.452 4843 | 1.68 583 |
| 54 | 2.401 8857 | 1.66 056 | 2.418 5202 | 1.66 886 | 2.435 4790 | 1.67 733 | 2.452 7754 | 1.68 598 |
| 55 | 2.402 1604 | 1.66 070 | 2.418 8002 | 1.66 900 | 2.435 7645 | 1.67 748 | 2.453 0667 | 1.68 613 |
| 56 | 2.402 4351 | 1.66 083 | 2.419 0802 | 1.66 914 | 2.436 0501 | 1.67 762 | 2.453 3580 | 1.68 627 |
| 57 | 2.402 7099 | 1.66 097 | 2.419 3604 | 1.66 928 | 2.436 3357 | 1.67 776 | 2.453 6494 | 1.68 642 |
| 58 | 2.402 9849 | 1.66 111 | 2.419 6406 | 1.66 942 | 2.436 6215 | 1.67 791 | 2.453 9409 | 1.68 656 |
| 59 | 2.403 2599 | 1.66 125 | 2.419 9209 | 1.66 956 | 2.436 9073 | 1.67 805 | 2.454 2325 | 1.68 6-1 |
| 60 | 2.403 5349 | 1.66 139 | 2.420 2013 | 1.66 970 | 2.437 1933 | 1.67 819 | 2.454 5242 | 1.68 686 |

## Tafel V.

| v | 120° log M | 120° log Diff. 1″ | 121° log M | 121° log Diff. 1″ | 122° log M | 122° log Diff. 1″ | 123° log M | 123° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.454 5242 | 1.68 686 | 2.472 2079 | 1.69 570 | 2.490 2591 | 1.70 472 | 2.508 6928 | 1.71 392 |
| 1 | 2.454 8160 | 1.68 700 | 2.472 5057 | 1.69 585 | 2.490 5631 | 1.70 487 | 2.509 0034 | 1.71 407 |
| 2 | 2.455 1079 | 1.68 715 | 2.472 8036 | 1.69 600 | 2.490 8673 | 1.70 503 | 2.509 3141 | 1.71 423 |
| 3 | 2.455 3999 | 1.68 730 | 2.473 1016 | 1.69 615 | 2.491 1715 | 1.70 518 | 2.509 6249 | 1.71 438 |
| 4 | 2.455 6920 | 1.68 744 | 2.473 3997 | 1.69 630 | 2.491 4759 | 1.70 533 | 2.509 9357 | 1.71 454 |
| 5 | 2.455 9842 | 1.68 759 | 2.473 6980 | 1.69 644 | 2.491 7804 | 1.70 548 | 2.510 2467 | 1.71 469 |
| 6 | 2.456 2765 | 1.68 774 | 2.473 9963 | 1.69 659 | 2.492 0850 | 1 70 563 | 2.510 5579 | 1.71 485 |
| 7 | 2.456 5688 | 1.68 788 | 2.474 2947 | 1.69 674 | 2.492 3897 | 1.70 579 | 2.510 8691 | 1.71 500 |
| 8 | 2.456 8613 | 1.68 803 | 2.474 5932 | 1.69 689 | 2 492 6945 | 1.70 594 | 2.511 1804 | 1.71 516 |
| 9 | 2.457 1539 | 1.68 817 | 2.474 8918 | 1.69 704 | 2.492 9994 | 1.70 609 | 2.511 4919 | 1.71 531 |
| 10 | 2.457 4466 | 1.68 832 | 2.475 1905 | 1.69 719 | 2.493 3044 | 1.70 624 | 2.511 8034 | 1.71 547 |
| 11 | 2.457 7394 | 1.68 847 | 2.475 4894 | 1.69 734 | 2.493 6095 | 1.70 639 | 2.512 1151 | 1.71 562 |
| 12 | 2.458 0323 | 1.68 861 | 2.475 7883 | 1.69 749 | 2 493 9147 | 1.70 655 | 2.512 4269 | 1.71 578 |
| 13 | 2.458 3252 | 1.68 876 | 2.476 0873 | 1.69 764 | 2.494 2200 | 1.70 670 | 2.512 7388 | 1.71 593 |
| 14 | 2.458 6183 | 1.68 890 | 2.476 3864 | 1.69 779 | 2.494 5255 | 1.70 685 | 2.513 0508 | 1.71 609 |
| 15 | 2.458 9115 | 1.68 905 | 2.476 6857 | 1.69 794 | 2.494 8310 | 1.70 700 | 2.513 3629 | 1.71 625 |
| 16 | 2.459 2048 | 1.68 920 | 2.476 9850 | 1.69 809 | 2.495 1367 | 1.70 715 | 2.513 6751 | 1.71 640 |
| 17 | 2.459 4981 | 1.68 934 | 2.477 2845 | 1.69 824 | 2.495 4424 | 1.70 731 | 2.513 9875 | 1.71 656 |
| 18 | 2.459 7916 | 1.68 949 | 2.477 5840 | 1.69 839 | 2.495 7483 | 1.70 746 | 2.514 2999 | 1.71 671 |
| 19 | 2.460 0852 | 1.68 963 | 2.477 8837 | 1.69 854 | 2.496 0543 | 1.70 761 | 2.514 6125 | 1.71 687 |
| 20 | 2.460 3789 | 1.68 978 | 2.478 1834 | 1.69 869 | 2.496 3604 | 1.70 776 | 2.514 9252 | 1.71 703 |
| 21 | 2.460 6726 | 1.68 993 | 2.478 4833 | 1.69 884 | 2.496 6666 | 1.70 791 | 2.515 2380 | 1.71 718 |
| 22 | 2.460 9665 | 1.69 008 | 2.478 7832 | 1.69 899 | 2.496 9729 | 1.70 807 | 2.515 5509 | 1.71 734 |
| 23 | 2.461 2605 | 1.69 022 | 2.479 0833 | 1.69 914 | 2.497 2793 | 1.70 822 | 2.515 8639 | 1.71 749 |
| 24 | 2.461 5545 | 1.69 037 | 2.479 3835 | 1.69 929 | 2.497 5858 | 1.70 837 | 2.516 1770 | 1.71 765 |
| 25 | 2.461 8487 | 1.69 052 | 2.479 6837 | 1.69 944 | 2.497 8924 | 1.70 853 | 2.516 4903 | 1.71 780 |
| 26 | 2.462 1430 | 1.69 067 | 2.479 9841 | 1.69 959 | 2.498 1991 | 1.70 868 | 2.516 8036 | 1.71 796 |
| 27 | 2.462 4373 | 1.69 081 | 2.480 2846 | 1 69 974 | 2.498 5060 | 1.70 884 | 2.517 1171 | 1.71 811 |
| 28 | 2 462 7318 | 1.69 096 | 2.480 5852 | 1.69 989 | 2 498 8129 | 1.70 899 | 2 517 4307 | 1.71 827 |
| 29 | 2.463 0264 | 1.69 111 | 2.480 8859 | 1.70 004 | 2.499 1200 | 1.70 914 | 2.517 7444 | 1.71 842 |
| 30 | 2.463 3211 | 1.69 126 | 2.481 1866 | 1.70 019 | 2.499 4271 | 1.70 930 | 2.518 0582 | 1.71 858 |
| 31 | 2.463 6158 | 1.69 140 | 2.481 4875 | 1.70 034 | 2.499 7344 | 1.70 945 | 2.518 3721 | 1.71 874 |
| 32 | 2.463 9107 | 1.69 155 | 2.481 7885 | 1.70 049 | 2.500 0418 | 1.70 961 | 2.518 6861 | 1.71 889 |
| 33 | 2.464 2057 | 1.69 170 | 2.482 0896 | 1.70 064 | 2.500 3493 | 1.70 976 | 2.519 0003 | 1.71 905 |
| 34 | 2.464 5007 | 1.69 184 | 2.482 3908 | 1.70 079 | 2.500 6569 | 1.70 991 | 2.519 3145 | 1.71 921 |
| 35 | 2.464 7959 | 1.69 199 | 2.482 6922 | 1.70 094 | 2.500 9646 | 1.71 007 | 2.519 6289 | 1.71 936 |
| 36 | 2.465 0912 | 1 69 214 | 2.482 9936 | 1.70 109 | 2.501 2724 | 1.71 022 | 2.519 9434 | 1.71 952 |
| 37 | 2.465 3865 | 1.69 229 | 2.483 2951 | 1.70 124 | 2.501 5803 | 1.71 037 | 2.520 2580 | 1.71 968 |
| 38 | 2.465 6820 | 1.69 243 | 2.483 5967 | 1.70 139 | 2.501 8884 | 1.71 053 | 2.520 5727 | 1.71 983 |
| 39 | 2.465 9776 | 1.69 258 | 2.483 8984 | 1.70 154 | 2.502 1965 | 1.71 068 | 2.520 8875 | 1.71 999 |
| 40 | 2.466 2733 | 1.69 273 | 2.484 2003 | 1.70 169 | 2.502 5048 | 1.71 083 | 2.521 2024 | 1.72 015 |
| 41 | 2.466 5690 | 1.69 288 | 2.484 5022 | 1.70 184 | 2.502 8131 | 1.71 098 | 2.521 5175 | 1.72 031 |
| 42 | 2.466 8649 | 1.69 303 | 2.484 8043 | 1.70 199 | 2.503 1216 | 1.71 114 | 2.521 8327 | 1.72 046 |
| 43 | 2.467 1609 | 1.69 318 | 2.485 1064 | 1.70 214 | 2.503 4302 | 1.71 129 | 2.522 1479 | 1.72 062 |
| 44 | 2.467 4570 | 1.69 333 | 2.485 4087 | 1.70 229 | 2.503 7389 | 1.71 145 | 2.522 4633 | 1.72 078 |
| 45 | 2.467 7531 | 1.69 347 | 2.485 7110 | 1.70 244 | 2.504 0477 | 1.71 160 | 2.522 7788 | 1.72 093 |
| 46 | 2.468 0494 | 1.69 362 | 2.486 0135 | 1.70 260 | 2.504 3566 | 1.71 175 | 2.523 0945 | 1.72 109 |
| 47 | 2.468 3458 | 1.69 377 | 2.486 3160 | 1.70 275 | 2.504 6656 | 1.71 191 | 2.523 4102 | 1.72 125 |
| 48 | 2.468 6423 | 1.69 392 | 2.486 6187 | 1.70 290 | 2.504 9747 | 1.71 206 | 2.523 7260 | 1.72 140 |
| 49 | 2 468 9388 | 1.69 407 | 2.486 9215 | 1.70 305 | 2.505 2839 | 1.71 222 | 2.524 0420 | 1.72 156 |
| 50 | 2.469 2355 | 1.69 422 | 2.487 2244 | 1.70 320 | 2.505 5933 | 1.71 237 | 2.524 3581 | 1.72 172 |
| 51 | 2.469 5323 | 1.69 436 | 2.487 5274 | 1.70 335 | 2 505 9028 | 1.71 252 | 2.524 6743 | 1.72 188 |
| 52 | 2.469 8292 | 1.69 451 | 2.487 8305 | 1.70 351 | 2.506 2123 | 1.71 268 | 2.524 9906 | 1.72 204 |
| 53 | 2.470 1262 | 1.69 466 | 2.488 1337 | 1.70 366 | 2.506 5220 | 1.71 283 | 2.525 3070 | 1.72 219 |
| 54 | 2 470 4233 | 1.69 481 | 2.488 4370 | 1.70 381 | 2.506 8318 | 1.71 299 | 2.525 6236 | 1.72 235 |
| 55 | 2.470 7205 | 1.69 496 | 2.488 7404 | 1.70 396 | 2.507 1417 | 1.71 314 | 2.525 9402 | 1.72 251 |
| 56 | 2.471 0178 | 1.69 510 | 2.489 0439 | 1.70 411 | 2.507 4517 | 1.71 330 | 2.526 2570 | 1.72 267 |
| 57 | 2.471 3151 | 1.69 525 | 2.489 3476 | 1.70 427 | 2.507 7618 | 1.71 345 | 2.526 5739 | 1.72 283 |
| 58 | 2.471 6126 | 1.69 540 | 2.489 6513 | 1.70 442 | 2.508 0720 | 1.71 361 | 2.526 8909 | 1.72 298 |
| 59 | 2.471 9102 | 1.69 555 | 2.489 9551 | 1.70 457 | 2.508 3824 | 1.71 376 | 2.527 2080 | 1.72 314 |
| 60 | 2.472 2079 | 1.69 570 | 2.490 2591 | 1.70 472 | 2.508 6928 | 1.71 392 | 2.527 5252 | 1.72 330 |

# Tafel V.

| v | 124° log M | 124° log Diff. 1″ | 125° log M | 125° log Diff. 1″ | 126° log M | 126° log Diff. 1″ | 127° log M | 127° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.527 5252 | 1.72 330 | 2.546 7729 | 1.73 287 | 2.566 4536 | 1.74 262 | 2.586 5858 | 1.75 257 |
| 1 | 2.527 8425 | 1.72 346 | 2.547 0974 | 1.73 303 | 2.566 7854 | 1.74 278 | 2.586 9253 | 1.75 274 |
| 2 | 2.528 1600 | 1.72 361 | 2.547 4219 | 1.73 319 | 2.567 1173 | 1.74 295 | 2.587 2649 | 1.75 291 |
| 3 | 2.528 4776 | 1.72 377 | 2.547 7465 | 1.73 335 | 2.567 4494 | 1.74 311 | 2.587 6046 | 1.75 307 |
| 4 | 2.528 7953 | 1.72 393 | 2.548 0713 | 1.73 351 | 2.567 7815 | 1.74 327 | 2.587 9445 | 1.75 324 |
| 5 | 2.529 1131 | 1.72 409 | 2.548 3962 | 1.73 368 | 2.568 1138 | 1.74 344 | 2.588 2845 | 1.75 341 |
| 6 | 2.529 4310 | 1.72 425 | 2.548 7212 | 1.73 384 | 2.568 4462 | 1.74 360 | 2.588 6246 | 1.75 358 |
| 7 | 2.529 7490 | 1.72 440 | 2.549 0464 | 1.73 400 | 2.568 7788 | 1.74 377 | 2.588 9649 | 1.75 374 |
| 8 | 2.530 0672 | 1.72 456 | 2.549 3716 | 1.73 416 | 2.569 1114 | 1.74 393 | 2.589 3053 | 1.75 391 |
| 9 | 2.530 3855 | 1.72 472 | 2.549 6970 | 1.73 432 | 2.569 4442 | 1.74 410 | 2.589 6458 | 1.75 408 |
| 10 | 2.530 7038 | 1.72 488 | 2.550 0225 | 1.73 448 | 2.569 7771 | 1.74 427 | 2.589 9864 | 1.75 425 |
| 11 | 2.531 0223 | 1.72 504 | 2.550 3481 | 1.73 464 | 2.570 1102 | 1.74 443 | 2.590 3272 | 1.75 442 |
| 12 | 2.531 3409 | 1.72 520 | 2.550 6739 | 1.73 481 | 2.570 4433 | 1.74 460 | 2.590 6681 | 1.75 458 |
| 13 | 2.531 6597 | 1.72 536 | 2.550 9997 | 1.73 497 | 2.570 7766 | 1.74 476 | 2.591 0092 | 1.75 475 |
| 14 | 2.531 9786 | 1.72 552 | 2.551 3257 | 1.73 513 | 2.571 1101 | 1.74 493 | 2.591 3504 | 1.75 492 |
| 15 | 2.532 2975 | 1.72 567 | 2.551 6518 | 1.73 529 | 2.571 4436 | 1.74 509 | 2.591 6917 | 1.75 509 |
| 16 | 2.532 6166 | 1.72 583 | 2.551 9780 | 1.73 545 | 2.571 7773 | 1.74 526 | 2.592 0331 | 1.75 526 |
| 17 | 2.532 9358 | 1.72 599 | 2.552 3044 | 1.73 562 | 2.572 1111 | 1.74 542 | 2.592 3747 | 1.75 542 |
| 18 | 2.533 2551 | 1.72 615 | 2.552 6309 | 1.73 578 | 2.572 4450 | 1.74 559 | 2.592 7164 | 1.75 559 |
| 19 | 2.533 5746 | 1.72 631 | 2.552 9575 | 1.73 594 | 2.572 7791 | 1.74 575 | 2.593 0582 | 1.75 576 |
| 20 | 2.533 8941 | 1.72 647 | 2.553 2842 | 1.73 610 | 2.573 1133 | 1.74 592 | 2.593 4002 | 1.75 593 |
| 21 | 2.534 2138 | 1.72 663 | 2.553 6110 | 1.73 626 | 2.573 4476 | 1.74 608 | 2.593 7423 | 1.75 610 |
| 22 | 2.534 5336 | 1.72 679 | 2.553 9380 | 1.73 643 | 2.573 7820 | 1.74 625 | 2.594 0845 | 1.75 627 |
| 23 | 2.534 8535 | 1.72 695 | 2.554 2650 | 1.73 659 | 2.574 1166 | 1.74 641 | 2.594 4269 | 1.75 643 |
| 24 | 2.535 1735 | 1.72 711 | 2.554 5922 | 1.73 675 | 2.574 4513 | 1.74 658 | 2.594 7694 | 1.75 660 |
| 25 | 2.535 4936 | 1.72 726 | 2.554 9196 | 1.73 692 | 2.574 7861 | 1.74 674 | 2.595 1121 | 1.75 677 |
| 26 | 2.535 8139 | 1.72 742 | 2.555 2470 | 1.73 708 | 2.575 1210 | 1.74 691 | 2.595 4548 | 1.75 694 |
| 27 | 2.536 1342 | 1.72 758 | 2.555 5746 | 1.73 724 | 2.575 4561 | 1.74 707 | 2.595 7977 | 1.75 711 |
| 28 | 2.536 4547 | 1.72 774 | 2.555 9023 | 1.73 741 | 2.575 7913 | 1.74 724 | 2.596 1408 | 1.75 728 |
| 29 | 2.536 7753 | 1.72 790 | 2.556 2301 | 1.73 757 | 2.576 1266 | 1.74 740 | 2.596 4839 | 1.75 745 |
| 30 | 2.537 0961 | 1.72 806 | 2.556 5580 | 1.73 773 | 2.576 4621 | 1.74 757 | 2.596 8272 | 1.75 762 |
| 31 | 2.537 4169 | 1.72 822 | 2.556 8861 | 1.73 789 | 2.576 7977 | 1.74 773 | 2.597 1707 | 1.75 778 |
| 32 | 2.537 7379 | 1.72 838 | 2.557 2143 | 1.73 805 | 2.577 1334 | 1.74 790 | 2.597 5143 | 1.75 795 |
| 33 | 2.538 0590 | 1.72 854 | 2.557 5426 | 1.73 822 | 2.577 4693 | 1.74 806 | 2.597 8580 | 1.75 812 |
| 34 | 2.538 3802 | 1.72 870 | 2.557 8710 | 1.73 838 | 2.577 8052 | 1.74 823 | 2.598 2018 | 1.75 829 |
| 35 | 2.538 7015 | 1.72 885 | 2.558 1996 | 1.73 854 | 2.578 1413 | 1.74 840 | 2.598 5458 | 1.75 846 |
| 36 | 2.539 0229 | 1.72 901 | 2.558 5282 | 1.73 870 | 2.578 4775 | 1.74 856 | 2.598 8899 | 1.75 863 |
| 37 | 2.539 3444 | 1.72 917 | 2.558 8570 | 1.73 886 | 2.578 8139 | 1.74 873 | 2.599 2341 | 1.75 880 |
| 38 | 2.539 6661 | 1.72 933 | 2.559 1860 | 1.73 903 | 2.579 1504 | 1.74 889 | 2.599 5785 | 1.75 896 |
| 39 | 2.539 9879 | 1.72 949 | 2.559 5150 | 1.73 919 | 2.579 4870 | 1.74 906 | 2.599 9230 | 1.75 913 |
| 40 | 2.540 3098 | 1.72 965 | 2.559 8442 | 1.73 935 | 2.579 8237 | 1.74 923 | 2.600 2676 | 1.75 930 |
| 41 | 2.540 6318 | 1.72 981 | 2.560 1735 | 1.73 951 | 2.580 1606 | 1.74 939 | 2.600 6124 | 1.75 947 |
| 42 | 2.540 9540 | 1.72 997 | 2.560 5029 | 1.73 968 | 2.580 4976 | 1.74 956 | 2.600 9573 | 1.75 964 |
| 43 | 2.541 2762 | 1.73 013 | 2.560 8324 | 1.73 984 | 2.580 8348 | 1.74 973 | 2.601 3024 | 1.75 981 |
| 44 | 2.541 5986 | 1.73 029 | 2.561 1621 | 1.74 000 | 2.581 1720 | 1.74 989 | 2.601 6476 | 1.75 998 |
| 45 | 2.541 9211 | 1.73 045 | 2.561 4919 | 1.74 017 | 2.581 5094 | 1.75 006 | 2.601 9929 | 1.76 015 |
| 46 | 2.542 2437 | 1.73 062 | 2.561 8218 | 1.74 033 | 2.581 8469 | 1.75 023 | 2.602 3383 | 1.76 032 |
| 47 | 2.542 5665 | 1.73 078 | 2.562 1518 | 1.74 049 | 2.582 1846 | 1.75 040 | 2.602 6839 | 1.76 049 |
| 48 | 2.542 8893 | 1.73 094 | 2.562 4820 | 1.74 066 | 2.582 5223 | 1.75 056 | 2.603 0297 | 1.76 066 |
| 49 | 2.543 2123 | 1.73 110 | 2.562 8123 | 1.74 082 | 2.582 8603 | 1.75 073 | 2.603 3755 | 1.76 083 |
| 50 | 2.543 5354 | 1.73 126 | 2.563 1427 | 1.74 098 | 2.583 1983 | 1.75 089 | 2.603 7215 | 1.76 100 |
| 51 | 2.543 8586 | 1.73 142 | 2.563 4732 | 1.74 114 | 2.583 5364 | 1.75 106 | 2.604 0676 | 1.76 117 |
| 52 | 2.544 1819 | 1.73 158 | 2.563 8039 | 1.74 131 | 2.583 8747 | 1.75 123 | 2.604 4139 | 1.76 134 |
| 53 | 2.544 5054 | 1.73 174 | 2.564 1347 | 1.74 147 | 2.584 2132 | 1.75 139 | 2.604 7603 | 1.76 151 |
| 54 | 2.544 8290 | 1.73 190 | 2.564 4656 | 1.74 163 | 2.584 5517 | 1.75 156 | 2.605 1068 | 1.76 168 |
| 55 | 2.545 1527 | 1.73 206 | 2.564 7966 | 1.74 180 | 2.584 8904 | 1.75 173 | 2.605 4535 | 1.76 185 |
| 56 | 2.545 4765 | 1.73 223 | 2.565 1278 | 1.74 196 | 2.585 2292 | 1.75 190 | 2.605 8003 | 1.76 202 |
| 57 | 2.545 8005 | 1.73 239 | 2.565 4590 | 1.74 212 | 2.585 5682 | 1.75 207 | 2.606 1473 | 1.76 219 |
| 58 | 2.546 1245 | 1.73 255 | 2.565 7904 | 1.74 229 | 2.585 9073 | 1.75 223 | 2.606 4944 | 1.76 236 |
| 59 | 2.546 4486 | 1.73 271 | 2.566 1220 | 1.74 245 | 2.586 2465 | 1.75 240 | 2.606 8416 | 1.76 253 |
| 60 | 2.546 7729 | 1.73 287 | 2.566 4536 | 1.74 262 | 2.586 5858 | 1.75 257 | 2.607 1889 | 1.76 270 |

# Tafel V.

| v | 128° | | 129° | | 130° | | 131° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 2.607 1889 | 1.76 270 | 2.628 2835 | 1.77 304 | 2.649 8911 | 1.78 358 | 2.672 0345 | 1.79 432 |
| 1 | 2.607 5364 | 1.76 287 | 2.628 6393 | 1.77 321 | 2.650 2557 | 1.78 376 | 2.672 4083 | 1.79 450 |
| 2 | 2.607 8840 | 1.76 304 | 2.628 9953 | 1.77 339 | 2.650 6204 | 1.78 394 | 2.672 7822 | 1.79 468 |
| 3 | 2.608 2318 | 1.76 321 | 2.629 3515 | 1.77 356 | 2.650 9853 | 1.78 411 | 2.673 1562 | 1.79 486 |
| 4 | 2.608 5797 | 1.76 338 | 2.629 7078 | 1.77 373 | 2.651 3504 | 1.78 429 | 2.673 5304 | 1.79 504 |
| 5 | 2.608 9277 | 1.76 356 | 2.630 0642 | 1.77 391 | 2.651 7156 | 1.78 447 | 2.673 9048 | 1.79 523 |
| 6 | 2.609 2759 | 1.76 373 | 2.630 4208 | 1.77 408 | 2.652 0809 | 1.78 465 | 2.674 2793 | 1.79 541 |
| 7 | 2.609 6242 | 1.76 390 | 2.630 7775 | 1.77 425 | 2.652 4464 | 1.78 482 | 2.674 6540 | 1.79 559 |
| 8 | 2.609 9727 | 1.76 407 | 2.631 1343 | 1.77 443 | 2.652 8120 | 1.78 500 | 2.675 0288 | 1.79 577 |
| 9 | 2.610 3213 | 1.76 424 | 2.631 4913 | 1.77 460 | 2.653 1778 | 1.78 518 | 2.675 4038 | 1.79 595 |
| 10 | 2.610 6700 | 1.76 441 | 2.631 8485 | 1.77 478 | 2.653 5438 | 1.78 536 | 2.675 7789 | 1.79 613 |
| 11 | 2.611 0188 | 1.76 458 | 2.632 2058 | 1.77 495 | 2.653 9099 | 1.78 553 | 2.676 1542 | 1.79 631 |
| 12 | 2.611 3678 | 1.76 475 | 2.632 5632 | 1.77 513 | 2.654 2761 | 1.78 571 | 2.676 5296 | 1.79 649 |
| 13 | 2.611 7170 | 1.76 493 | 2.632 9208 | 1.77 530 | 2.654 6425 | 1.78 589 | 2.676 9052 | 1.79 667 |
| 14 | 2.612 0662 | 1.76 510 | 2.633 2785 | 1.77 548 | 2.655 0091 | 1.78 607 | 2.677 2810 | 1.79 686 |
| 15 | 2.612 4157 | 1.76 527 | 2.633 6364 | 1.77 565 | 2.655 3758 | 1.78 624 | 2.677 6569 | 1.79 704 |
| 16 | 2.612 7652 | 1.76 544 | 2.633 9944 | 1.77 583 | 2.655 7426 | 1.78 642 | 2.678 0330 | 1.79 722 |
| 17 | 2.613 1149 | 1.76 561 | 2.634 3526 | 1.77 600 | 2.656 1096 | 1.78 660 | 2.678 4092 | 1.79 740 |
| 18 | 2.613 4647 | 1.76 579 | 2.634 7109 | 1.77 618 | 2.656 4768 | 1.78 678 | 2.678 7856 | 1.79 758 |
| 19 | 2.613 8147 | 1.76 596 | 2.635 0693 | 1.77 635 | 2.656 8441 | 1.78 695 | 2.679 1622 | 1.79 776 |
| 20 | 2.614 1648 | 1.76 613 | 2.635 4279 | 1.77 653 | 2.657 2115 | 1.78 713 | 2.679 5389 | 1.79 794 |
| 21 | 2.614 5150 | 1.76 630 | 2.635 7866 | 1.77 670 | 2.657 5791 | 1.78 731 | 2.679 9158 | 1.79 812 |
| 22 | 2.614 8654 | 1.76 648 | 2.636 1455 | 1.77 688 | 2.657 9469 | 1.78 749 | 2.680 2928 | 1.79 831 |
| 23 | 2.615 2159 | 1.76 665 | 2.636 5045 | 1.77 705 | 2.658 3148 | 1.78 767 | 2.680 6700 | 1.79 849 |
| 24 | 2.615 5666 | 1.76 682 | 2.636 8637 | 1.77 723 | 2.658 6828 | 1.78 785 | 2.681 0473 | 1.79 867 |
| 25 | 2.615 9174 | 1.76 699 | 2.637 2230 | 1.77 740 | 2.659 0510 | 1.78 802 | 2.681 4248 | 1.79 886 |
| 26 | 2.616 2683 | 1.76 716 | 2.637 5825 | 1.77 758 | 2.659 4194 | 1.78 820 | 2.681 8025 | 1.79 904 |
| 27 | 2.616 6194 | 1.76 733 | 2.637 9421 | 1.77 775 | 2.659 7879 | 1.78 838 | 2.682 1803 | 1.79 922 |
| 28 | 2.616 9706 | 1.76 750 | 2.638 3018 | 1.77 793 | 2.660 1566 | 1.78 856 | 2.682 5583 | 1.79 940 |
| 29 | 2.617 3219 | 1.76 768 | 2.638 6617 | 1.77 810 | 2.660 5254 | 1.78 874 | 2.682 9364 | 1.79 959 |
| 30 | 2.617 6734 | 1.76 785 | 2.639 0217 | 1.77 828 | 2.660 8943 | 1.78 892 | 2.683 3147 | 1.79 977 |
| 31 | 2.618 0251 | 1.76 802 | 2.639 3819 | 1.77 845 | 2.661 2634 | 1.78 910 | 2.683 6932 | 1.79 995 |
| 32 | 2.618 3768 | 1.76 820 | 2.639 7422 | 1.77 863 | 2.661 6327 | 1.78 928 | 2.684 0718 | 1.80 014 |
| 33 | 2.618 7287 | 1.76 837 | 2.640 1027 | 1.77 880 | 2.662 0021 | 1.78 946 | 2.684 4506 | 1.80 032 |
| 34 | 2.619 0808 | 1.76 854 | 2.640 4633 | 1.77 898 | 2.662 3717 | 1.78 964 | 2.684 8295 | 1.80 050 |
| 35 | 2.619 4330 | 1.76 872 | 2.640 8241 | 1.77 916 | 2.662 7414 | 1.78 982 | 2.685 2086 | 1.80 069 |
| 36 | 2.619 7853 | 1.76 889 | 2.641 1850 | 1.77 933 | 2.663 1113 | 1.79 000 | 2.685 5878 | 1.80 087 |
| 37 | 2.620 1378 | 1.76 906 | 2.641 5461 | 1.77 951 | 2.663 4814 | 1.79 018 | 2.685 9672 | 1.80 105 |
| 38 | 2.620 4904 | 1.76 924 | 2.641 9073 | 1.77 968 | 2.663 8516 | 1.79 036 | 2.686 3468 | 1.80 124 |
| 39 | 2.620 8431 | 1.76 941 | 2.642 2686 | 1.77 986 | 2.664 2219 | 1.79 054 | 2.686 7265 | 1.80 142 |
| 40 | 2.621 1960 | 1.76 958 | 2.642 6301 | 1.78 004 | 2.664 5924 | 1.79 072 | 2.687 1064 | 1.80 160 |
| 41 | 2.621 5491 | 1.76 975 | 2.642 9918 | 1.78 022 | 2.664 9630 | 1.79 090 | 2.687 4865 | 1.80 178 |
| 42 | 2.621 9022 | 1.76 993 | 2.643 3536 | 1.78 039 | 2.665 3338 | 1.79 108 | 2.687 8667 | 1.80 197 |
| 43 | 2.622 2555 | 1.77 010 | 2.643 7155 | 1.78 057 | 2.665 7048 | 1.79 126 | 2.688 2471 | 1.80 215 |
| 44 | 2.622 6090 | 1.77 027 | 2.644 0776 | 1.78 075 | 2.666 0759 | 1.79 144 | 2.688 6276 | 1.80 233 |
| 45 | 2.622 9626 | 1.77 045 | 2.644 4398 | 1.78 092 | 2.666 4471 | 1.79 162 | 2.689 0083 | 1.80 252 |
| 46 | 2.623 3163 | 1.77 062 | 2.644 8022 | 1.78 110 | 2.666 8185 | 1.79 180 | 2.689 3891 | 1.80 270 |
| 47 | 2.623 6702 | 1.77 079 | 2.645 1647 | 1.78 128 | 2.667 1901 | 1.79 198 | 2.689 7701 | 1.80 288 |
| 48 | 2.624 0242 | 1.77 097 | 2.645 5274 | 1.78 145 | 2.667 5618 | 1.79 216 | 2.690 1513 | 1.80 307 |
| 49 | 2.624 3784 | 1.77 114 | 2.645 8902 | 1.78 163 | 2.667 9337 | 1.79 234 | 2.690 5326 | 1.80 325 |
| 50 | 2.624 7327 | 1.77 131 | 2.646 2532 | 1.78 181 | 2.668 3057 | 1.79 252 | 2.690 9141 | 1.80 343 |
| 51 | 2.625 0871 | 1.77 148 | 2.646 6163 | 1.78 198 | 2.668 6779 | 1.79 270 | 2.691 2958 | 1.80 361 |
| 52 | 2.625 4417 | 1.77 166 | 2.646 9796 | 1.78 216 | 2.669 0503 | 1.79 288 | 2.691 6776 | 1.80 380 |
| 53 | 2.625 7964 | 1.77 183 | 2.647 3430 | 1.78 234 | 2.669 4228 | 1.79 306 | 2.692 0596 | 1.80 398 |
| 54 | 2.626 1513 | 1.77 200 | 2.647 7066 | 1.78 252 | 2.669 7954 | 1.79 324 | 2.692 4418 | 1.80 416 |
| 55 | 2.626 5063 | 1.77 218 | 2.648 0703 | 1.78 269 | 2.670 1682 | 1.79 342 | 2.692 8241 | 1.80 435 |
| 56 | 2.626 8614 | 1.77 235 | 2.648 4341 | 1.78 287 | 2.670 5412 | 1.79 360 | 2.693 2065 | 1.80 453 |
| 57 | 2.627 2167 | 1.77 252 | 2.648 7981 | 1.78 305 | 2.670 9143 | 1.79 378 | 2.693 5891 | 1.80 472 |
| 58 | 2.627 5722 | 1.77 270 | 2.649 1624 | 1.78 322 | 2.671 2875 | 1.79 396 | 2.693 9719 | 1.80 490 |
| 59 | 2.627 9278 | 1.77 287 | 2.649 5267 | 1.78 340 | 2.671 6610 | 1.79 414 | 2.694 3549 | 1.80 509 |
| 60 | 2.628 2835 | 1.77 304 | 2.649 8911 | 1.78 358 | 2.672 0345 | 1.79 432 | 2.694 7380 | 1.80 527 |

# Tafel V.

| v | 132° log M | 132° log Diff. 1″ | 133° log M | 133° log Diff. 1″ | 134° log M | 134° log Diff. 1″ | 135° log M | 135° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.694 7380 | 1.80 527 | 2.718 0270 | 1.81 644 | 2.741 9285 | 1.82 782 | 2.766 4713 | 1.83 944 |
| 1 | 2.695 1213 | 1.80 545 | 2.718 4203 | 1.81 663 | 2.742 3323 | 1.82 801 | 2.766 8860 | 1.83 963 |
| 2 | 2.695 5047 | 1.80 564 | 2.718 8137 | 1.81 682 | 2.742 7361 | 1.82 820 | 2.767 3008 | 1.83 983 |
| 3 | 2.695 8883 | 1.80 582 | 2.719 2073 | 1.81 700 | 2.743 1402 | 1.82 840 | 2.767 7158 | 1.84 002 |
| 4 | 2.696 2721 | 1.80 600 | 2.719 6011 | 1.81 719 | 2.743 5444 | 1.82 859 | 2.768 1310 | 1.84 022 |
| 5 | 2.696 6560 | 1.80 618 | 2.719 9950 | 1.81 738 | 2.743 9489 | 1.82 878 | 2.768 5464 | 1.84 041 |
| 6 | 2.697 0401 | 1.80 637 | 2.720 3891 | 1.81 757 | 2.744 3535 | 1.82 897 | 2.768 9620 | 1.84 061 |
| 7 | 2.697 4244 | 1.80 655 | 2.720 7834 | 1.81 776 | 2.744 7583 | 1.82 916 | 2.769 3778 | 1.84 080 |
| 8 | 2.697 8088 | 1.80 674 | 2.721 1779 | 1.81 794 | 2.745 1632 | 1.82 936 | 2.769 7938 | 1.84 100 |
| 9 | 2.698 1934 | 1.80 692 | 2.721 5725 | 1.81 813 | 2.745 5684 | 1.82 955 | 2.770 2099 | 1.84 119 |
| 10 | 2.698 5781 | 1.80 711 | 2.721 9673 | 1.81 832 | 2.745 9737 | 1.82 974 | 2.770 6262 | 1.84 139 |
| 11 | 2.698 9630 | 1.80 729 | 2.722 3623 | 1.81 851 | 2.746 3792 | 1.82 993 | 2.771 0428 | 1.84 158 |
| 12 | 2.699 3481 | 1.80 748 | 2.722 7574 | 1.81 870 | 2.746 7849 | 1.83 013 | 2.771 4595 | 1.84 178 |
| 13 | 2.699 7334 | 1.80 766 | 2.723 1527 | 1.81 889 | 2.747 1907 | 1.83 032 | 2.771 8764 | 1.84 198 |
| 14 | 2.700 1188 | 1.80 785 | 2.723 5482 | 1.81 908 | 2.747 5967 | 1.83 051 | 2.772 2935 | 1.84 217 |
| 15 | 2.700 5043 | 1.80 804 | 2.723 9439 | 1.81 926 | 2.748 0030 | 1.83 070 | 2.772 7108 | 1.84 237 |
| 16 | 2.700 8901 | 1.80 822 | 2.724 3397 | 1.81 945 | 2.748 4094 | 1.83 090 | 2.773 1282 | 1.84 256 |
| 17 | 2.701 2760 | 1.80 841 | 2.724 7357 | 1.81 964 | 2.748 8159 | 1.83 109 | 2.773 5459 | 1.84 276 |
| 18 | 2.701 6620 | 1.80 859 | 2.725 1319 | 1.81 983 | 2.749 2227 | 1.83 128 | 2.773 9637 | 1.84 296 |
| 19 | 2.702 0483 | 1.80 878 | 2.725 5282 | 1.82 002 | 2.749 6296 | 1.83 148 | 2.774 3817 | 1.84 315 |
| 20 | 2.702 4346 | 1.80 897 | 2.725 9247 | 1.82 021 | 2.750 0368 | 1.83 167 | 2.774 8000 | 1.84 335 |
| 21 | 2.702 8212 | 1.80 915 | 2.726 3214 | 1.82 040 | 2.750 4441 | 1.83 186 | 2.775 2184 | 1.84 355 |
| 22 | 2.703 2079 | 1.80 934 | 2.726 7183 | 1.82 059 | 2.750 8515 | 1.83 206 | 2.775 6370 | 1.84 374 |
| 23 | 2.703 5948 | 1.80 952 | 2.727 1153 | 1.82 078 | 2.751 2592 | 1.83 225 | 2.776 0558 | 1.84 394 |
| 24 | 2.703 9819 | 1.80 971 | 2.727 5125 | 1.82 097 | 2.751 6670 | 1.83 244 | 2.776 4748 | 1.84 414 |
| 25 | 2.704 3691 | 1.80 989 | 2.727 9099 | 1.82 115 | 2.752 0751 | 1.83 264 | 2.776 8939 | 1.84 433 |
| 26 | 2.704 7565 | 1.81 008 | 2.728 3075 | 1.82 134 | 2.752 4833 | 1.83 283 | 2.777 3133 | 1.84 453 |
| 27 | 2.705 1440 | 1.81 026 | 2.728 7052 | 1.82 153 | 2.752 8917 | 1.83 302 | 2.777 7328 | 1.84 473 |
| 28 | 2.705 5317 | 1.81 045 | 2.729 1031 | 1.82 172 | 2.753 3002 | 1.83 322 | 2.778 1526 | 1.84 492 |
| 29 | 2.705 9196 | 1.81 063 | 2.729 5012 | 1.82 191 | 2.753 7090 | 1.83 341 | 2.778 5725 | 1.84 512 |
| 30 | 2.706 3077 | 1.81 082 | 2.729 8995 | 1.82 210 | 2.754 1179 | 1.83 360 | 2.778 9926 | 1.84 532 |
| 31 | 2.706 6959 | 1.81 100 | 2.730 2979 | 1.82 229 | 2.754 5270 | 1.83 379 | 2.779 4129 | 1.84 552 |
| 32 | 2.707 0843 | 1.81 119 | 2.730 6965 | 1.82 248 | 2.754 9363 | 1.83 399 | 2.779 8335 | 1.84 571 |
| 33 | 2.707 4728 | 1.81 137 | 2.731 0953 | 1.82 267 | 2.755 3458 | 1.83 418 | 2.780 2542 | 1.84 591 |
| 34 | 2.707 8615 | 1.81 156 | 2.731 4942 | 1.82 286 | 2.755 7555 | 1.83 438 | 2.780 6750 | 1.84 611 |
| 35 | 2.708 2504 | 1.81 175 | 2.731 8933 | 1.82 305 | 2.756 1653 | 1.83 457 | 2.781 0961 | 1.84 631 |
| 36 | 2.708 6395 | 1.81 193 | 2.732 2926 | 1.82 324 | 2.756 5754 | 1.83 476 | 2.781 5174 | 1.84 651 |
| 37 | 2.709 0287 | 1.81 212 | 2.732 6921 | 1.82 343 | 2.756 9856 | 1.83 496 | 2.781 9389 | 1.84 670 |
| 38 | 2.709 4180 | 1.81 230 | 2.733 0917 | 1.82 362 | 2.757 3960 | 1.83 515 | 2.782 3605 | 1.84 690 |
| 39 | 2.709 8076 | 1.81 249 | 2.733 4916 | 1.82 381 | 2.757 8065 | 1.83 535 | 2.782 7824 | 1.84 710 |
| 40 | 2.710 1973 | 1.81 268 | 2.733 8916 | 1.82 400 | 2.758 2173 | 1.83 554 | 2.783 2044 | 1.84 730 |
| 41 | 2.710 5872 | 1.81 287 | 2.734 2917 | 1.82 419 | 2.758 6283 | 1.83 573 | 2.783 6266 | 1.84 750 |
| 42 | 2.710 9773 | 1.81 305 | 2.734 6921 | 1.82 438 | 2.759 0394 | 1.83 593 | 2.784 0491 | 1.84 770 |
| 43 | 2.711 3675 | 1.81 324 | 2.735 0926 | 1.82 457 | 2.759 4507 | 1.83 612 | 2.784 4717 | 1.84 789 |
| 44 | 2.711 7579 | 1.81 343 | 2.735 4933 | 1.82 476 | 2.759 8622 | 1.83 632 | 2.784 8945 | 1.84 809 |
| 45 | 2.712 1484 | 1.81 362 | 2.735 8942 | 1.82 496 | 2.760 2739 | 1.83 651 | 2.785 3175 | 1.84 829 |
| 46 | 2.712 5391 | 1.81 381 | 2.736 2952 | 1.82 515 | 2.760 6858 | 1.83 671 | 2.785 7407 | 1.84 849 |
| 47 | 2.712 9300 | 1.81 399 | 2.736 6965 | 1.82 534 | 2.761 0978 | 1.83 690 | 2.786 1641 | 1.84 869 |
| 48 | 2.713 3211 | 1.81 418 | 2.737 0979 | 1.82 553 | 2.761 5100 | 1.83 710 | 2.786 5877 | 1.84 889 |
| 49 | 2.713 7123 | 1.81 437 | 2.737 4995 | 1.82 572 | 2.761 9225 | 1.83 729 | 2.787 0114 | 1.84 909 |
| 50 | 2.714 1037 | 1.81 456 | 2.737 9012 | 1.82 591 | 2.762 3351 | 1.83 749 | 2.787 4354 | 1.84 929 |
| 51 | 2.714 4953 | 1.81 475 | 2.738 3031 | 1.82 610 | 2.762 7479 | 1.83 768 | 2.787 8596 | 1.84 949 |
| 52 | 2.714 8870 | 1.81 493 | 2.738 7053 | 1.82 629 | 2.763 1608 | 1.83 788 | 2.788 2839 | 1.84 969 |
| 53 | 2.715 2789 | 1.81 512 | 2.739 1076 | 1.82 648 | 2.763 5740 | 1.83 807 | 2.788 7085 | 1.84 989 |
| 54 | 2.715 6710 | 1.81 531 | 2.739 5100 | 1.82 667 | 2.763 9873 | 1.83 827 | 2.789 1332 | 1.85 009 |
| 55 | 2.716 0632 | 1.81 550 | 2.739 9127 | 1.82 687 | 2.764 4009 | 1.83 846 | 2.789 5582 | 1.85 028 |
| 56 | 2.716 4556 | 1.81 569 | 2.740 3155 | 1.82 706 | 2.764 8146 | 1.83 866 | 2.789 9833 | 1.85 048 |
| 57 | 2.716 8482 | 1.81 587 | 2.740 7185 | 1.82 725 | 2.765 2285 | 1.83 885 | 2.790 4087 | 1.85 068 |
| 58 | 2.717 2410 | 1.81 606 | 2.741 1217 | 1.82 744 | 2.765 6426 | 1.83 905 | 2.790 8342 | 1.85 088 |
| 59 | 2.717 6339 | 1.81 625 | 2.741 5250 | 1.82 763 | 2.766 0569 | 1.83 924 | 2.791 2599 | 1.85 108 |
| 60 | 2.718 0270 | 1.81 644 | 2.741 9285 | 1.82 782 | 2.766 4713 | 1.83 944 | 2.791 6858 | 1.85 128 |

# Tafel V.

| v | 136° | | 137° | | 138° | | 139° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log M | log Diff. 1" | log M | log Diff. 1" | log M | log Diff. 1" | log M | log Diff. 1" |
| 0' | 2.791 6858 | 1.85 128 | 2.817 6045 | 1.86 336 | 2.844 2618 | 1.87 568 | 2.871 6947 | 1.88 827 |
| 1 | 2.792 1119 | 1.85 148 | 2.818 0426 | 1.86 356 | 2.844 7126 | 1.87 589 | 2.872 1587 | 1.88 848 |
| 2 | 2.792 5382 | 1.85 168 | 2.818 4810 | 1.86 377 | 2.845 1635 | 1.87 609 | 2.872 6229 | 1.88 870 |
| 3 | 2.792 9648 | 1.85 188 | 2.818 9195 | 1.86 397 | 2.845 6147 | 1.87 630 | 2.873 0874 | 1.88 891 |
| 4 | 2.793 3915 | 1.85 208 | 2.819 3582 | 1.86 417 | 2.846 0661 | 1.87 651 | 2.873 5521 | 1.88 912 |
| 5 | 2.793 8184 | 1.85 227 | 2.819 7972 | 1.86 438 | 2.846 5177 | 1.87 672 | 2.874 0170 | 1.88 933 |
| 6 | 2.794 2455 | 1.85 247 | 2.820 2364 | 1.86 458 | 2.846 9696 | 1.87 693 | 2.874 4821 | 1.88 954 |
| 7 | 2.794 6727 | 1.85 267 | 2.820 6757 | 1.86 478 | 2.847 4216 | 1.87 713 | 2.874 9475 | 1.88 976 |
| 8 | 2.795 1002 | 1.85 287 | 2.821 1153 | 1.86 499 | 2.847 8739 | 1.87 734 | 2.875 4131 | 1.88 997 |
| 9 | 2.795 5279 | 1.85 307 | 2.821 5551 | 1.86 519 | 2.848 3264 | 1.87 755 | 2.875 8789 | 1.89 018 |
| 10 | 2.795 9558 | 1.85 327 | 2.821 9951 | 1.86 540 | 2.848 7791 | 1.87 776 | 2.876 3450 | 1.89 039 |
| 11 | 2.796 3839 | 1.85 347 | 2.822 4353 | 1.86 560 | 2.849 2320 | 1.87 797 | 2.876 8113 | 1.89 060 |
| 12 | 2.796 8122 | 1.85 367 | 2.822 8757 | 1.86 581 | 2.849 6851 | 1.87 817 | 2.877 2778 | 1.89 082 |
| 13 | 2.797 2406 | 1.85 387 | 2.823 3163 | 1.86 601 | 2.850 1385 | 1.87 838 | 2.877 7445 | 1.89 103 |
| 14 | 2.797 6693 | 1.85 407 | 2.823 7571 | 1.86 621 | 2.850 5920 | 1.87 859 | 2.878 2115 | 1.89 124 |
| 15 | 2.798 0982 | 1.85 428 | 2.824 1981 | 1.86 642 | 2.851 0458 | 1.87 880 | 2.878 6787 | 1.89 146 |
| 16 | 2.798 5272 | 1.85 448 | 2.824 6394 | 1.86 662 | 2.851 4998 | 1.87 901 | 2.879 1461 | 1.89 167 |
| 17 | 2.798 9565 | 1.85 468 | 2.825 0808 | 1.86 683 | 2.851 9540 | 1.87 921 | 2.879 6137 | 1.89 188 |
| 18 | 2.799 3860 | 1.85 488 | 2.825 5225 | 1.86 703 | 2.852 4085 | 1.87 942 | 2.880 0816 | 1.89 210 |
| 19 | 2.799 8156 | 1.85 508 | 2.825 9643 | 1.86 724 | 2.852 8631 | 1.87 963 | 2.880 5497 | 1.89 231 |
| 20 | 2.800 2455 | 1.85 528 | 2.826 4064 | 1.86 744 | 2.853 3180 | 1.87 984 | 2.881 0181 | 1.89 252 |
| 21 | 2.800 6755 | 1.85 548 | 2.826 8487 | 1.86 764 | 2.853 7731 | 1.88 005 | 2.881 4867 | 1.89 273 |
| 22 | 2.801 1058 | 1.85 568 | 2.827 2912 | 1.86 785 | 2.854 2284 | 1.88 026 | 2.881 9555 | 1.89 295 |
| 23 | 2.801 5362 | 1.85 588 | 2.827 7338 | 1.86 805 | 2.854 6840 | 1.88 047 | 2.882 4245 | 1.89 316 |
| 24 | 2.801 9669 | 1.85 608 | 2.828 1767 | 1.86 826 | 2.855 1397 | 1.88 068 | 2.882 8938 | 1.89 338 |
| 25 | 2.802 3978 | 1.85 629 | 2.828 6199 | 1.86 846 | 2.855 5957 | 1.88 089 | 2.883 3632 | 1.89 359 |
| 26 | 2.802 8288 | 1.85 649 | 2.829 0632 | 1.86 867 | 2.856 0519 | 1.88 110 | 2.883 8330 | 1.89 380 |
| 27 | 2.803 2601 | 1.85 669 | 2.829 5067 | 1.86 887 | 2.856 5083 | 1.88 131 | 2.884 3029 | 1.89 402 |
| 28 | 2.803 6915 | 1.85 689 | 2.829 9504 | 1.86 908 | 2.856 9650 | 1.88 152 | 2.884 7731 | 1.89 423 |
| 29 | 2.804 1232 | 1.85 709 | 2.830 3944 | 1.86 928 | 2.857 4218 | 1.88 173 | 2.885 2435 | 1.89 445 |
| 30 | 2.804 5550 | 1.85 729 | 2.830 8385 | 1.86 949 | 2.857 8789 | 1.88 194 | 2.885 7142 | 1.89 466 |
| 31 | 2.804 9871 | 1.85 749 | 2.831 2829 | 1.86 969 | 2.858 3362 | 1.88 215 | 2.886 1851 | 1.89 487 |
| 32 | 2.805 4193 | 1.85 769 | 2.831 7275 | 1.86 990 | 2.858 7937 | 1.88 236 | 2.886 6562 | 1.89 509 |
| 33 | 2.805 8518 | 1.85 789 | 2.832 1723 | 1.87 010 | 2.859 2515 | 1.88 257 | 2.887 1276 | 1.89 530 |
| 34 | 2.806 2844 | 1.85 809 | 2.832 6173 | 1.87 031 | 2.859 7094 | 1.88 278 | 2.887 5991 | 1.89 552 |
| 35 | 2.806 7173 | 1.85 830 | 2.833 0625 | 1.87 052 | 2.860 1676 | 1.88 299 | 2.888 0709 | 1.89 573 |
| 36 | 2.807 1504 | 1.85 850 | 2.833 5079 | 1.87 072 | 2.860 6260 | 1.88 320 | 2.888 5430 | 1.89 594 |
| 37 | 2.807 5836 | 1.85 870 | 2.833 9536 | 1.87 093 | 2.861 0846 | 1.88 341 | 2.889 0153 | 1.89 616 |
| 38 | 2.808 0171 | 1.85 890 | 2.834 3994 | 1.87 113 | 2.861 5435 | 1.88 362 | 2.889 4878 | 1.89 638 |
| 39 | 2.808 4507 | 1.85 910 | 2.834 8454 | 1.87 134 | 2.862 0025 | 1.88 383 | 2.889 9605 | 1.89 659 |
| 40 | 2.808 8846 | 1.85 930 | 2.835 2917 | 1.87 155 | 2.862 4618 | 1.88 404 | 2.890 4335 | 1.89 680 |
| 41 | 2.809 3187 | 1.85 950 | 2.835 7382 | 1.87 176 | 2.862 9214 | 1.88 425 | 2.890 9067 | 1.89 702 |
| 42 | 2.809 7529 | 1.85 971 | 2.836 1849 | 1.87 196 | 2.863 3811 | 1.88 447 | 2.891 3802 | 1.89 723 |
| 43 | 2.810 1874 | 1.85 991 | 2.836 6318 | 1.87 217 | 2.863 8411 | 1.88 468 | 2.891 8539 | 1.89 745 |
| 44 | 2.810 6221 | 1.86 011 | 2.837 0789 | 1.87 238 | 2.864 3012 | 1.88 489 | 2.892 3278 | 1.89 766 |
| 45 | 2.811 0569 | 1.86 032 | 2.837 5262 | 1.87 258 | 2.864 7617 | 1.88 510 | 2.892 8020 | 1.89 788 |
| 46 | 2.811 4920 | 1.86 052 | 2.837 9738 | 1.87 279 | 2.865 2223 | 1.88 531 | 2.893 2764 | 1.89 810 |
| 47 | 2.811 9273 | 1.86 072 | 2.838 4215 | 1.87 300 | 2.865 6831 | 1.88 553 | 2.893 7510 | 1.89 831 |
| 48 | 2.812 3628 | 1.86 093 | 2.838 8695 | 1.87 320 | 2.866 1442 | 1.88 574 | 2.894 2258 | 1.89 853 |
| 49 | 2.812 7985 | 1.86 113 | 2.839 3177 | 1.87 341 | 2.866 6055 | 1.88 595 | 2.894 7009 | 1.89 874 |
| 50 | 2.813 2344 | 1.86 133 | 2.839 7661 | 1.87 362 | 2.867 0670 | 1.88 616 | 2.895 1763 | 1.89 896 |
| 51 | 2.813 6705 | 1.86 153 | 2.840 2147 | 1.87 383 | 2.867 5288 | 1.88 637 | 2.895 6518 | 1.89 917 |
| 52 | 2.814 1067 | 1.86 174 | 2.840 6635 | 1.87 403 | 2.867 9908 | 1.88 658 | 2.896 1276 | 1.89 939 |
| 53 | 2.814 5432 | 1.86 194 | 2.841 1125 | 1.87 424 | 2.868 4530 | 1.88 680 | 2.896 6037 | 1.89 960 |
| 54 | 2.814 9800 | 1.86 214 | 2.841 5618 | 1.87 444 | 2.868 9154 | 1.88 701 | 2.897 0800 | 1.89 982 |
| 55 | 2.815 4169 | 1.86 235 | 2.842 0113 | 1.87 465 | 2.869 3781 | 1.88 722 | 2.897 5565 | 1.90 003 |
| 56 | 2.815 8540 | 1.86 255 | 2.842 4609 | 1.87 486 | 2.869 8409 | 1.88 743 | 2.898 0332 | 1.90 025 |
| 57 | 2.816 2913 | 1.86 275 | 2.842 9108 | 1.87 506 | 2.870 3040 | 1.88 764 | 2.898 5102 | 1.90 046 |
| 58 | 2.816 7288 | 1.86 296 | 2.843 3609 | 1.87 527 | 2.870 7674 | 1.88 785 | 2.898 9874 | 1.90 068 |
| 59 | 2.817 1665 | 1.86 316 | 2.843 8113 | 1.87 547 | 2.871 2309 | 1.88 806 | 2.899 4649 | 1.90 089 |
| 60 | 2.817 6045 | 1.86 336 | 2.844 2618 | 1.87 568 | 2.871 6947 | 1.88 827 | 2.899 9426 | 1.90 111 |

## Tafel V.

| $v$ | 140° log $M$ | 140° log Diff. 1″ | 141° log $M$ | 141° log Diff. 1″ | 142° log $M$ | 142° log Diff. 1″ | 143° log $M$ | 143° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 2.899 9426 | 1.90 111 | 2.929 0477 | 1.91 423 | 2.959 0554 | 1.92 764 | 2.990 0143 | 1.94 135 |
| 1 | 2.900 4205 | 1.90 133 | 2.929 5403 | 1.91 445 | 2.959 5634 | 1.92 786 | 2.990 5387 | 1.94 158 |
| 2 | 2.900 8987 | 1.90 154 | 2.930 0332 | 1.91 468 | 2.960 0717 | 1.92 809 | 2.991 0633 | 1.94 181 |
| 3 | 2.901 3771 | 1.90 176 | 2.930 5263 | 1.91 490 | 2.960 5803 | 1.92 831 | 2.991 5882 | 1.94 204 |
| 4 | 2.901 8558 | 1.90 198 | 2.931 0196 | 1.91 512 | 2.961 0892 | 1.92 854 | 2.992 1134 | 1.94 227 |
| 5 | 2.902 3347 | 1.90 219 | 2.931 5132 | 1.91 534 | 2.961 5983 | 1.92 877 | 2.992 6388 | 1.94 250 |
| 6 | 2.902 8138 | 1.90 241 | 2.932 0071 | 1.91 556 | 2.962 1076 | 1.92 899 | 2.993 1646 | 1.94 273 |
| 7 | 2.903 2932 | 1.90 263 | 2.932 5012 | 1.91 578 | 2.962 6173 | 1.92 922 | 2.993 6906 | 1.94 296 |
| 8 | 2.903 7728 | 1.90 285 | 2.932 9956 | 1.91 601 | 2.963 1272 | 1.92 944 | 2.994 2169 | 1.94 319 |
| 9 | 2.904 2526 | 1.90 306 | 2.933 4902 | 1.91 623 | 2.963 6373 | 1.92 967 | 2.994 7434 | 1.94 342 |
| 10 | 2.904 7327 | 1.90 328 | 2.933 9850 | 1.91 645 | 2 964 1478 | 1.92 990 | 2.995 2703 | 1.94 365 |
| 11 | 2.905 2131 | 1.90 350 | 2.934 4801 | 1.91 667 | 2.964 6585 | 1.93 013 | 2.995 7974 | 1.94 388 |
| 12 | 2.905 6936 | 1.90 371 | 2.934 9755 | 1.91 690 | 2.965 1695 | 1.93 035 | 2.996 3248 | 1.94 412 |
| 13 | 2.906 1744 | 1.90 393 | 2.935 4712 | 1.91 712 | 2.965 6807 | 1.93 058 | 2.996 8525 | 1.94 435 |
| 14 | 2.906 6555 | 1.90 415 | 2.935 9671 | 1.91 734 | 2.966 1922 | 1.93 081 | 2.997 3805 | 1.94 458 |
| 15 | 2.907 1368 | 1.90 437 | 2.936 4632 | 1.91 756 | 2.966 7040 | 1.93 104 | 2.997 9088 | 1.94 481 |
| 16 | 2.907 6183 | 1.90 459 | 2.936 9596 | 1.91 778 | 2.967 2160 | 1.93 127 | 2.998 4374 | 1.94 504 |
| 17 | 2.908 1001 | 1.90 480 | 2.937 4562 | 1.91 801 | 2.967 7283 | 1.93 149 | 2.998 9662 | 1.94 528 |
| 18 | 2 908 5821 | 1.90 502 | 2.937 9531 | 1.91 823 | 2.968 2409 | 1.93 172 | 2.999 4953 | 1.94 551 |
| 19 | 2.909 0644 | 1.90 524 | 2.938 4503 | 1.91 845 | 2.968 7537 | 1.93 195 | 3.000 0247 | 1.94 574 |
| 20 | 2.909 5469 | 1.90 546 | 2.938 9477 | 1.91 867 | 2.969 2668 | 1.93 218 | 3.000 5544 | 1.94 598 |
| 21 | 2.910 0296 | 1.90 568 | 2.939 4453 | 1.91 889 | 2.969 7802 | 1.93 241 | 3.001 0843 | 1.94 621 |
| 22 | 2.910 5126 | 1.90 590 | 2.939 9432 | 1.91 912 | 2.970 2939 | 1.93 263 | 3.001 6146 | 1.94 645 |
| 23 | 2.910 9958 | 1.90 611 | 2.940 4414 | 1.91 934 | 2.970 8078 | 1.93 286 | 3.002 1451 | 1.94 668 |
| 24 | 2.911 4793 | 1.90 633 | 2.940 9398 | 1.91 956 | 2.971 3220 | 1.93 309 | 3.002 6759 | 1.94 691 |
| 25 | 2.911 9630 | 1.90 655 | 2.941 4385 | 1 91 979 | 2.971 8364 | 1.93 331 | 3.003 2070 | 1.94 715 |
| 26 | 2.912 4470 | 1.90 677 | 2.941 9374 | 1.92 001 | 2.972 3511 | 1.93 354 | 3.003 7384 | 1.94 738 |
| 27 | 2.912 9312 | 1.90 699 | 2.942 4366 | 1.92 023 | 2.972 8661 | 1.93 377 | 3.004 2701 | 1.94 761 |
| 28 | 2.913 4156 | 1.90 721 | 2.942 9361 | 1.92 046 | 2.973 3814 | 1.93 400 | 3.004 8020 | 1.94 785 |
| 29 | 2.913 9003 | 1.90 742 | 2.943 4358 | 1.92 068 | 2 973 8970 | 1.93 422 | 3.005 3343 | 1.94 808 |
| 30 | 2.914 3852 | 1.90 764 | 2.943 9358 | 1.92 090 | 2.974 4128 | 1.93 445 | 3.005 8668 | 1.94 831 |
| 31 | 2.914 8704 | 1.90 786 | 2.944 4360 | 1.92 112 | 2.974 9288 | 1.93 468 | 3.006 3996 | 1.94 854 |
| 32 | 2.915 3558 | 1.90 808 | 2.944 9365 | 1.92 135 | 2.975 4452 | 1.93 491 | 3.006 9327 | 1.94 877 |
| 33 | 2.915 8415 | 1 90 830 | 2.945 4372 | 1.92 157 | 2.975 9618 | 1.93 514 | 3.007 4661 | 1.94 901 |
| 34 | 2.916 3274 | 1.90 852 | 2.945 9382 | 1.92 179 | 2.976 4787 | 1.93 537 | 3.007 9998 | 1.94 925 |
| 35 | 2.916 8136 | 1.90 873 | 2.946 4395 | 1.92 202 | 2.976 9959 | 1.93 559 | 3.008 5338 | 1.94 948 |
| 36 | 2.917 3000 | 1.90 895 | 2.946 9410 | 1.92 224 | 2.977 5133 | 1.93 582 | 3.009 0680 | 1.94 971 |
| 37 | 2.917 7866 | 1.90 917 | 2.947 4427 | 1.92 246 | 2.978 0310 | 1.93 605 | 3.009 6026 | 1.94 995 |
| 38 | 2.918 2735 | 1.90 939 | 2.947 9448 | 1.92 269 | 2.978 5490 | 1.93 628 | 3.010 1374 | 1.95 018 |
| 39 | 2.918 7606 | 1.90 961 | 2.948 4471 | 1.92 291 | 2.979 0673 | 1.93 651 | 3.010 6725 | 1.95 042 |
| 40 | 2.919 2480 | 1.90 983 | 2.948 9496 | 1.92 313 | 2.979 5858 | 1.93 674 | 3.011 2079 | 1.95 065 |
| 41 | 2.919 7356 | 1.91 005 | 2.949 4524 | 1.92 335 | 2.980 1046 | 1.93 697 | 3.011 7436 | 1.95 088 |
| 42 | 2.920 2235 | 1.91 027 | 2.949 9555 | 1.92 358 | 2.980 6237 | 1.93 720 | 3.012 2796 | 1.95 112 |
| 43 | 2.920 7116 | 1.91 049 | 2.950 4588 | 1.92 380 | 2.981 1431 | 1.93 743 | 3.012 8159 | 1.95 135 |
| 44 | 2.921 2000 | 1.91 071 | 2.950 9624 | 1.92 403 | 2.981 6627 | 1.93 766 | 3.013 3524 | 1.95 159 |
| 45 | 2.921 6886 | 1.91 093 | 2.951 4663 | 1.92 425 | 2.982 1826 | 1.93 789 | 3.013 8893 | 1.95 182 |
| 46 | 2.922 1775 | 1.91 115 | 2.951 9704 | 1.92 448 | 2.982 7028 | 1.93 812 | 3.014 4264 | 1.95 205 |
| 47 | 2.922 6666 | 1.91 137 | 2.952 4747 | 1.92 470 | 2.983 2233 | 1.93 835 | 3.014 9639 | 1.95 229 |
| 48 | 2.923 1560 | 1.91 159 | 2.952 9793 | 1.92 493 | 2.983 7440 | 1.93 858 | 3 015 5016 | 1.95 252 |
| 49 | 2.923 6456 | 1.91 181 | 2.953 4842 | 1.92 515 | 2.984 2650 | 1.93 881 | 3.016 0396 | 1.95 276 |
| 50 | 2.924 1354 | 1.91 203 | 2.953 9894 | 1.92 538 | 2.984 7863 | 1.93 904 | 3.016 5779 | 1.95 299 |
| 51 | 2.924 6255 | 1.91 225 | 2.954 4948 | 1.92 560 | 2.985 3078 | 1.93 927 | 3 017 1165 | 1.95 323 |
| 52 | 2.925 1159 | 1.91 247 | 2.955 0005 | 1.92 583 | 2.985 8297 | 1.93 950 | 3.017 6554 | 1.95 346 |
| 53 | 2.925 6065 | 1.91 269 | 2.955 5064 | 1.92 605 | 2.986 3518 | 1.93 973 | 3.018 1946 | 1.95 370 |
| 54 | 2.926 0974 | 1.91 291 | 2.956 0126 | 1.92 628 | 2.986 8742 | 1.93 996 | 3.018 7341 | 1.95 393 |
| 55 | 2.926 5885 | 1.91 313 | 2.956 5191 | 1.92 651 | 2.987 3968 | 1.94 020 | 3.019 2738 | 1.95 417 |
| 56 | 2.927 0798 | 1.91 335 | 2.957 0258 | 1.92 673 | 2.987 9198 | 1.94 043 | 3.019 8139 | 1.95 441 |
| 57 | 2.927 5714 | 1.91 357 | 2.957 5328 | 1.92 696 | 2.988 4430 | 1.94 066 | 3.020 3543 | 1.95 464 |
| 58 | 2.928 0633 | 1.91 379 | 2.958 0401 | 1.92 718 | 2.988 9665 | 1.94 089 | 3.020 8949 | 1.95 488 |
| 59 | 2.928 5554 | 1.91 401 | 2.958 5476 | 1.92 741 | 2.989 4903 | 1.94 112 | 3.021 4359 | 1.95 511 |
| 60 | 2.929 0477 | 1.91 423 | 2.959 0554 | 1.92 764 | 2.990 0143 | 1.94 135 | 3.021 9771 | 1.95 535 |

# Tafel V.

| $v$ | 144° log $M$ | 144° log Diff. 1″ | 145° log $M$ | 145° log Diff. 1″ | 146° log $M$ | 146° log Diff. 1″ | 147° log $M$ | 147° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 3.021 9771 | 1.95 535 | 3.055 0004 | 1.96 969 | 3.089 1456 | 1.98 438 | 3.124 4793 | 1.99 941 |
| 1 | 3.022 5186 | 1.95 559 | 3.055 5601 | 1.96 993 | 3.089 7245 | 1.98 463 | 3.125 0787 | 1.99 966 |
| 2 | 3.023 0605 | 1.95 582 | 3.056 1201 | 1.97 018 | 3.090 3038 | 1.98 487 | 3.125 6784 | 1.99 991 |
| 3 | 3.023 6026 | 1.95 606 | 3.056 6805 | 1.97 042 | 3.090 8835 | 1.98 512 | 3.126 2785 | 2.00 017 |
| 4 | 3.024 1450 | 1.95 630 | 3.057 2411 | 1.97 066 | 3.091 4634 | 1.98 537 | 3.126 8789 | 2.00 042 |
| 5 | 30.24 6877 | 1.95 653 | 3.057 8021 | 1.97 091 | 3.092 0437 | 1.98 561 | 3.127 4796 | 2.00 068 |
| 6 | 3.025 2307 | 1.95 677 | 3.058 3634 | 1.97 115 | 3.092 6243 | 1.98 586 | 3.128 0808 | 2.00 093 |
| 7 | 3.025 7740 | 1.95 701 | 3.058 9249 | 1.97 139 | 3.093 2052 | 1.98 611 | 3.128 6822 | 2.00 119 |
| 8 | 3.026 3176 | 1.95 724 | 3.059 4868 | 1.97 164 | 3.093 7865 | 1.98 635 | 3.129 2841 | 2.00 144 |
| 9 | 3.026 8615 | 1.95 748 | 3.060 0491 | 1.97 188 | 3.094 3682 | 1.98 660 | 3.129 8863 | 2.00 170 |
| 10 | 3.027 4057 | 1.95 772 | 3.060 6116 | 1.97 212 | 3.094 9501 | 1.98 685 | 3.130 4888 | 2.00 195 |
| 11 | 3.027 9502 | 1.95 796 | 3.061 1744 | 1.97 236 | 3.095 5324 | 1.98 710 | 3.131 0917 | 2.00 221 |
| 12 | 3.028 4950 | 1.95 819 | 3.061 7376 | 1.97 261 | 3.096 1150 | 1.98 735 | 3.131 6948 | 2.00 246 |
| 13 | 3.029 0401 | 1.95 843 | 3.062 3011 | 1.97 285 | 3.096 6979 | 1.98 760 | 3.132 2985 | 2.00 272 |
| 14 | 3.029 5855 | 1.95 867 | 3.062 8649 | 1.97 309 | 3.097 2812 | 1.98 785 | 3.132 9025 | 2.00 297 |
| 15 | 3.030 1312 | 1.95 891 | 3.063 4290 | 1.97 334 | 3.097 8648 | 1.98 809 | 3.133 5068 | 2.00 323 |
| 16 | 3.030 6772 | 1.95 915 | 3.063 9934 | 1.97 358 | 3.098 4488 | 1.98 834 | 3.134 1115 | 2.00 349 |
| 17 | 3.031 2235 | 1.95 938 | 3.064 5582 | 1.97 382 | 3.099 0331 | 1.98 859 | 3.134 7165 | 2.00 374 |
| 18 | 3.031 7700 | 1.95 962 | 3.065 1232 | 1.97 407 | 3.099 6177 | 1.98 884 | 3.135 3219 | 2.00 400 |
| 19 | 3.032 3169 | 1.95 986 | 3.065 6886 | 1.97 431 | 3.100 2027 | 1.98 909 | 3.135 9276 | 2.00 425 |
| 20 | 3.032 8641 | 1.96 010 | 3.066 2543 | 1.97 455 | 3.100 7880 | 1.98 934 | 3.136 5337 | 2.00 451 |
| 21 | 3.033 4116 | 1.96 034 | 3.066 8203 | 1.97 479 | 3.101 3736 | 1.98 959 | 3.137 1401 | 2.00 477 |
| 22 | 3.033 9594 | 1.96 057 | 3.067 3866 | 1.97 504 | 3.101 9596 | 1.98 984 | 3.137 7469 | 2.00 502 |
| 23 | 3.034 5074 | 1.96 081 | 3.067 9533 | 1.97 528 | 3.102 5459 | 1.99 009 | 3.138 3541 | 2.00 528 |
| 24 | 3.035 0558 | 1.96 105 | 3.068 5202 | 1.97 553 | 3.103 1325 | 1.99 034 | 3.138 9616 | 2.00 554 |
| 25 | 3.035 6045 | 1.96 129 | 3.069 0875 | 1.97 577 | 3.103 7195 | 1.99 060 | 3.139 5695 | 2.00 579 |
| 26 | 3.036 1535 | 1.96 153 | 3.069 6551 | 1.97 601 | 3.104 3068 | 1.99 085 | 3.140 1777 | 2.00 605 |
| 27 | 3.036 7028 | 1.96 176 | 3.070 2230 | 1.97 626 | 3.104 8945 | 1.99 110 | 3.140 7863 | 2.00 631 |
| 28 | 3.037 2524 | 1.96 200 | 3.070 7913 | 1.97 650 | 3.105 4824 | 1.99 135 | 3.141 3953 | 2.00 656 |
| 29 | 3.037 8023 | 1.96 224 | 3.071 3598 | 1.97 675 | 3.106 0708 | 1.99 160 | 3.142 0046 | 2.00 682 |
| 30 | 3.038 3525 | 1.96 248 | 3.071 9287 | 1.97 699 | 3.106 6595 | 1.99 185 | 3.142 6143 | 2.00 708 |
| 31 | 3.038 9030 | 1.96 272 | 3.072 4979 | 1.97 724 | 3.107 2485 | 1.99 210 | 3.143 2243 | 2.00 734 |
| 32 | 3.039 4538 | 1.96 296 | 3.073 0674 | 1.97 748 | 3.107 8378 | 1.99 235 | 3.143 8347 | 2.00 759 |
| 33 | 3.040 0049 | 1.96 320 | 3.073 6373 | 1.97 773 | 3.108 4275 | 1.99 260 | 3.144 4455 | 2.00 785 |
| 34 | 3.040 5563 | 1.96 344 | 3.074 2074 | 1.97 798 | 3.109 0176 | 1.99 285 | 3.145 0566 | 2.00 811 |
| 35 | 3.041 1080 | 1.96 368 | 3.074 7779 | 1.97 822 | 3.109 6080 | 1.99 311 | 3.145 6681 | 2.00 836 |
| 36 | 3.041 6600 | 1.96 392 | 3.075 3487 | 1.97 847 | 3.110 1987 | 1.99 336 | 3.146 2799 | 2.00 862 |
| 37 | 3.042 2123 | 1.96 416 | 3.075 9198 | 1.97 871 | 3.110 7897 | 1.99 361 | 3.146 8921 | 2.00 888 |
| 38 | 3.042 7649 | 1.96 440 | 3.076 4913 | 1.97 896 | 3.111 3811 | 1.99 386 | 3.147 5047 | 2.00 913 |
| 39 | 3.043 3179 | 1.96 464 | 3.077 0631 | 1.97 920 | 3.111 9729 | 1.99 411 | 3.148 1177 | 2.00 939 |
| 40 | 3.043 8711 | 1.96 488 | 3.077 6352 | 1.97 945 | 3.112 5650 | 1.99 436 | 3.148 7310 | 2.00 965 |
| 41 | 3.044 4246 | 1.96 512 | 3.078 2076 | 1.97 969 | 3.113 1574 | 1.99 461 | 3.149 3446 | 2.00 991 |
| 42 | 3.044 9785 | 1.96 536 | 3.078 7803 | 1.97 994 | 3.113 7502 | 1.99 487 | 3.149 9587 | 2.01 017 |
| 43 | 3.045 5326 | 1.96 560 | 3.079 3534 | 1.98 018 | 3.114 3433 | 1.99 512 | 3.150 5731 | 2.01 043 |
| 44 | 3.046 0871 | 1.96 584 | 3.079 9268 | 1.98 043 | 3.114 9368 | 1.99 537 | 3.151 1878 | 2.01 069 |
| 45 | 3.046 6419 | 1.96 608 | 3.080 5005 | 1.98 068 | 3.115 5306 | 1.99 562 | 3.151 8029 | 2.01 094 |
| 46 | 3.047 1969 | 1.96 632 | 3.081 0746 | 1.98 092 | 3.116 1247 | 1.99 587 | 3.152 4184 | 2.01 120 |
| 47 | 3.047 7523 | 1.96 656 | 3.081 6490 | 1.98 117 | 3.116 7192 | 1.99 612 | 3.153 0343 | 2.01 146 |
| 48 | 3.048 3080 | 1.96 680 | 3.082 2237 | 1.98 141 | 3.117 3141 | 1.99 638 | 3.153 6505 | 2.01 172 |
| 49 | 3.048 8640 | 1.96 704 | 3.082 7987 | 1.98 166 | 3.117 9093 | 1.99 663 | 3.154 2671 | 2.01 198 |
| 50 | 3.049 4203 | 1.96 728 | 3.083 3740 | 1.98 191 | 3.118 5048 | 1.99 688 | 3.154 8841 | 2.01 224 |
| 51 | 3.049 9769 | 1.96 752 | 3.083 9497 | 1.98 216 | 3.119 1007 | 1.99 713 | 3.155 5014 | 2.01 250 |
| 52 | 3.050 5338 | 1.96 776 | 3.084 5257 | 1.98 240 | 3.119 6969 | 1.99 739 | 3.156 1191 | 2.01 276 |
| 53 | 3.051 0911 | 1.96 800 | 3.085 1020 | 1.98 265 | 3.120 2935 | 1.99 764 | 3.156 7372 | 2.01 302 |
| 54 | 3.051 6486 | 1.96 824 | 3.085 6787 | 1.98 290 | 3.120 8904 | 1.99 789 | 3.157 3556 | 2.01 328 |
| 55 | 3.052 2065 | 1.96 849 | 3.086 2557 | 1.98 314 | 3.121 4877 | 1.99 815 | 3.157 9745 | 2.01 354 |
| 56 | 3.052 7646 | 1.96 873 | 3.086 8330 | 1.98 339 | 3.122 0853 | 1.99 840 | 3.158 5936 | 2.01 380 |
| 57 | 3.053 3231 | 1.96 897 | 3.087 4106 | 1.98 364 | 3.122 6833 | 1.99 865 | 3.159 2132 | 2.01 406 |
| 58 | 3.053 8819 | 1.96 921 | 3.087 9886 | 1.98 389 | 3.123 2816 | 1.99 891 | 3.159 8331 | 2.01 432 |
| 59 | 3.054 4410 | 1.96 945 | 3.088 5669 | 1.98 413 | 3.123 8803 | 1.99 916 | 3.160 4534 | 2.01 458 |
| 60 | 3.055 0004 | 1.96 969 | 3.089 1456 | 1.98 438 | 3.124 4793 | 1.99 941 | 3.161 0741 | 2.01 484 |

# Tafel V.

| v | 148° | | 149° | | 150° | | 151° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 3.161 0741 | 2.01 484 | 3.199 0090 | 2.03 065 | 3.238 3707 | 2.04 691 | 3.279 2543 | 2.06 361 |
| 1 | 3.161 6951 | 2.01 510 | 3.199 6531 | 2.03 092 | 3.239 0394 | 2.04 718 | 3.279 9491 | 2.06 389 |
| 2 | 3.162 3165 | 2.01 536 | 3.200 2976 | 2.03 119 | 3.239 7084 | 2.04 746 | 3.280 6445 | 2.06 418 |
| 3 | 3.162 9383 | 2.01 562 | 3.200 9425 | 2.03 145 | 3.240 3779 | 2.04 773 | 3.281 3403 | 2.06 446 |
| 4 | 3.163 5605 | 2.01 588 | 3.201 5877 | 2.03 172 | 3.241 0478 | 2.04 801 | 3.282 0365 | 2.06 474 |
| 5 | 3.164 1830 | 2.01 614 | 3.202 2334 | 2.03 199 | 3.241 7182 | 2.04 828 | 3.282 7331 | 2.06 503 |
| 6 | 3.164 8059 | 2.01 640 | 3.202 8795 | 2.03 226 | 3.242 3889 | 2.04 856 | 3.283 4303 | 2.06 531 |
| 7 | 3.165 4292 | 2.01 666 | 3.203 5259 | 2.03 253 | 3.243 0601 | 2.04 883 | 3.284 1279 | 2.06 559 |
| 8 | 3.166 0528 | 2.01 692 | 3.204 1728 | 2.03 279 | 3.243 7317 | 2.04 911 | 3.284 8259 | 2.06 587 |
| 9 | 3.166 6768 | 2.01 718 | 3.204 8201 | 2.03 306 | 3.244 4038 | 2.04 938 | 3.285 5244 | 2.06 616 |
| 10 | 3.167 3012 | 2.01 744 | 3.205 4678 | 2.03 333 | 3.245 0763 | 2.04 966 | 3.286 2234 | 2.06 644 |
| 11 | 3.167 9260 | 2.01 770 | 3.206 1158 | 2.03 360 | 3.245 7492 | 2.04 994 | 3.286 9228 | 2.06 672 |
| 12 | 3.168 5512 | 2.01 797 | 3.206 7643 | 2.03 387 | 3.246 4225 | 2.05 021 | 3.287 6226 | 2.06 701 |
| 13 | 3.169 1767 | 2.01 823 | 3.207 4132 | 2.03 414 | 3.247 0962 | 2.05 049 | 3.288 3230 | 2.06 729 |
| 14 | 3.169 8026 | 2.01 849 | 3.208 0624 | 2.03 441 | 3.247 7704 | 2.05 077 | 3.289 0238 | 2.06 758 |
| 15 | 3.170 4289 | 2.01 875 | 3.208 7121 | 2.03 468 | 3.248 4450 | 2.05 104 | 3.289 7250 | 2.06 786 |
| 16 | 3.171 0556 | 2.01 901 | 3.209 3622 | 2.03 495 | 3.249 1201 | 2.05 132 | 3.290 4267 | 2.06 814 |
| 17 | 3.171 6826 | 2.01 928 | 3.210 0127 | 2.03 522 | 3.249 7955 | 2.05 159 | 3.291 1289 | 2.06 843 |
| 18 | 3.172 3100 | 2.01 954 | 3.210 6636 | 2.03 549 | 3.250 4714 | 2.05 187 | 3.291 8315 | 2.06 871 |
| 19 | 3.172 9378 | 2.01 980 | 3.211 3149 | 2.03 576 | 3.251 1478 | 2.05 214 | 3.292 5346 | 2.06 900 |
| 20 | 3.173 5660 | 2.02 006 | 3.211 9665 | 2.03 603 | 3.251 8245 | 2.05 242 | 3.293 2381 | 2.06 929 |
| 21 | 3.174 1946 | 2.02 032 | 3.212 6186 | 2.03 630 | 3.252 5017 | 2.05 270 | 3.293 9421 | 2.06 957 |
| 22 | 3.174 8235 | 2.02 059 | 3.213 2711 | 2.03 657 | 3.253 1793 | 2.05 297 | 3.294 6466 | 2.06 986 |
| 23 | 3.175 4528 | 2.02 085 | 3.213 9240 | 2.03 684 | 3.253 8574 | 2.05 325 | 3.295 3515 | 2.07 014 |
| 24 | 3.176 0825 | 2.02 111 | 3.214 5774 | 2.03 711 | 3.254 5359 | 2.05 353 | 3.296 0569 | 2.07 043 |
| 25 | 3.176 7126 | 2.02 138 | 3.215 2311 | 2.03 738 | 3.255 2148 | 2.05 381 | 3.296 7628 | 2.07 0[illegible]2 |
| 26 | 3.177 3431 | 2.02 164 | 3.215 8852 | 2.03 765 | 3.255 8942 | 2.05 409 | 3.297 4691 | 2.07 100 |
| 27 | 3.177 9739 | 2.02 190 | 3.216 5397 | 2.03 792 | 3.256 5740 | 2.05 437 | 3.298 1759 | 2.07 129 |
| 28 | 3.178 6052 | 2.02 217 | 3.217 1947 | 2.03 819 | 3.257 2542 | 2.05 464 | 3.298 8832 | 2.07 157 |
| 29 | 3.179 2368 | 2.02 243 | 3.217 8500 | 2.03 846 | 3.257 9349 | 2.05 492 | 3.299 5909 | 2.07 186 |
| 30 | 3.179 8688 | 2.02 269 | 3.218 5058 | 2.03 873 | 3.258 6160 | 2.05 520 | 3.300 2991 | 2.07 214 |
| 31 | 3.180 5012 | 2.02 295 | 3.219 1620 | 2.03 900 | 3.259 2975 | 2.05 548 | 3.301 0077 | 2.07 243 |
| 32 | 3.181 1339 | 2.02 322 | 3.219 8185 | 2.03 927 | 3.259 9795 | 2.05 576 | 3.301 7169 | 2.07 271 |
| 33 | 3.181 7671 | 2.02 348 | 3.220 4755 | 2.03 954 | 3.260 6619 | 2.05 604 | 3.302 4265 | 2.07 300 |
| 34 | 3.182 4006 | 2.02 374 | 3.221 1329 | 2.03 981 | 3.261 3447 | 2.05 632 | 3.303 1365 | 2.07 329 |
| 35 | 3.183 0345 | 2.02 401 | 3.221 7907 | 2.04 009 | 3.262 0280 | 2.05 659 | 3.303 8470 | 2.07 358 |
| 36 | 3.183 6688 | 2.02 427 | 3.222 4489 | 2.04 036 | 3.262 7118 | 2.05 687 | 3.304 5580 | 2.07 387 |
| 37 | 3.184 3035 | 2.02 454 | 3.223 1076 | 2.04 063 | 3.263 3959 | 2.05 715 | 3.305 2695 | 2.07 416 |
| 38 | 3.184 9386 | 2.02 480 | 3.223 7666 | 2.04 090 | 3.264 0805 | 2.05 743 | 3.305 9814 | 2.07 444 |
| 39 | 3.185 5741 | 2.02 506 | 3.224 4261 | 2.04 117 | 3.264 7656 | 2.05 771 | 3.306 6939 | 2.07 473 |
| 40 | 3.186 2099 | 2.02 533 | 3.225 0859 | 2.04 144 | 3.265 4511 | 2.05 799 | 3.307 4068 | 2.07 502 |
| 41 | 3.186 8462 | 2.02 560 | 3.225 7462 | 2.04 171 | 3.266 1370 | 2.05 827 | 3.308 1201 | 2.07 531 |
| 42 | 3.187 4828 | 2.02 586 | 3.226 4069 | 2.04 199 | 3.266 8234 | 2.05 855 | 3.308 8339 | 2.07 560 |
| 43 | 3.188 1198 | 2.02 613 | 3.227 0680 | 2.04 226 | 3.267 5102 | 2.05 883 | 3.309 5482 | 2.07 588 |
| 44 | 3.188 7572 | 2.02 639 | 3.227 7295 | 2.04 253 | 3.268 1975 | 2.05 911 | 3.310 2630 | 2.07 617 |
| 45 | 3.189 3950 | 2.02 666 | 3.228 3915 | 2.04 280 | 3.268 8852 | 2.05 939 | 3.310 9783 | 2.07 646 |
| 46 | 3.190 0332 | 2.02 692 | 3.229 0538 | 2.04 307 | 3.269 5733 | 2.05 967 | 3.311 6940 | 2.07 675 |
| 47 | 3.190 6718 | 2.02 719 | 3.229 7166 | 2.04 334 | 3.270 2619 | 2.05 995 | 3.312 4102 | 2.07 704 |
| 48 | 3.191 3108 | 2.02 746 | 3.230 3798 | 2.04 362 | 3.270 9509 | 2.06 023 | 3.313 1269 | 2.07 732 |
| 49 | 3.191 9501 | 2.02 772 | 3.231 0434 | 2.04 389 | 3.271 6404 | 2.06 051 | 3.313 8440 | 2.07 761 |
| 50 | 3.192 5899 | 2.02 799 | 3.231 7074 | 2.04 416 | 3.272 3304 | 2.06 079 | 3.314 5617 | 2.07 790 |
| 51 | 3.193 2300 | 2.02 826 | 3.232 3719 | 2.04 443 | 3.273 0207 | 2.06 107 | 3.315 2798 | 2.07 819 |
| 52 | 3.193 8706 | 2.02 852 | 3.233 0367 | 2.04 471 | 3.273 7115 | 2.06 136 | 3.315 9984 | 2.07 848 |
| 53 | 3.194 5115 | 2.02 879 | 3.233 7020 | 2.04 498 | 3.274 4028 | 2.06 164 | 3.316 7175 | 2.07 8[illegible] |
| 54 | 3.195 1528 | 2.02 906 | 3.234 3677 | 2.04 526 | 3.275 0945 | 2.06 192 | 3.317 4370 | 2.07 906 |
| 55 | 3.195 7945 | 2.02 932 | 3.235 0338 | 2.04 553 | 3.275 7867 | 2.06 220 | 3.318 1571 | 2.07 935 |
| 56 | 3.196 4366 | 2.02 959 | 3.235 7004 | 2.04 581 | 3.276 4793 | 2.06 248 | 3.318 8776 | 2.07 964 |
| 57 | 3.197 0791 | 2.02 985 | 3.236 3673 | 2.04 608 | 3.277 1724 | 2.06 277 | 3.319 5986 | 2.07 993 |
| 58 | 3.197 7220 | 2.03 012 | 3.237 0347 | 2.04 636 | 3.277 8659 | 2.06 305 | 3.320 3200 | 2.08 022 |
| 59 | 3.198 3653 | 2.03 038 | 3.237 7025 | 2.04 663 | 3.278 5599 | 2.06 333 | 3.321 0420 | 2.08 051 |
| 60 | 3.199 0090 | 2.03 065 | 3.238 3707 | 2.04 691 | 3.279 2543 | 2.06 361 | 3.321 7644 | 2.08 080 |

# Tafel V.

| v | 152° | | 153° | | 154° | | 155° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 3.321 7644 | 2.08 080 | 3.366 0171 | 2.09 851 | 3.412 1407 | 2.11 677 | 3.460 2787 | 2.13 563 |
| 1 | 3.322 4874 | 2.08 109 | 3.366 7701 | 2.09 881 | 3.412 9261 | 2.11 708 | 3.461 0989 | 2.13 595 |
| 2 | 3.323 2108 | 2.08 138 | 3.367 5236 | 2.09 911 | 3.413 7120 | 2.11 739 | 3.461 9198 | 2.13 627 |
| 3 | 3.323 9347 | 2.08 167 | 3.368 2777 | 2.09 941 | 3.414 4985 | 2.11 770 | 3.462 7413 | 2.13 659 |
| 4 | 3.324 6591 | 2.08 196 | 3.369 0323 | 2.09 971 | 3.415 2856 | 2.11 801 | 3.463 5633 | 2.13 691 |
| 5 | 3.325 3839 | 2.08 226 | 3.369 7874 | 2.10 001 | 3.416 0732 | 2.11 832 | 3.464 3860 | 2.13 724 |
| 6 | 3.326 1093 | 2.08 255 | 3.370 5430 | 2.10 031 | 3.416 8613 | 2.11 863 | 3.465 2093 | 2.13 756 |
| 7 | 3.326 8351 | 2.08 284 | 3.371 2991 | 2.10 061 | 3.417 6501 | 2.11 894 | 3.466 0332 | 2.13 788 |
| 8 | 3.327 5614 | 2.08 313 | 3.372 0558 | 2.10 091 | 3.418 4394 | 2.11 925 | 3.466 8577 | 2.13 820 |
| 9 | 3.328 2883 | 2.08 342 | 3.372 8130 | 2.10 121 | 3.419 2293 | 2.11 956 | 3.467 6828 | 2.13 852 |
| 10 | 3.329 0156 | 2.08 371 | 3.373 5707 | 2.10 151 | 3.420 0197 | 2.11 987 | 3.468 5085 | 2.13 884 |
| 11 | 3.329 7434 | 2.08 400 | 3.374 3290 | 2.10 181 | 3.420 8107 | 2.12 018 | 3.469 3349 | 2.13 916 |
| 12 | 3.330 4716 | 2.08 430 | 3.375 0877 | 2.10 212 | 3.421 6023 | 2.12 050 | 3.470 1618 | 2.13 948 |
| 13 | 3.331 2004 | 2.08 459 | 3.375 8470 | 2.10 242 | 3.422 3944 | 2.12 081 | 3.470 9894 | 2.13 981 |
| 14 | 3.331 9297 | 2.08 488 | 3.376 6069 | 2.10 272 | 3.423 1871 | 2.12 112 | 3.471 8175 | 2.14 013 |
| 15 | 3.332 6595 | 2.08 517 | 3.377 3672 | 2.10 302 | 3.423 9804 | 2.12 143 | 3.472 6463 | 2.14 045 |
| 16 | 3.333 3897 | 2.08 547 | 3.378 1281 | 2.10 333 | 3.424 7742 | 2.12 174 | 3.473 4757 | 2.14 077 |
| 17 | 3.334 1204 | 2.08 576 | 3.378 8895 | 2.10 363 | 3.425 5686 | 2.12 206 | 3.474 3057 | 2.14 109 |
| 18 | 3.334 8517 | 2.08 605 | 3.379 6515 | 2.10 393 | 3.426 3636 | 2.12 237 | 3.475 1364 | 2.14 142 |
| 19 | 3.335 5834 | 2.08 635 | 3.380 4140 | 2.10 423 | 3.427 1592 | 2.12 268 | 3.475 9676 | 2.14 174 |
| 20 | 3.336 3156 | 2.08 664 | 3.381 1770 | 2.10 453 | 3.427 9553 | 2.12 299 | 3.476 7995 | 2.14 206 |
| 21 | 3.337 0484 | 2.08 693 | 3.381 9405 | 2.10 483 | 3.428 7520 | 2.12 330 | 3.477 6320 | 2.14 238 |
| 22 | 3.337 7816 | 2.08 723 | 3.382 7046 | 2.10 514 | 3.429 5493 | 2.12 362 | 3.478 4651 | 2.14 271 |
| 23 | 3.338 5153 | 2.08 752 | 3.383 4692 | 2.10 544 | 3.430 3472 | 2.12 393 | 3.479 2989 | 2.14 303 |
| 24 | 3.339 2495 | 2.08 782 | 3.384 2343 | 2.10 575 | 3.431 1456 | 2.12 424 | 3.480 1332 | 2.14 336 |
| 25 | 3.339 9842 | 2.08 811 | 3.385 0000 | 2.10 605 | 3.431 9446 | 2.12 456 | 3.480 9682 | 2.14 368 |
| 26 | 3.340 7194 | 2.08 841 | 3.385 7662 | 2.10 635 | 3.432 7442 | 2.12 487 | 3.481 8038 | 2.14 401 |
| 27 | 3.341 4551 | 2.08 870 | 3.386 5329 | 2.10 666 | 3.433 5443 | 2.12 518 | 3.482 6400 | 2.14 433 |
| 28 | 3.342 1913 | 2.08 900 | 3.387 3002 | 2.10 696 | 3.434 3451 | 2.12 550 | 3.483 4769 | 2.14 466 |
| 29 | 3.342 9280 | 2.08 929 | 3.388 0681 | 2.10 727 | 3.435 1464 | 2.12 581 | 3.484 3144 | 2.14 498 |
| 30 | 3.343 6652 | 2.08 959 | 3.388 8364 | 2.10 757 | 3.435 9483 | 2.12 612 | 3.485 1525 | 2.14 531 |
| 31 | 3.344 4029 | 2.08 989 | 3.389 6053 | 2.10 787 | 3.436 7508 | 2.12 643 | 3.485 9912 | 2.14 564 |
| 32 | 3.345 1411 | 2.09 018 | 3.390 3747 | 2.10 818 | 3.437 5538 | 2.12 675 | 3.486 8306 | 2.14 596 |
| 33 | 3.345 8798 | 2.09 048 | 3.391 1447 | 2.10 848 | 3.438 3575 | 2.12 706 | 3.487 6706 | 2.14 629 |
| 34 | 3.346 6191 | 2.09 077 | 3.391 9152 | 2.10 879 | 3.439 1617 | 2.12 738 | 3.488 5112 | 2.14 661 |
| 35 | 3.347 3588 | 2.09 107 | 3.392 6863 | 2.10 909 | 3.439 9665 | 2.12 770 | 3.489 3525 | 2.14 694 |
| 36 | 3.348 0990 | 2.09 136 | 3.393 4579 | 2.10 940 | 3.440 7719 | 2.12 801 | 3.490 1944 | 2.14 727 |
| 37 | 3.348 8397 | 2.09 166 | 3.394 2300 | 2.10 970 | 3.441 5779 | 2.12 833 | 3.491 0369 | 2.14 759 |
| 38 | 3.349 5809 | 2.09 195 | 3.395 0027 | 2.11 001 | 3.442 3845 | 2.12 864 | 3.491 8800 | 2.14 792 |
| 39 | 3.350 3227 | 2.09 225 | 3.395 7760 | 2.11 031 | 3.443 1916 | 2.12 896 | 3.492 7238 | 2.14 824 |
| 40 | 3.351 0649 | 2.09 254 | 3.396 5497 | 2.11 062 | 3.443 9993 | 2.12 928 | 3.493 5682 | 2.14 857 |
| 41 | 3.351 8077 | 2.09 284 | 3.397 3240 | 2.11 093 | 3.444 8077 | 2.12 959 | 3.494 4133 | 2.14 890 |
| 42 | 3.352 5509 | 2.09 314 | 3.398 0989 | 2.11 123 | 3.445 6166 | 2.12 991 | 3.495 2590 | 2.14 922 |
| 43 | 3.353 2947 | 2.09 344 | 3.398 8743 | 2.11 154 | 3.446 4261 | 2.13 023 | 3.496 1053 | 2.14 955 |
| 44 | 3.354 0390 | 2.09 374 | 3.399 6503 | 2.11 184 | 3.447 2362 | 2.13 055 | 3.496 9523 | 2.14 988 |
| 45 | 3.354 7838 | 2.09 403 | 3.400 4268 | 2.11 215 | 3.448 0469 | 2.13 086 | 3.497 7999 | 2.15 021 |
| 46 | 3.355 5290 | 2.09 433 | 3.401 2039 | 2.11 246 | 3.448 8582 | 2.13 118 | 3.498 6482 | 2.15 054 |
| 47 | 3.356 2748 | 2.09 463 | 3.401 9815 | 2.11 276 | 3.449 6700 | 2.13 150 | 3.499 4971 | 2.15 087 |
| 48 | 3.357 0212 | 2.09 493 | 3.402 7596 | 2.11 307 | 3.450 4825 | 2.13 182 | 3.500 3466 | 2.15 119 |
| 49 | 3.357 7680 | 2.09 522 | 3.403 5383 | 2.11 337 | 3.451 2956 | 2.13 213 | 3.501 1968 | 2.15 152 |
| 50 | 3.358 5153 | 2.09 552 | 3.404 3176 | 2.11 368 | 3.452 1092 | 2.13 245 | 3.502 0476 | 2.15 185 |
| 51 | 3.359 2632 | 2.09 582 | 3.405 0974 | 2.11 399 | 3.452 9235 | 2.13 277 | 3.502 8991 | 2.15 218 |
| 52 | 3.360 0115 | 2.09 612 | 3.405 8778 | 2.11 430 | 3.453 7383 | 2.13 308 | 3.503 7512 | 2.15 251 |
| 53 | 3.360 7604 | 2.09 642 | 3.406 6587 | 2.11 461 | 3.454 5538 | 2.13 340 | 3.504 6040 | 2.15 284 |
| 54 | 3.361 5098 | 2.09 672 | 3.407 4402 | 2.11 492 | 3.455 3698 | 2.13 372 | 3.505 4574 | 2.15 317 |
| 55 | 3.362 2597 | 2.09 701 | 3.408 2222 | 2.11 522 | 3.456 1865 | 2.13 404 | 3.506 3115 | 2.15 351 |
| 56 | 3.363 0102 | 2.09 731 | 3.409 0048 | 2.11 553 | 3.457 0037 | 2.13 436 | 3.507 1662 | 2.15 384 |
| 57 | 3.363 7611 | 2.09 761 | 3.409 7879 | 2.11 584 | 3.457 8215 | 2.13 467 | 3.508 0215 | 2.15 417 |
| 58 | 3.364 5126 | 2.09 791 | 3.410 5716 | 2.11 615 | 3.458 6400 | 2.13 499 | 3.508 8775 | 2.15 450 |
| 59 | 3.365 2646 | 2.09 821 | 3.411 3559 | 2.11 646 | 3.459 4590 | 2.13 531 | 3.509 7342 | 2.15 483 |
| 60 | 3.366 0171 | 2.09 851 | 3.412 1407 | 2.11 677 | 3.460 2787 | 2.13 563 | 3.510 5915 | 2.15 516 |

# Tafel V.

| v | 156° | | 157° | | 158° | | 159° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff.1″ | log $M$ | log Diff.1″ | log $M$ | log Diff.1″ | log $M$ | log Diff.1″ |
| 0′ | 3.510 5915 | 2.15 516 | 3.563 2598 | 2.17 538 | 3.618 4877 | 2.19 638 | 3.676 5074 | 2.21 822 |
| 1 | 3.511 4495 | 2.15 549 | 3.564 1587 | 2.17 572 | 3.619 4311 | 2.19 674 | 3.677 4995 | 2.21 859 |
| 2 | 3.512 3081 | 2.15 582 | 3.565 0583 | 2.17 607 | 3.620 3753 | 2.19 710 | 3.678 4925 | 2.21 897 |
| 3 | 3.513 1674 | 2.15 615 | 3.565 9586 | 2.17 641 | 3.621 3203 | 2.19 745 | 3.679 4863 | 2.21 934 |
| 4 | 3.514 0273 | 2.15 648 | 3.566 8596 | 2.17 675 | 3.622 2660 | 2.19 781 | 3.680 4810 | 2.21 971 |
| 5 | 3.514 8879 | 2.15 682 | 3.567 7613 | 2.17 710 | 3.623 2126 | 2.19 817 | 3.681 4765 | 2.22 009 |
| 6 | 3.515 7492 | 2.15 715 | 3.568 6638 | 2.17 744 | 3.624 1599 | 2.19 853 | 3.682 4729 | 2.22 046 |
| 7 | 3.516 6111 | 2.15 748 | 3.569 5670 | 2.17 778 | 3.625 1080 | 2.19 888 | 3.683 4701 | 2.22 084 |
| 8 | 3.517 4737 | 2.15 781 | 3.570 4708 | 2.17 813 | 3.626 0569 | 2.19 924 | 3.684 4682 | 2.22 121 |
| 9 | 3.518 3369 | 2.15 814 | 3.571 3754 | 2.17 847 | 3.627 0065 | 2.19 960 | 3.685 4671 | 2.22 159 |
| 10 | 3.519 2008 | 2.15 847 | 3.572 2808 | 2.17 882 | 3.627 9570 | 2.19 996 | 3.686 4669 | 2.22 196 |
| 11 | 3.520 0654 | 2.15 880 | 3.573 1868 | 2.17 917 | 3.628 9082 | 2.20 032 | 3.687 4676 | 2.22 233 |
| 12 | 3.520 9306 | 2.15 914 | 3.574 0936 | 2.17 951 | 3.629 8603 | 2.20 068 | 3.688 4691 | 2.22 2[illegible]1 |
| 13 | 3.521 7965 | 2.15 947 | 3.575 0011 | 2.17 986 | 3.630 8131 | 2.20 104 | 3.689 4715 | 2.22 308 |
| 14 | 3.522 6630 | 2.15 980 | 3.575 9093 | 2.18 021 | 3.631 7667 | 2.20 140 | 3.690 4748 | 2.22 346 |
| 15 | 3.523 5302 | 2.16 014 | 3.576 8182 | 2.18 055 | 3.632 7211 | 2.20 176 | 3.691 4789 | 2.22 383 |
| 16 | 3.524 3981 | 2.16 047 | 3.577 7279 | 2.18 090 | 3.633 6763 | 2.20 212 | 3.692 4839 | 2.22 421 |
| 17 | 3.525 2667 | 2.16 081 | 3.578 6383 | 2.18 125 | 3.634 6323 | 2.20 248 | 3.693 4898 | 2.22 458 |
| 18 | 3.526 1359 | 2.16 114 | 3.579 5494 | 2.18 159 | 3.635 5890 | 2.20 284 | 3.694 4965 | 2.22 496 |
| 19 | 3.527 0058 | 2.16 148 | 3.580 4613 | 2.18 194 | 3.636 5466 | 2.20 320 | 3.695 5041 | 2.22 533 |
| 20 | 3.527 8763 | 2.16 181 | 3.581 3738 | 2.18 229 | 3.637 5050 | 2.20 356 | 3.696 5126 | 2.22 5[illegible]1 |
| 21 | 3.528 7475 | 2.16 214 | 3.582 2871 | 2.18 264 | 3.638 4642 | 2.20 392 | 3.697 5220 | 2.22 609 |
| 22 | 3.529 6195 | 2.16 248 | 3.583 2012 | 2.18 299 | 3.639 4241 | 2.20 429 | 3.698 5322 | 2.22 64[illegible] |
| 23 | 3.530 4921 | 2.16 281 | 3.584 1159 | 2.18 334 | 3.640 3849 | 2.20 465 | 3.699 5433 | 2.22 684 |
| 24 | 3.531 3653 | 2.16 315 | 3.585 0314 | 2.18 369 | 3.641 3465 | 2.20 501 | 3.700 5553 | 2.22 722 |
| 25 | 3.532 2393 | 2.16 349 | 3.585 9477 | 2.18 403 | 3.642 3088 | 2.20 538 | 3.701 5682 | 2.22 760 |
| 26 | 3.533 1139 | 2.16 382 | 3.586 8647 | 2.18 438 | 3.643 2720 | 2.20 574 | 3.702 5819 | 2.22 798 |
| 27 | 3.533 9891 | 2.16 416 | 3.587 7824 | 2.18 473 | 3.644 2360 | 2.20 610 | 3.703 5966 | 2.22 836 |
| 28 | 3.534 8651 | 2.16 449 | 3.588 7008 | 2.18 508 | 3.645 2008 | 2.20 647 | 3.704 6121 | 2.22 8[illegible]3 |
| 29 | 3.535 7418 | 2.16 483 | 3.589 6200 | 2.18 543 | 3.646 1664 | 2.20 683 | 3.705 6285 | 2.22 911 |
| 30 | 3.536 6191 | 2.16 517 | 3.590 5400 | 2.18 578 | 3.647 1328 | 2.20 719 | 3.706 6458 | 2.22 949 |
| 31 | 3.537 4971 | 2.16 551 | 3.591 4606 | 2.18 613 | 3.648 1000 | 2.20 755 | 3.707 6640 | 2.22 98[illegible] |
| 32 | 3.538 3758 | 2.16 584 | 3.592 3820 | 2.18 648 | 3.649 0680 | 2.20 792 | 3.708 6831 | 2.23 025 |
| 33 | 3.539 2551 | 2.16 618 | 3.593 3042 | 2.18 683 | 3.650 0369 | 2.20 828 | 3.709 7031 | 2.23 063 |
| 34 | 3.540 1352 | 2.16 652 | 3.594 2271 | 2.18 718 | 3.651 0065 | 2.20 865 | 3.710 7239 | 2.23 101 |
| 35 | 3.541 0159 | 2.16 686 | 3.595 1508 | 2.18 754 | 3.651 9770 | 2.20 901 | 3.711 7457 | 2.23 139 |
| 36 | 3.541 8973 | 2.16 720 | 3.596 0752 | 2.18 789 | 3.652 9483 | 2.20 938 | 3.712 7684 | 2.23 1[illegible] |
| 37 | 3.542 7794 | 2.16 753 | 3.597 0003 | 2.18 824 | 3.653 9204 | 2.20 974 | 3.713 7919 | 2.23 215 |
| 38 | 3.543 6622 | 2.16 787 | 3.597 9262 | 2.18 859 | 3.654 8933 | 2.21 011 | 3.714 8164 | 2.23 253 |
| 39 | 3.544 5457 | 2.16 821 | 3.598 8529 | 2.18 894 | 3.655 8671 | 2.21 047 | 3.715 8417 | 2.23 291 |
| 40 | 3.545 4299 | 2.16 855 | 3.599 7803 | 2.18 929 | 3.656 8416 | 2.21 084 | 3.716 8680 | 2.23 329 |
| 41 | 3.546 3148 | 2.16 889 | 3.600 7084 | 2.18 964 | 3.657 8170 | 2.21 121 | 3.717 8951 | 2.23 36[illegible] |
| 42 | 3.547 2003 | 2.16 923 | 3.601 6373 | 2.19 000 | 3.658 7932 | 2.21 157 | 3.718 9232 | 2.23 406 |
| 43 | 3.548 0866 | 2.16 957 | 3.602 5670 | 2.19 035 | 3.659 7703 | 2.21 194 | 3.719 9522 | 2.23 444 |
| 44 | 3.548 9735 | 2.16 991 | 3.603 4974 | 2.19 070 | 3.660 7481 | 2.21 231 | 3.720 9821 | 2.23 482 |
| 45 | 3.549 8612 | 2.17 025 | 3.604 4285 | 2.19 106 | 3.661 7268 | 2.21 268 | 3.722 0129 | 2.23 521 |
| 46 | 3.550 7495 | 2.17 059 | 3.605 3605 | 2.19 141 | 3.662 7063 | 2.21 305 | 3.723 0446 | 2.23 559 |
| 47 | 3.551 6385 | 2.17 094 | 3.606 2932 | 2.19 177 | 3.663 6867 | 2.21 341 | 3.724 0772 | 2.23 598 |
| 48 | 3.552 5283 | 2.17 128 | 3.607 2266 | 2.19 212 | 3.664 6679 | 2.21 378 | 3.725 1107 | 2.23 636 |
| 49 | 3.553 4187 | 2.17 162 | 3.608 1608 | 2.19 248 | 3.665 6499 | 2.21 415 | 3.726 1451 | 2.23 6[illegible]5 |
| 50 | 3.554 3098 | 2.17 196 | 3.609 0958 | 2.19 283 | 3.666 6327 | 2.21 452 | 3.727 1805 | 2.23 [illegible]13 |
| 51 | 3.555 2017 | 2.17 230 | 3.610 0315 | 2.19 318 | 3.667 6164 | 2.21 489 | 3.728 2168 | 2.23 [illegible]52 |
| 52 | 3.556 0942 | 2.17 265 | 3.610 9680 | 2.19 354 | 3.668 6010 | 2.21 526 | 3.729 2540 | 2.23 [illegible]90 |
| 53 | 3.556 9874 | 2.17 299 | 3.611 9053 | 2.19 389 | 3.669 5863 | 2.21 563 | 3.730 2921 | 2.23 829 |
| 54 | 3.557 8813 | 2.17 333 | 3.612 8433 | 2.19 425 | 3.670 5725 | 2.21 600 | 3.731 3311 | 2.23 868 |
| 55 | 3.558 7760 | 2.17 367 | 3.613 7821 | 2.19 460 | 3.671 5596 | 2.21 637 | 3.732 3711 | 2.23 906 |
| 56 | 3.559 6713 | 2.17 401 | 3.614 7217 | 2.19 496 | 3.672 5474 | 2.21 674 | 3.733 4120 | 2.23 945 |
| 57 | 3.560 5674 | 2.17 435 | 3.615 6620 | 2.19 531 | 3.673 5361 | 2.21 711 | 3.734 4538 | 2.23 984 |
| 58 | 3.561 4641 | 2.17 470 | 3.616 6031 | 2.19 567 | 3.674 5257 | 2.21 748 | 3.735 4966 | 2.24 023 |
| 59 | 3.562 3616 | 2.17 504 | 3.617 5450 | 2.19 602 | 3.675 5161 | 2.21 785 | 3.736 5403 | 2.24 061 |
| 60 | 3.563 2598 | 2.17 538 | 3.618 4877 | 2.19 638 | 3.676 5074 | 2.21 822 | 3.737 5849 | 2.24 100 |

# Tafel V.

| v | 160° log M | 160° log Diff. 1" | 161° log M | 161° log Diff. 1" | 162° log M | 162° log Diff. 1" | 163° log M | 163° log Diff. 1" |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0' | 3.737 5849 | 2.24 100 | 3.802 0262 | 2.26 480 | 3.870 1870 | 2.28 975 | 3.942 4830 | 2.31 597 |
| 1 | 3.738 6304 | 2.24 139 | 3.803 1307 | 2.26 521 | 3.871 3568 | 2.29 018 | 3.943 7257 | 2.31 642 |
| 2 | 3.739 6769 | 2.24 178 | 3.804 2362 | 2.26 561 | 3.872 5277 | 2.29 060 | 3.944 9696 | 2.31 686 |
| 3 | 3.740 7243 | 2.24 217 | 3.805 3427 | 2.26 602 | 3.873 6998 | 2.29 103 | 3.946 2148 | 2.31 731 |
| 4 | 3.741 7726 | 2.24 256 | 3.806 4503 | 2.26 643 | 3.874 8731 | 2.29 146 | 3.947 4613 | 2.31 776 |
| 5 | 3.742 8219 | 2.24 294 | 3.807 5590 | 2.26 683 | 3.876 0475 | 2.29 189 | 3.948 7091 | 2.31 821 |
| 6 | 3.743 8722 | 2.24 333 | 3.808 6686 | 2.26 724 | 3.877 2231 | 2.29 232 | 3.949 9582 | 2.31 866 |
| 7 | 3.744 9234 | 2.24 372 | 3.809 7793 | 2.26 765 | 3.878 3998 | 2.29 274 | 3.951 2086 | 2.31 911 |
| 8 | 3.745 9755 | 2.24 411 | 3.810 8910 | 2.26 806 | 3.879 5777 | 2.29 317 | 3.952 4603 | 2.31 957 |
| 9 | 3.747 0285 | 2.24 450 | 3.812 0038 | 2.26 846 | 3.880 7567 | 2.29 360 | 3.953 7133 | 2.32 002 |
| 10 | 3.748 0825 | 2.24 489 | 3.813 1177 | 2.26 887 | 3.881 9369 | 2.29 403 | 3.954 9676 | 2.32 047 |
| 11 | 3.749 1375 | 2.24 528 | 3.814 2326 | 2.26 928 | 3.883 1183 | 2.29 446 | 3.956 2232 | 2.32 093 |
| 12 | 3.750 1934 | 2.24 567 | 3.815 3485 | 2.26 969 | 3.884 3009 | 2.29 489 | 3.957 4801 | 2.32 138 |
| 13 | 3.751 2503 | 2.24 607 | 3.816 4655 | 2.27 010 | 3.885 4846 | 2.29 532 | 3.958 7384 | 2.32 183 |
| 14 | 3.752 3081 | 2.24 646 | 3.817 5835 | 2.27 051 | 3.886 6695 | 2.29 575 | 3.959 9979 | 2.32 229 |
| 15 | 3.753 3669 | 2.24 685 | 3.818 7026 | 2.27 093 | 3.887 8556 | 2.29 619 | 3.961 2588 | 2.32 275 |
| 16 | 3.754 4266 | 2.24 724 | 3.819 8228 | 2.27 134 | 3.889 0428 | 2.29 662 | 3.962 5210 | 2.32 320 |
| 17 | 3.755 4873 | 2.24 764 | 3.820 9440 | 2.27 175 | 3.890 2312 | 2.29 705 | 3.963 7845 | 2.32 366 |
| 18 | 3.756 5489 | 2.24 803 | 3.822 0663 | 2.27 216 | 3.891 4209 | 2.29 748 | 3.965 0493 | 2.32 411 |
| 19 | 3.757 6115 | 2.24 842 | 3.823 1897 | 2.27 257 | 3.892 6117 | 2.29 791 | 3.966 3155 | 2.32 457 |
| 20 | 3.758 6751 | 2.24 881 | 3.824 3141 | 2.27 298 | 3.893 8037 | 2.29 834 | 3.967 5830 | 2.32 502 |
| 21 | 3.759 7396 | 2.24 920 | 3.825 4395 | 2.27 340 | 3.894 9968 | 2.29 877 | 3.968 8518 | 2.32 548 |
| 22 | 3.760 8051 | 2.24 960 | 3.826 5661 | 2.27 381 | 3.896 1912 | 2.29 921 | 3.970 1220 | 2.32 594 |
| 23 | 3.761 8716 | 2.24 999 | 3.827 6937 | 2.27 422 | 3.897 3868 | 2.29 964 | 3.971 3935 | 2.32 639 |
| 24 | 3.762 9391 | 2.25 039 | 3.828 8224 | 2.27 464 | 3.898 5835 | 2.30 007 | 3.972 6663 | 2.32 685 |
| 25 | 3.764 0075 | 2.25 078 | 3.829 9522 | 2.27 505 | 3.899 7815 | 2.30 051 | 3.973 9405 | 2.32 731 |
| 26 | 3.765 0768 | 2.25 118 | 3.831 0831 | 2.27 547 | 3.900 9807 | 2.30 094 | 3.975 2161 | 2.32 777 |
| 27 | 3.766 1472 | 2.25 157 | 3.832 2150 | 2.27 588 | 3.902 1810 | 2.30 138 | 3.976 4930 | 2.32 823 |
| 28 | 3.767 2185 | 2.25 197 | 3.833 3480 | 2.27 630 | 3.903 3826 | 2.30 181 | 3.977 7712 | 2.32 869 |
| 29 | 3.768 2908 | 2.25 236 | 3.834 4821 | 2.27 671 | 3.904 5854 | 2.30 224 | 3.979 0508 | 2.32 915 |
| 30 | 3.769 3641 | 2.25 276 | 3.835 6173 | 2.27 713 | 3.905 7894 | 2.30 268 | 3.980 3318 | 2.32 961 |
| 31 | 3.770 4384 | 2.25 315 | 3.836 7535 | 2.27 755 | 3.906 9946 | 2.30 312 | 3.981 6141 | 2.33 008 |
| 32 | 3.771 5136 | 2.25 355 | 3.837 8909 | 2.27 797 | 3.908 2010 | 2.30 355 | 3.982 8977 | 2.33 054 |
| 33 | 3.772 5899 | 2.25 395 | 3.839 0294 | 2.27 838 | 3.909 4086 | 2.30 399 | 3.984 1828 | 2.33 100 |
| 34 | 3.773 6671 | 2.25 435 | 3.840 1689 | 2.27 880 | 3.910 6175 | 2.30 443 | 3.985 4692 | 2.33 147 |
| 35 | 3.774 7453 | 2.25 474 | 3.841 3095 | 2.27 922 | 3.911 8275 | 2.30 487 | 3.986 7570 | 2.33 193 |
| 36 | 3.775 8245 | 2.25 514 | 3.842 4513 | 2.27 963 | 3.913 0388 | 2.30 531 | 3.988 0461 | 2.33 239 |
| 37 | 3.776 9047 | 2.25 554 | 3.843 5941 | 2.28 005 | 3.914 2514 | 2.30 575 | 3.989 3367 | 2.33 286 |
| 38 | 3.777 9859 | 2.25 594 | 3.844 7380 | 2.28 047 | 3.915 4651 | 2.30 620 | 3.990 6286 | 2.33 332 |
| 39 | 3.779 0680 | 2.25 634 | 3.845 8831 | 2.28 088 | 3.916 6801 | 2.30 664 | 3.991 9219 | 2.33 379 |
| 40 | 3.780 1512 | 2.25 674 | 3.847 0292 | 2.28 130 | 3.917 8963 | 2.30 708 | 3.993 2166 | 2.33 425 |
| 41 | 3.781 2354 | 2.25 714 | 3.848 1764 | 2.28 172 | 3.919 1137 | 2.30 752 | 3.994 5126 | 2.33 472 |
| 42 | 3.782 3205 | 2.25 755 | 3.849 3248 | 2.28 214 | 3.920 3324 | 2.30 797 | 3.995 8101 | 2.33 518 |
| 43 | 3.783 4067 | 2.25 795 | 3.850 4743 | 2.28 256 | 3.921 5523 | 2.30 841 | 3.997 1089 | 2.33 565 |
| 44 | 3.784 4939 | 2.25 835 | 3.851 6248 | 2.28 298 | 3.922 7735 | 2.30 885 | 3.998 4092 | 2.33 612 |
| 45 | 3.785 5820 | 2.25 875 | 3.852 7765 | 2.28 340 | 3.923 9959 | 2.30 929 | 3.999 7108 | 2.33 659 |
| 46 | 3.786 6712 | 2.25 915 | 3.853 9293 | 2.28 382 | 3.925 2196 | 2.30 974 | 4.001 0139 | 2.33 705 |
| 47 | 3.787 7614 | 2.25 956 | 3.855 0833 | 2.28 424 | 3.926 4445 | 2.31 018 | 4.002 3183 | 2.33 752 |
| 48 | 3.788 8526 | 2.25 996 | 3.856 2383 | 2.28 466 | 3.927 6706 | 2.31 062 | 4.003 6242 | 2.33 798 |
| 49 | 3.789 9448 | 2.26 036 | 3.857 3945 | 2.28 508 | 3.928 8980 | 2.31 107 | 4.004 9315 | 2.33 845 |
| 50 | 3.791 0380 | 2.26 076 | 3.858 5518 | 2.28 550 | 3.930 1267 | 2.31 151 | 4.006 2401 | 2.33 892 |
| 51 | 3.792 1322 | 2.26 116 | 3.859 7102 | 2.28 593 | 3.931 3566 | 2.31 196 | 4.007 5502 | 2.33 939 |
| 52 | 3.793 2275 | 2.26 157 | 3.860 8697 | 2.28 635 | 3.932 5878 | 2.31 240 | 4.008 8618 | 2.33 986 |
| 53 | 3.794 3237 | 2.26 197 | 3.862 0304 | 2.28 677 | 3.933 8203 | 2.31 285 | 4.010 1747 | 2.34 033 |
| 54 | 3.795 4210 | 2.26 237 | 3.863 1922 | 2.28 720 | 3.935 0540 | 2.31 329 | 4.011 4891 | 2.34 081 |
| 55 | 3.796 5193 | 2.26 278 | 3.864 3552 | 2.28 762 | 3.936 2890 | 2.31 374 | 4.012 8049 | 2.34 128 |
| 56 | 3.797 6187 | 2.26 318 | 3.865 5193 | 2.28 805 | 3.937 5252 | 2.31 419 | 4.014 1221 | 2.34 175 |
| 57 | 3.798 7190 | 2.26 359 | 3.866 6845 | 2.28 847 | 3.938 7628 | 2.31 463 | 4.015 4407 | 2.34 222 |
| 58 | 3.799 8204 | 2.26 399 | 3.867 8508 | 2.28 890 | 3.940 0016 | 2.31 508 | 4.016 7608 | 2.34 270 |
| 59 | 3.800 9228 | 2.26 440 | 3.869 0183 | 2.28 932 | 3.941 2417 | 2.31 552 | 4.018 0823 | 2.34 317 |
| 60 | 3.802 0262 | 2.26 480 | 3.870 1870 | 2.28 975 | 3.942 4830 | 2.31 597 | 4.019 4053 | 2.34 364 |

## Tafel V.

| $v$ | 164° | | 165° | | 166° | | 167° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ | log $M$ | log Diff. 1″ |
| 0′ | 4.019 4053 | 2.34 364 | 4.101 5396 | 2.37 293 | 4.189 5921 | 2.40 409 | 4.284 4260 | 2.43 740 |
| 1 | 4.020 7297 | 2.34 411 | 4.102 9565 | 2.37 343 | 4.191 1145 | 2.40 463 | 4.286 0698 | 2.43 798 |
| 2 | 4.022 0556 | 2.34 459 | 4.104 3750 | 2.37 394 | 4.192 6387 | 2.40 516 | 4.287 7157 | 2.43 855 |
| 3 | 4.023 3829 | 2.34 506 | 4.105 7952 | 2.37 444 | 4.194 1648 | 2.40 570 | 4.289 3639 | 2.43 913 |
| 4 | 4.024 7117 | 2.34 554 | 4.107 2170 | 2.37 495 | 4.195 6928 | 2.40 624 | 4.291 0142 | 2.43 970 |
| 5 | 4.026 0419 | 2.34 602 | 4.108 6405 | 2.37 546 | 4.197 2227 | 2.40 678 | 4.292 6667 | 2.44 028 |
| 6 | 4.027 3736 | 2.34 649 | 4.110 0656 | 2.37 596 | 4.198 7545 | 2.40 732 | 4.294 3214 | 2.44 086 |
| 7 | 4.028 7068 | 2.34 697 | 4.111 4924 | 2.37 647 | 4.200 2882 | 2.40 786 | 4.295 9784 | 2.44 144 |
| 8 | 4.030 0414 | 2.34 745 | 4.112 9209 | 2.37 697 | 4.201 8238 | 2.40 840 | 4.297 6375 | 2.44 202 |
| 9 | 4.031 3774 | 2.34 792 | 4.114 3510 | 2.37 748 | 4.203 3614 | 2.40 894 | 4.299 2989 | 2.44 260 |
| 10 | 4.032 7150 | 2.34 840 | 4.115 7829 | 2.37 799 | 4.204 9008 | 2.40 948 | 4.300 9625 | 2.44 318 |
| 11 | 4.034 0540 | 2.34 888 | 4.117 2164 | 2.37 849 | 4.206 4422 | 2.41 003 | 4.302 6283 | 2.44 376 |
| 12 | 4.035 3945 | 2.34 936 | 4.118 6515 | 2.37 900 | 4.207 9855 | 2.41 057 | 4.304 2963 | 2.44 435 |
| 13 | 4.036 7365 | 2.34 984 | 4.120 0884 | 2.37 951 | 4.209 5308 | 2.41 111 | 4.305 9666 | 2.44 493 |
| 14 | 4.038 0800 | 2.35 032 | 4.121 5269 | 2.38 002 | 4.211 0779 | 2.41 166 | 4.307 6392 | 2.44 551 |
| 15 | 4.039 4250 | 2.35 080 | 4.122 9671 | 2.38 053 | 4.212 6270 | 2.41 220 | 4.309 3140 | 2.44 610 |
| 16 | 4.040 7714 | 2.35 129 | 4.124 4091 | 2.38 104 | 4.214 1781 | 2.41 275 | 4.310 9910 | 2.44 669 |
| 17 | 4.042 1194 | 2.35 177 | 4.125 8527 | 2.38 156 | 4.215 7311 | 2.41 329 | 4.312 6704 | 2.44 727 |
| 18 | 4.043 4688 | 2.35 225 | 4.127 2980 | 2.38 207 | 4.217 2861 | 2.41 384 | 4.314 3520 | 2.44 786 |
| 19 | 4.044 8197 | 2.35 273 | 4.128 7451 | 2.38 258 | 4.218 8430 | 2.41 439 | 4.316 0358 | 2.44 845 |
| 20 | 4.046 1722 | 2.35 321 | 4.130 1938 | 2.38 310 | 4.220 4019 | 2.41 494 | 4.317 7220 | 2.44 904 |
| 21 | 4.047 5261 | 2.35 370 | 4.131 6443 | 2.38 361 | 4.221 9628 | 2.41 549 | 4.319 4104 | 2.44 963 |
| 22 | 4.048 8816 | 2.35 418 | 4.133 0965 | 2.38 413 | 4.223 5257 | 2.41 605 | 4.321 1012 | 2.45 022 |
| 23 | 4.050 2386 | 2.35 466 | 4.134 5504 | 2.38 465 | 4.225 0905 | 2.41 660 | 4.322 7942 | 2.45 082 |
| 24 | 4.051 5971 | 2.35 515 | 4.136 0060 | 2.38 516 | 4.226 6573 | 2.41 715 | 4.324 4896 | 2.45 141 |
| 25 | 4.052 9571 | 2.35 563 | 4.137 4634 | 2.38 568 | 4.228 2261 | 2.41 770 | 4.326 1872 | 2.45 200 |
| 26 | 4.054 3186 | 2.35 612 | 4.138 9225 | 2.38 620 | 4.229 7969 | 2.41 826 | 4.327 8872 | 2.45 259 |
| 27 | 4.055 6816 | 2.35 660 | 4.140 3833 | 2.38 671 | 4.231 3697 | 2.41 881 | 4.329 5895 | 2.45 319 |
| 28 | 4.057 0462 | 2.35 709 | 4.141 8459 | 2.38 723 | 4.232 9445 | 2.41 936 | 4.331 2941 | 2.45 378 |
| 29 | 4.058 4123 | 2.35 757 | 4.143 3102 | 2.38 775 | 4.234 5213 | 2.41 991 | 4.333 0011 | 2.45 437 |
| 30 | 4.059 7800 | 2.35 806 | 4.144 7763 | 2.38 827 | 4.236 1001 | 2.42 046 | 4.334 7104 | 2.45 497 |
| 31 | 4.061 1492 | 2.35 854 | 4.146 2441 | 2.38 878 | 4.237 6809 | 2.42 102 | 4.336 4221 | 2.45 557 |
| 32 | 4.062 5199 | 2.35 903 | 4.147 7137 | 2.38 930 | 4.239 2638 | 2.42 157 | 4.338 1361 | 2.45 616 |
| 33 | 4.063 8922 | 2.35 952 | 4.149 1850 | 2.38 982 | 4.240 8487 | 2.42 212 | 4.339 8525 | 2.45 676 |
| 34 | 4.065 2660 | 2.36 001 | 4.150 6581 | 2.39 034 | 4.242 4356 | 2.42 268 | 4.341 5713 | 2.45 736 |
| 35 | 4.066 6414 | 2.36 050 | 4.152 1330 | 2.39 086 | 4.244 0246 | 2.42 324 | 4.343 2924 | 2.45 796 |
| 36 | 4.068 0183 | 2.36 099 | 4.153 6097 | 2.39 138 | 4.245 6156 | 2.42 380 | 4.345 0159 | 2.45 856 |
| 37 | 4.069 3968 | 2.36 148 | 4.155 0881 | 2.39 190 | 4.247 2086 | 2.42 436 | 4.346 7418 | 2.45 916 |
| 38 | 4.070 7768 | 2.36 198 | 4.156 5683 | 2.39 243 | 4.248 8037 | 2.42 492 | 4.348 4701 | 2.45 977 |
| 39 | 4.072 1584 | 2.36 247 | 4.158 0503 | 2.39 295 | 4.250 4009 | 2.42 548 | 4.350 2008 | 2.46 037 |
| 40 | 4.073 5416 | 2.36 297 | 4.159 5341 | 2.39 348 | 4.252 0001 | 2.42 604 | 4.351 9339 | 2.46 097 |
| 41 | 4.074 9263 | 2.36 346 | 4.161 0197 | 2.39 400 | 4.253 6014 | 2.42 661 | 4.353 6694 | 2.46 158 |
| 42 | 4.076 3127 | 2.36 396 | 4.162 5071 | 2.39 453 | 4.255 2048 | 2.42 717 | 4.355 4073 | 2.46 218 |
| 43 | 4.077 7006 | 2.36 445 | 4.163 9962 | 2.39 506 | 4.256 8102 | 2.42 773 | 4.357 1476 | 2.46 279 |
| 44 | 4.079 0900 | 2.36 495 | 4.165 4872 | 2.39 558 | 4.258 4178 | 2.42 830 | 4.358 8904 | 2.46 339 |
| 45 | 4.080 4811 | 2.36 544 | 4.166 9800 | 2.39 611 | 4.260 0274 | 2.42 886 | 4.360 6356 | 2.46 400 |
| 46 | 4.081 8738 | 2.36 594 | 4.168 4746 | 2.39 664 | 4.261 6391 | 2.42 943 | 4.362 3833 | 2.46 461 |
| 47 | 4.083 2680 | 2.36 643 | 4.169 9711 | 2.39 717 | 4.263 2529 | 2.42 999 | 4.364 1334 | 2.46 522 |
| 48 | 4.084 6638 | 2.36 693 | 4.171 4693 | 2.39 770 | 4.264 8688 | 2.43 056 | 4.365 8860 | 2.46 583 |
| 49 | 4.086 0613 | 2.36 742 | 4.172 9694 | 2.39 823 | 4.266 4869 | 2.43 112 | 4.367 6411 | 2.46 644 |
| 50 | 4.087 4603 | 2.36 792 | 4.174 4713 | 2.39 876 | 4.268 1070 | 2.43 169 | 4.369 3986 | 2.46 705 |
| 51 | 4.088 8610 | 2.36 842 | 4.175 9751 | 2.39 929 | 4.269 7293 | 2.43 226 | 4.371 1586 | 2.46 766 |
| 52 | 4.090 2632 | 2.36 891 | 4.177 4807 | 2.39 983 | 4.271 3537 | 2.43 282 | 4.372 9210 | 2.46 828 |
| 53 | 4.091 6671 | 2.36 941 | 4.178 9881 | 2.40 036 | 4.272 9802 | 2.43 339 | 4.374 6860 | 2.46 889 |
| 54 | 4.093 0726 | 2.36 991 | 4.180 4974 | 2.40 089 | 4.274 6089 | 2.43 396 | 4.376 4535 | 2.46 950 |
| 55 | 4.094 4797 | 2.37 041 | 4.182 0085 | 2.40 143 | 4.276 2397 | 2.43 453 | 4.378 2234 | 2.47 012 |
| 56 | 4.095 8884 | 2.37 092 | 4.183 5215 | 2.40 196 | 4.277 8726 | 2.43 510 | 4.379 9959 | 2.47 074 |
| 57 | 4.097 2987 | 2.37 142 | 4.185 0364 | 2.40 249 | 4.279 5077 | 2.43 567 | 4.381 7709 | 2.47 135 |
| 58 | 4.098 7107 | 2.37 192 | 4.186 5531 | 2.40 303 | 4.281 1450 | 2.43 624 | 4.383 5485 | 2.47 197 |
| 59 | 4.100 1243 | 2.37 242 | 4.188 0717 | 2.40 356 | 4.282 7844 | 2.43 682 | 4.385 3285 | 2.47 259 |
| 60 | 4.101 5396 | 2.37 293 | 4.189 5921 | 2.40 409 | 4.284 4260 | 2.43 740 | 4.387 1111 | 2.47 321 |

## Tafel V.

| v | 168° | | 169° | | 170° | | 171° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | log M | log Diff. 1″ | log M | log Diff. 1″ | log M | log Diff. 1″ | log M | log Diff. 1″ |
| 0′ | 4.387 1111 | 2.47 321 | 4.498 9965 | 2.51 197 | 4.621 8168 | 2.55 426 | 4.757 8558 | 2.60 083 |
| 1 | 4.388 8963 | 2.47 383 | 4.500 9484 | 2.51 264 | 4.623 9685 | 2.55 499 | 4.760 2513 | 2.60 165 |
| 2 | 4.390 6840 | 2.47 445 | 4.502 9034 | 2.51 332 | 4.626 1239 | 2.55 573 | 4.762 6513 | 2.60 247 |
| 3 | 4.392 4742 | 2.47 507 | 4.504 8614 | 2.51 400 | 4.628 2829 | 2.55 648 | 4.765 0558 | 2.60 329 |
| 4 | 4.394 2671 | 2.47 570 | 4.506 8224 | 2.51 468 | 4.630 4457 | 2.55 722 | 4.767 4649 | 2.60 412 |
| 5 | 4.396 0625 | 2.47 632 | 4.508 7865 | 2.51 536 | 4.632 6121 | 2.55 797 | 4.769 8786 | 2.60 494 |
| 6 | 4.397 8605 | 2.47 695 | 4.510 7537 | 2.51 604 | 4.634 7823 | 2.55 871 | 4.772 2968 | 2.60 577 |
| 7 | 4.399 6611 | 2.47 757 | 4.512 7240 | 2.51 672 | 4.636 9561 | 2.55 945 | 4.774 7197 | 2.60 659 |
| 8 | 4.401 4642 | 2.47 820 | 4.514 6973 | 2.51 740 | 4.639 1338 | 2.56 020 | 4.777 1472 | 2.60 742 |
| 9 | 4.403 2700 | 2.47 883 | 4.516 6738 | 2.51 808 | 4.641 3151 | 2.56 096 | 4.779 5793 | 2.60 825 |
| 10 | 4.405 0784 | 2.47 946 | 4.518 6534 | 2.51 876 | 4.643 5003 | 2.56 171 | 4.782 0161 | 2.60 908 |
| 11 | 4.406 8894 | 2.48 008 | 4.520 6360 | 2.51 945 | 4.645 6892 | 2.56 246 | 4.784 4575 | 2.60 991 |
| 12 | 4.408 7031 | 2.48 071 | 4.522 6218 | 2.52 013 | 4.647 8819 | 2.56 321 | 4.786 9037 | 2.61 075 |
| 13 | 4.410 5193 | 2.48 134 | 4.524 6108 | 2.52 082 | 4.650 0784 | 2.56 396 | 4.789 3545 | 2.61 159 |
| 14 | 4.412 3382 | 2.48 197 | 4.526 6029 | 2.52 151 | 4.652 2787 | 2.56 471 | 4.791 8101 | 2.61 242 |
| 15 | 4.414 1598 | 2.48 260 | 4.528 5981 | 2.52 219 | 4.654 4829 | 2.56 547 | 4.794 2704 | 2.61 326 |
| 16 | 4.415 9840 | 2.48 324 | 4.530 5965 | 2.52 288 | 4.656 6909 | 2.56 623 | 4.796 7355 | 2.61 410 |
| 17 | 4.417 8109 | 2.48 387 | 4.532 5981 | 2.52 357 | 4.658 9027 | 2.56 698 | 4.799 2053 | 2.61 494 |
| 18 | 4.419 6404 | 2.48 451 | 4.534 6029 | 2.52 427 | 4.661 1184 | 2.56 774 | 4.801 6800 | 2.61 578 |
| 19 | 4.421 4726 | 2.48 514 | 4.536 6109 | 2.52 496 | 4.663 3380 | 2.56 850 | 4.804 1595 | 2.61 663 |
| 20 | 4.423 3075 | 2.48 578 | 4.538 6221 | 2.52 565 | 4.665 5615 | 2.56 927 | 4.806 6438 | 2.61 748 |
| 21 | 4.425 1451 | 2.48 642 | 4.540 6365 | 2.52 634 | 4.667 7889 | 2.57 003 | 4.809 1329 | 2.61 833 |
| 22 | 4.426 9854 | 2.48 706 | 4.542 6541 | 2.52 704 | 4.670 0203 | 2.57 079 | 4.811 6270 | 2.61 918 |
| 23 | 4.428 8284 | 2.48 770 | 4.544 6749 | 2.52 774 | 4.672 2555 | 2.57 155 | 4.814 1259 | 2.62 003 |
| 24 | 4.430 6742 | 2.48 834 | 4.546 6990 | 2.52 843 | 4.674 4947 | 2.57 232 | 4.816 6297 | 2.62 088 |
| 25 | 4.432 5226 | 2.48 898 | 4.548 7264 | 2.52 913 | 4.676 7379 | 2.57 309 | 4.819 1385 | 2.62 174 |
| 26 | 4.434 3738 | 2.48 962 | 4.550 7570 | 2.52 983 | 4.678 9850 | 2.57 386 | 4.821 6522 | 2.62 260 |
| 27 | 4.436 2277 | 2.49 026 | 4.552 7909 | 2.53 053 | 4.681 2362 | 2.57 463 | 4.824 1709 | 2.62 346 |
| 28 | 4.438 0844 | 2.49 090 | 4.554 8281 | 2.53 122 | 4.683 4913 | 2.57 541 | 4.826 6945 | 2.62 431 |
| 29 | 4.439 9438 | 2.49 154 | 4.556 8685 | 2.53 192 | 4.685 7504 | 2.57 618 | 4.829 2232 | 2.62 517 |
| 30 | 4.441 8060 | 2.49 219 | 4.558 9123 | 2.53 263 | 4.688 0136 | 2.57 695 | 4.831 7569 | 2.62 603 |
| 31 | 4.443 6709 | 2.49 284 | 4.560 9594 | 2.53 334 | 4.690 2808 | 2.57 773 | 4.834 2956 | 2.62 690 |
| 32 | 4.445 5386 | 2.49 349 | 4.563 0099 | 2.53 405 | 4.692 5521 | 2.57 851 | 4.836 8394 | 2.62 777 |
| 33 | 4.447 4091 | 2.49 414 | 4.565 0636 | 2.53 476 | 4.694 8275 | 2.57 929 | 4.839 3883 | 2.62 863 |
| 34 | 4.449 2825 | 2.49 479 | 4.567 1207 | 2.53 546 | 4.697 1069 | 2.58 007 | 4.841 9423 | 2.62 950 |
| 35 | 4.451 1586 | 2.49 544 | 4.569 1812 | 2.53 617 | 4.699 3905 | 2.58 085 | 4.844 5014 | 2.63 038 |
| 36 | 4.453 0375 | 2.49 609 | 4.571 2451 | 2.53 689 | 4.701 6782 | 2.58 163 | 4.847 0657 | 2.63 125 |
| 37 | 4.454 9192 | 2.49 673 | 4.573 3123 | 2.53 760 | 4.703 9700 | 2.58 241 | 4.849 6351 | 2.63 212 |
| 38 | 4.456 8038 | 2.49 738 | 4.575 3829 | 2.53 831 | 4.706 2659 | 2.58 320 | 4.852 2097 | 2.63 299 |
| 39 | 4.458 6912 | 2.49 803 | 4.577 4569 | 2.53 902 | 4.708 5660 | 2.58 399 | 4.854 7895 | 2.63 387 |
| 40 | 4.460 5814 | 2.49 869 | 4.579 5343 | 2.53 973 | 4.710 8703 | 2.58 477 | 4.857 3745 | 2.63 475 |
| 41 | 4.462 4745 | 2.49 934 | 4.581 6152 | 2.54 044 | 4.713 1787 | 2.58 556 | 4.859 9648 | 2.63 563 |
| 42 | 4.464 3705 | 2.50 000 | 4.583 6995 | 2.54 116 | 4.715 4914 | 2.58 636 | 4.862 5604 | 2.63 652 |
| 43 | 4.466 2693 | 2.50 066 | 4.585 7872 | 2.54 188 | 4.717 8083 | 2.58 715 | 4.865 1612 | 2.63 740 |
| 44 | 4.468 1710 | 2.50 132 | 4.587 8784 | 2.54 260 | 4.720 1294 | 2.58 795 | 4.867 7673 | 2.63 829 |
| 45 | 4.470 0756 | 2.50 198 | 4.589 9730 | 2.54 332 | 4.722 4548 | 2.58 874 | 4.870 3788 | 2.63 918 |
| 46 | 4.471 9831 | 2.50 264 | 4.592 0712 | 2.54 404 | 4.724 7844 | 2.58 953 | 4.872 9957 | 2.64 007 |
| 47 | 4.473 8935 | 2.50 330 | 4.594 1728 | 2.54 476 | 4.727 1183 | 2.59 033 | 4.875 6179 | 2.64 096 |
| 48 | 4.475 8068 | 2.50 396 | 4.596 2779 | 2.54 549 | 4.729 4565 | 2.59 113 | 4.878 2455 | 2.64 185 |
| 49 | 4.477 7230 | 2.50 462 | 4.598 3866 | 2.54 621 | 4.731 7991 | 2.59 193 | 4.880 8785 | 2.64 275 |
| 50 | 4.479 6421 | 2.50 529 | 4.600 4987 | 2.54 694 | 4.734 1459 | 2.59 273 | 4.883 5169 | 2.64 365 |
| 51 | 4.481 5642 | 2.50 595 | 4.602 6144 | 2.54 766 | 4.736 4971 | 2.59 354 | 4.886 1609 | 2.64 455 |
| 52 | 4.483 4892 | 2.50 661 | 4.604 7337 | 2.54 839 | 4.738 8526 | 2.59 435 | 4.888 8103 | 2.64 545 |
| 53 | 4.485 4172 | 2.50 728 | 4.606 8565 | 2.54 912 | 4.741 2125 | 2.59 515 | 4.891 4652 | 2.64 635 |
| 54 | 4.487 3481 | 2.50 795 | 4.608 9829 | 2.54 985 | 4.743 5769 | 2.59 596 | 4.894 1256 | 2.64 726 |
| 55 | 4.489 2820 | 2.50 862 | 4.611 1128 | 2.55 059 | 4.745 9456 | 2.59 676 | 4.896 7916 | 2.64 816 |
| 56 | 4.491 2189 | 2.50 928 | 4.613 2464 | 2.55 132 | 4.748 3187 | 2.59 757 | 4.899 4632 | 2.64 907 |
| 57 | 4.493 1588 | 2.50 995 | 4.615 3836 | 2.55 206 | 4.750 6963 | 2.59 838 | 4.902 1403 | 2.64 998 |
| 58 | 4.495 1017 | 2.51 062 | 4.617 5244 | 2.55 279 | 4.753 0783 | 2.59 920 | 4.904 8231 | 2.65 089 |
| 59 | 4.497 0476 | 2.51 129 | 4.619 6688 | 2.55 352 | 4.755 4648 | 2.60 001 | 4.907 5115 | 2.65 180 |
| 60 | 4.498 9965 | 2.51 197 | 4.621 8168 | 2.55 426 | 4.757 8558 | 2.60 083 | 4.910 2056 | 2.65 272 |

## Tafel V.

| v | 172° log M | 172° log Diff. 1″ | 173° log M | 173° log Diff. 1″ | 174° log M | 174° log Diff. 1″ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 4.910 2056 | 2.65 272 | 5.083 2008 | 2.71 136 | 5.283 1888 | 2.77 887 |
| 1 | 4.912 9054 | 2.65 363 | 5.086 2914 | 2.71 241 | 5.286 7999 | 2.78 009 |
| 2 | 4.915 6109 | 2.65 455 | 5.089 3894 | 2.71 346 | 5.290 4211 | 2.78 131 |
| 3 | 4.918 3222 | 2.65 547 | 5.092 4949 | 2.71 451 | 5.294 0525 | 2.78 253 |
| 4 | 4.921 0391 | 2.65 640 | 5.095 6079 | 2.71 556 | 5.297 6941 | 2.78 376 |
| 5 | 4.923 7619 | 2.65 732 | 5.098 7285 | 2.71 661 | 5.301 3461 | 2.78 499 |
| 6 | 4.926 4905 | 2.65 825 | 5.101 8567 | 2.71 767 | 5.305 0084 | 2.78 622 |
| 7 | 4.929 2249 | 2.65 918 | 5.104 9925 | 2.71 874 | 5.308 6812 | 2.78 746 |
| 8 | 4.931 9652 | 2.66 011 | 5.108 1360 | 2.71 980 | 5.312 3645 | 2.78 870 |
| 9 | 4.934 7114 | 2.66 105 | 5.111 2872 | 2.72 086 | 5.316 0583 | 2.78 994 |
| 10 | 4.937 4635 | 2.66 197 | 5.114 4461 | 2.72 193 | 5.319 7627 | 2.79 119 |
| 11 | 4.940 2215 | 2.66 291 | 5.117 6129 | 2.72 300 | 5.323 4778 | 2.79 245 |
| 12 | 4.942 9855 | 2.66 385 | 5.120 7874 | 2.72 407 | 5.327 2036 | 2.79 370 |
| 13 | 4.945 7554 | 2.66 479 | 5.123 9699 | 2.72 514 | 5.330 9403 | 2.79 496 |
| 14 | 4.948 5314 | 2.66 573 | 5.127 1602 | 2.72 622 | 5.334 6877 | 2.79 622 |
| 15 | 4.951 3134 | 2.66 668 | 5.130 3585 | 2.72 730 | 5.338 4461 | 2.79 749 |
| 16 | 4.954 1014 | 2.66 762 | 5.133 5647 | 2.72 838 | 5.342 2155 | 2.79 876 |
| 17 | 4.956 8956 | 2.66 857 | 5.136 7790 | 2.72 947 | 5.345 9960 | 2.80 003 |
| 18 | 4.959 6958 | 2.66 952 | 5.140 0013 | 2.73 056 | 5.349 7875 | 2.80 130 |
| 19 | 4.962 5022 | 2.67 047 | 5.143 2317 | 2.73 165 | 5.353 5902 | 2.80 258 |
| 20 | 4.965 3148 | 2.67 143 | 5.146 4703 | 2.73 275 | 5.357 4042 | 2.80 387 |
| 21 | 4.968 1335 | 2.67 238 | 5.149 7170 | 2.73 385 | 5.361 2294 | 2.80 515 |
| 22 | 4.970 9585 | 2.67 334 | 5.152 9720 | 2.73 495 | 5.365 0661 | 2.80 644 |
| 23 | 4.973 7897 | 2.67 430 | 5.156 2352 | 2.73 605 | 5.368 9141 | 2.80 774 |
| 24 | 4.976 6272 | 2.67 527 | 5.159 5067 | 2.73 715 | 5.372 7737 | 2.80 904 |
| 25 | 4.979 4710 | 2.67 623 | 5.162 7866 | 2.73 826 | 5.376 6449 | 2.81 034 |
| 26 | 4.982 3212 | 2.67 720 | 5.166 0749 | 2.73 937 | 5.380 5277 | 2.81 165 |
| 27 | 4.985 1776 | 2.67 817 | 5.169 3715 | 2.74 048 | 5.384 4222 | 2.81 296 |
| 28 | 4.988 0405 | 2.67 914 | 5.172 6767 | 2.74 160 | 5.388 3285 | 2.81 427 |
| 29 | 4.990 9098 | 2.68 011 | 5.175 9904 | 2.74 272 | 5.392 2467 | 2.81 559 |
| 30 | 4.993 7855 | 2.68 109 | 5.179 3126 | 2.74 384 | 5.396 1768 | 2.81 691 |
| 31 | 4.996 6677 | 2.68 206 | 5.182 6434 | 2.74 497 | 5.400 1189 | 2.81 824 |
| 32 | 4.999 5564 | 2.68 304 | 5.185 9829 | 2.74 609 | 5.404 0730 | 2.81 957 |
| 33 | 5.002 4516 | 2.68 402 | 5.189 3311 | 2.74 722 | 5.408 0394 | 2.82 090 |
| 34 | 5.005 3534 | 2.68 500 | 5.192 6880 | 2.74 835 | 5.412 0179 | 2.82 224 |
| 35 | 5.008 2617 | 2.68 599 | 5.196 0536 | 2.74 949 | 5.416 0087 | 2.82 358 |
| 36 | 5.011 1767 | 2.68 697 | 5.199 4281 | 2.75 063 | 5.420 0119 | 2.82 493 |
| 37 | 5.014 0983 | 2.68 796 | 5.202 8115 | 2.75 177 | 5.424 0276 | 2.82 628 |
| 38 | 5.017 0266 | 2.68 896 | 5.206 2038 | 2.75 291 | 5.428 0557 | 2.82 764 |
| 39 | 5.019 9616 | 2.68 996 | 5.209 6051 | 2.75 406 | 5.432 0965 | 2.82 900 |
| 40 | 5.022 9034 | 2.69 095 | 5.213 0154 | 2.75 521 | 5.436 1500 | 2.83 036 |
| 41 | 5.025 8518 | 2.69 195 | 5.216 4347 | 2.75 637 | 5.440 2162 | 2.83 172 |
| 42 | 5.028 8071 | 2.69 295 | 5.219 8631 | 2.75 753 | 5.444 2952 | 2.83 309 |
| 43 | 5.031 7693 | 2.69 395 | 5.223 3007 | 2.75 869 | 5.448 3872 | 2.83 447 |
| 44 | 5.034 7382 | 2.69 496 | 5.226 7475 | 2.75 985 | 5.452 4922 | 2.83 585 |
| 45 | 5.037 7141 | 2.69 596 | 5.230 2035 | 2.76 101 | 5.456 6102 | 2.83 723 |
| 46 | 5.040 6969 | 2.69 697 | 5.233 6689 | 2.76 218 | 5.460 7414 | 2.83 862 |
| 47 | 5.043 6866 | 2.69 799 | 5.237 1436 | 2.76 335 | 5.464 8859 | 2.84 001 |
| 48 | 5.046 6834 | 2.69 901 | 5.240 6277 | 2.76 453 | 5.469 0437 | 2.84 141 |
| 49 | 5.049 6871 | 2.70 002 | 5.244 1212 | 2.76 571 | 5.473 2150 | 2.84 282 |
| 50 | 5.052 6979 | 2.70 104 | 5.247 6243 | 2.76 689 | 5.477 3997 | 2.84 422 |
| 51 | 5.055 7158 | 2.70 206 | 5.251 1369 | 2.76 807 | 5.481 5981 | 2.84 563 |
| 52 | 5.058 7408 | 2.70 308 | 5.254 6591 | 2.76 926 | 5.485 8101 | 2.84 705 |
| 53 | 5.061 7729 | 2.70 411 | 5.258 1909 | 2.77 045 | 5.490 0359 | 2.84 847 |
| 54 | 5.064 8122 | 2.70 514 | 5.261 7325 | 2.77 164 | 5.494 2755 | 2.84 989 |
| 55 | 5.067 8587 | 2.70 617 | 5.265 2839 | 2.77 284 | 5.498 5291 | 2.85 132 |
| 56 | 5.070 9125 | 2.70 720 | 5.268 8450 | 2.77 405 | 5.502 7967 | 2.85 275 |
| 57 | 5.073 9736 | 2.70 824 | 5.272 4160 | 2.77 525 | 5.507 0785 | 2.85 419 |
| 58 | 5.077 0420 | 2.70 928 | 5.275 9970 | 2.77 645 | 5.511 3745 | 2.85 563 |
| 59 | 5.080 1177 | 2.71 032 | 5.279 5879 | 2.77 766 | 5.515 6848 | 2.85 708 |
| 60 | 5.083 2008 | 2.71 136 | 5.283 1888 | 2.77 887 | 5.520 0096 | 2.85 854 |

## Tafel VI (vgl. pag. 55).

| w | δ | Diff. |
|---|---|---|
| 167° 0′ | 7″.75 | |
| 10 | 7.27 | −48 |
| 20 | 6.81 | −46 |
| 30 | 6.37 | −44 |
| 40 | 5.96 | −41 |
| 50 | 5.57 | −39 |
| 168 0 | 5.20 | −37 |
| 10 | 4.84 | −36 |
| 20 | 4.51 | −33 |
| 30 | 4.20 | −31 |
| 40 | 3.90 | −30 |
| 50 | 3.62 | −28 |
| 169 0 | 3.36 | −26 |
| 10 | 3.11 | −25 |
| 20 | 2.88 | −23 |
| 30 | 2.66 | −22 |
| 40 | 2.46 | −20 |
| 50 | 2.27 | −19 |
| 170 0 | 2.09 | −18 |
| 10 | 1.92 | −17 |
| 20 | 1.76 | −16 |
| 30 | 1.62 | −14 |
| 40 | 1.48 | −14 |
| 50 | 1.35 | −13 |
| 171 0 | 1.23 | −12 |
| 10 | 1.12 | −11 |
| 20 | 1.02 | −10 |
| 30 | 0.93 | −9 |
| 40 | 0.84 | −9 |
| 50 | 0.76 | −8 |
| 172 0 | 0.68 | −8 |
| 10 | 0.61 | −7 |
| 20 | 0.55 | −6 |
| 30 | 0.49 | −6 |
| 40 | 0.44 | −5 |
| 50 | 0.39 | −5 |
| 173 0 | 0.35 | −4 |
| 10 | 0.31 | −4 |
| 20 | 0.27 | −4 |
| 30 | 0.24 | −3 |
| 40 | 0.21 | −3 |
| 50 | 0.19 | −2 |
| 174 0 | 0.16 | −3 |
| 10 | 0.14 | −2 |
| 20 | 0.12 | −2 |
| 30 | 0.10 | −2 |
| 40 | 0.09 | −1 |
| 50 | 0.08 | −1 |
| 175 0 | 0.07 | −1 |
| 10 | 0.06 | −1 |
| 20 | 0.05 | −1 |
| 30 | 0.04 | −1 |
| 40 | 0.03 | −1 |
| 50 | 0.03 | 0 |
| 176 0 | 0.02 | −1 |
| 10 | 0.02 | 0 |
| 20 | 0.01 | −1 |
| 30 | 0.01 | 0 |
| 40 | 0.01 | 0 |
| 50 | 0.01 | 0 |
| 177 0 | 0.01 | 0 |
| 10 | 0.00 | −1 |
| 180 0 | 0.00 | 0 |

# Tafel VII (vergl. pag. 62).

| $A$ | log $B$ | Diff. | log $C$ | Diff. | $A$ | log $B$ | Diff. | log $C$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 0.300 | 0.000 6294 | — 41 | 9.952 6346 | 1439 | — 0.240 | 0.000 4076 | — 33 | 9.961 4180 | 1491 |
| — 0.299 | 0.000 6253 | 40 | 9.952 7785 | 1439 | — 0.239 | 0.000 4043 | 33 | 9.961 5671 | 1491 |
| — 0.298 | 0.000 6213 | 41 | 9.952 9224 | 1441 | — 0.238 | 0.000 4010 | 33 | 9.961 7162 | 1492 |
| — 0.297 | 0.000 6172 | 40 | 9.953 0665 | 1441 | — 0.237 | 0.000 3977 | 32 | 9.961 8654 | 1493 |
| — 0.296 | 0.000 6132 | 40 | 9.953 2106 | 1442 | — 0.236 | 0.000 3945 | 33 | 9.962 0147 | 1494 |
| — 0.295 | 0.000 6092 | — 40 | 9.953 3548 | 1443 | — 0.235 | 0.000 3912 | — 32 | 9.962 1641 | 1495 |
| — 0.294 | 0.000 6052 | 40 | 9.953 4991 | 1444 | — 0.234 | 0.000 3880 | 33 | 9.962 3136 | 1495 |
| — 0.293 | 0.000 6012 | 40 | 9.953 6435 | 1445 | — 0.233 | 0.000 3847 | 32 | 9.962 4631 | 1497 |
| — 0.292 | 0.000 5972 | 40 | 9.953 7880 | 1445 | — 0.232 | 0.000 3815 | 32 | 9.962 6128 | 1498 |
| — 0.291 | 0.000 5932 | 39 | 9.953 9325 | 1446 | — 0.231 | 0.000 3783 | 32 | 9.962 7626 | 1498 |
| — 0.290 | 0.000 5893 | — 40 | 9.954 0771 | 1447 | — 0.230 | 0.000 3751 | — 32 | 9.962 9124 | 1499 |
| — 0.289 | 0.000 5853 | 39 | 9.954 2218 | 1448 | — 0.229 | 0.000 3719 | 31 | 9.963 0623 | 1501 |
| — 0.288 | 0.000 5814 | 39 | 9.954 3666 | 1449 | — 0.228 | 0.000 3688 | 32 | 9.963 2124 | 1501 |
| — 0.287 | 0.000 5775 | 39 | 9.954 5115 | 1450 | — 0.227 | 0.000 3656 | 31 | 9.963 3625 | 1502 |
| — 0.286 | 0.000 5736 | 39 | 9.954 6565 | 1451 | — 0.226 | 0.000 3625 | 31 | 9.963 5127 | 1503 |
| — 0.285 | 0.000 5697 | — 39 | 9.954 8016 | 1452 | — 0.225 | 0.000 3594 | — 32 | 9.963 6630 | 1504 |
| — 0.284 | 0.000 5658 | 39 | 9.954 9468 | 1451 | — 0.224 | 0.000 3562 | 31 | 9.963 8134 | 1505 |
| — 0.283 | 0.000 5619 | 38 | 9.955 0919 | 1453 | — 0.223 | 0.000 3531 | 31 | 9.963 9639 | 1506 |
| — 0.282 | 0.000 5581 | 39 | 9.955 2372 | 1454 | — 0.222 | 0.000 3500 | 30 | 9.964 1145 | 1506 |
| — 0.281 | 0.000 5542 | 38 | 9.955 3826 | 1455 | — 0.221 | 0.000 3470 | 31 | 9.964 2651 | 1508 |
| — 0.280 | 0.000 5504 | — 38 | 9.955 5281 | 1456 | — 0.220 | 0.000 3439 | — 30 | 9.964 4159 | 1508 |
| — 0.279 | 0.000 5466 | 38 | 9.955 6737 | 1456 | — 0.219 | 0.000 3409 | 31 | 9.964 5667 | 1510 |
| — 0.278 | 0.000 5428 | 38 | 9.955 8193 | 1457 | — 0.218 | 0.000 3378 | 30 | 9.964 7177 | 1510 |
| — 0.277 | 0.000 5390 | 38 | 9.955 9650 | 1459 | — 0.217 | 0.000 3348 | 30 | 9.964 8687 | 1512 |
| — 0.276 | 0.000 5352 | 37 | 9.956 1109 | 1459 | — 0.216 | 0.000 3318 | 30 | 9.965 0199 | 1512 |
| — 0.275 | 0.000 5315 | — 38 | 9.956 2568 | 1459 | — 0.215 | 0.000 3288 | — 30 | 9.965 1711 | 1513 |
| — 0.274 | 0.000 5277 | 37 | 9.956 4027 | 1461 | — 0.214 | 0.000 3258 | 30 | 9.965 3224 | 1514 |
| — 0.273 | 0.000 5240 | 38 | 9.956 5488 | 1461 | — 0.213 | 0.000 3228 | 29 | 9.965 4738 | 1515 |
| — 0.272 | 0.000 5202 | 37 | 9.956 6949 | 1463 | — 0.212 | 0.000 3199 | 30 | 9.965 6253 | 1515 |
| — 0.271 | 0.000 5165 | 37 | 9.956 8412 | 1463 | — 0.211 | 0.000 3169 | 29 | 9.965 7768 | 1517 |
| — 0.270 | 0.000 5128 | — 37 | 9.956 9875 | 1464 | — 0.210 | 0.000 3140 | — 29 | 9.965 9285 | 1517 |
| — 0.269 | 0.000 5091 | 36 | 9.957 1339 | 1465 | — 0.209 | 0.000 3111 | 29 | 9.966 0802 | 1519 |
| — 0.268 | 0.000 5055 | 37 | 9.957 2804 | 1466 | — 0.208 | 0.000 3082 | 29 | 9.966 2321 | 1520 |
| — 0.267 | 0.000 5018 | 37 | 9.957 4270 | 1467 | — 0.207 | 0.000 3053 | 29 | 9.966 3841 | 1520 |
| — 0.266 | 0.000 4981 | 36 | 9.957 5737 | 1467 | — 0.206 | 0.000 3024 | 29 | 9.966 5361 | 1521 |
| — 0.265 | 0.000 4945 | — 36 | 9.957 7204 | 1469 | — 0.205 | 0.000 2995 | — 28 | 9.966 6882 | 1522 |
| — 0.264 | 0.000 4909 | 36 | 9.957 8673 | 1470 | — 0.204 | 0.000 2967 | 29 | 9.966 8404 | 1523 |
| — 0.263 | 0.000 4873 | 35 | 9.958 0143 | 1470 | — 0.203 | 0.000 2938 | 28 | 9.966 9927 | 1524 |
| — 0.262 | 0.000 4838 | 37 | 9.958 1613 | 1471 | — 0.202 | 0.000 2910 | 28 | 9.966 1451 | 1525 |
| — 0.261 | 0.000 4801 | 36 | 9.958 3084 | 1472 | — 0.201 | 0.000 2882 | 28 | 9.967 2976 | 1526 |
| — 0.260 | 0.000 4765 | — 36 | 9.958 4556 | 1473 | — 0.200 | 0.000 2854 | — 28 | 9.967 4502 | 1527 |
| — 0.259 | 0.000 4729 | 35 | 9.958 6029 | 1474 | — 0.199 | 0.000 2826 | 28 | 9.967 6029 | 1528 |
| — 0.258 | 0.000 4694 | 36 | 9.958 7503 | 1474 | — 0.198 | 0.000 2798 | 27 | 9.967 7557 | 1528 |
| — 0.257 | 0.000 4658 | 35 | 9.958 8977 | 1476 | — 0.197 | 0.000 2771 | 28 | 9.967 9085 | 1530 |
| — 0.256 | 0.000 4623 | 35 | 9.959 0453 | 1476 | — 0.196 | 0.000 2743 | 27 | 9.968 0615 | 1531 |
| — 0.255 | 0.000 4588 | — 35 | 9.959 1929 | 1478 | — 0.195 | 0.000 2716 | — 28 | 9.968 2146 | 1531 |
| — 0.254 | 0.000 4553 | 35 | 9.959 3407 | 1478 | — 0.194 | 0.000 2688 | 27 | 9.968 3677 | 1533 |
| — 0.253 | 0.000 4518 | 35 | 9.959 4885 | 1479 | — 0.193 | 0.000 2661 | 27 | 9.968 5210 | 1533 |
| — 0.252 | 0.000 4483 | 34 | 9.959 6364 | 1479 | — 0.192 | 0.000 2634 | 26 | 9.968 6743 | 1535 |
| — 0.251 | 0.000 4449 | 35 | 9.959 7843 | 1481 | — 0.191 | 0.000 2608 | 27 | 9.968 8278 | 1535 |
| — 0.250 | 0.000 4414 | — 34 | 9.959 9324 | 1481 | — 0.190 | 0.000 2581 | — 27 | 9.968 9813 | 1536 |
| — 0.249 | 0.000 4380 | 34 | 9.960 0805 | 1483 | — 0.189 | 0.000 2554 | 26 | 9.969 1349 | 1537 |
| — 0.248 | 0.000 4346 | 35 | 9.960 2288 | 1483 | — 0.188 | 0.000 2528 | 26 | 9.969 2886 | 1539 |
| — 0.247 | 0.000 4311 | 34 | 9.960 3771 | 1484 | — 0.187 | 0.000 2502 | 27 | 9.969 4425 | 1539 |
| — 0.246 | 0.000 4277 | 33 | 9.960 5255 | 1486 | — 0.186 | 0.000 2475 | 26 | 9.969 5964 | 1540 |
| — 0.245 | 0.000 4244 | — 34 | 9.960 6741 | 1486 | — 0.185 | 0.000 2449 | — 26 | 9.969 7504 | 1541 |
| — 0.244 | 0.000 4210 | 34 | 9.960 8227 | 1487 | — 0.184 | 0.000 2423 | 25 | 9.969 9045 | 1541 |
| — 0.243 | 0.000 4176 | 33 | 9.960 9714 | 1488 | — 0.183 | 0.000 2398 | 26 | 9.970 0586 | 1543 |
| — 0.242 | 0.000 4143 | 33 | 9.961 1202 | 1488 | — 0.182 | 0.000 2372 | 26 | 9.970 2129 | 1544 |
| — 0.241 | 0.000 4110 | 34 | 9.961 2690 | 1490 | — 0.181 | 0.000 2346 | 25 | 9.970 3673 | 1545 |
| — 0.240 | 0.000 4076 | | 9.961 4180 | | — 0.180 | 0.000 2321 | | 9.970 5218 | |

## Tafel VII.

| A | log B | Diff. | log C | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| — 0.180 | 0.000 2321 | — 25 | 9.970 5218 | 1546 |
| — 0.179 | 0.000 2296 | 25 | 9.970 6764 | 1547 |
| — 0.178 | 0.000 2271 | 25 | 9.970 8311 | 1547 |
| — 0.177 | 0.000 2246 | 25 | 9.970 9858 | 1549 |
| — 0.176 | 0.000 2221 | 25 | 9.971 1407 | 1549 |
| — 0.175 | 0.000 2196 | — 24 | 9.971 2956 | 1551 |
| — 0.174 | 0. 00 2172 | 25 | 9.971 4507 | 1552 |
| — 0.173 | 0.000 2147 | 24 | 9.971 6059 | 1552 |
| — 0.172 | 0.000 2123 | 24 | 9.971 7611 | 1554 |
| — 0.171 | 0.000 2099 | 24 | 9.971 9165 | 1554 |
| — 0.170 | 0.000 2075 | — 24 | 9.972 0719 | 1555 |
| — 0.169 | 0.000 2051 | 24 | 9.972 2274 | 1557 |
| — 0.168 | 0.000 2027 | 24 | 9.972 3831 | 1557 |
| — 0.167 | 0.000 2003 | 23 | 9.972 5388 | 1558 |
| — 0.166 | 0.000 1980 | 24 | 9.972 6946 | 1559 |
| — 0.165 | 0.000 1956 | — 23 | 9.972 8505 | 1560 |
| — 0.164 | 0.000 1933 | 23 | 9.973 0065 | 1562 |
| — 0.163 | 0.000 1910 | 23 | 9.973 1627 | 1562 |
| — 0.162 | 0.000 1887 | 23 | 9.973 3189 | 1563 |
| — 0.161 | 0.000 1864 | 22 | 9.973 4752 | 1564 |
| — 0.160 | 0.000 1842 | — 23 | 9.973 6316 | 1565 |
| — 0.159 | 0.000 1819 | 22 | 9.973 7881 | 1566 |
| — 0.158 | 0.000 1797 | 23 | 9.973 9447 | 1567 |
| — 0.157 | 0.000 1774 | 22 | 9.974 1014 | 1568 |
| — 0.156 | 0.000 1752 | 22 | 9.974 2582 | 1569 |
| — 0.155 | 0.000 1730 | — 22 | 9.974 4151 | 1570 |
| — 0.154 | 0.000 1708 | 22 | 9.974 5721 | 1571 |
| — 0.153 | 0.000 1686 | 21 | 9.974 7292 | 1572 |
| — 0.152 | 0.000 1665 | 22 | 9.974 8864 | 1573 |
| — 0.151 | 0.000 1643 | 21 | 9.975 0437 | 1574 |
| — 0.150 | 0.000 1622 | — 21 | 9.975 2011 | 1575 |
| — 0.149 | 0.000 1601 | 21 | 9.975 3586 | 1576 |
| — 0.148 | 0.000 1580 | 21 | 9.975 5162 | 1577 |
| — 0.147 | 0.000 1559 | 21 | 9.975 6739 | 1578 |
| — 0.146 | 0.000 1538 | 21 | 9.975 8317 | 1579 |
| — 0.145 | 0.000 1517 | — 20 | 9.975 9896 | 1579 |
| — 0.144 | 0.000 1497 | 21 | 9.976 1475 | 1581 |
| — 0.143 | 0.000 1476 | 20 | 9.976 3056 | 1582 |
| — 0.142 | 0 000 1456 | 20 | 9.976 4638 | 1583 |
| — 0.141 | 0.000 1436 | 20 | 9.976 6221 | 1584 |
| — 0.140 | 0.000 1416 | — 20 | 9.976 7805 | 1585 |
| — 0.139 | 0.000 1396 | 20 | 9.976 9390 | 1586 |
| — 0.138 | 0.000 1376 | 19 | 9.977 0976 | 1587 |
| — 0.137 | 0.000 1357 | 20 | 9.977 2563 | 1588 |
| — 0.136 | 0.000 1337 | 19 | 9.977 4151 | 1588 |
| — 0.135 | 0.000 1318 | — 19 | 9.977 5739 | 1590 |
| — 0.134 | 0.000 1299 | 19 | 9.977 7329 | 1591 |
| — 0.133 | 0.000 1280 | 19 | 9.977 8920 | 1592 |
| — 0.132 | 0.000 1261 | 19 | 9.978 0512 | 1593 |
| — 0.131 | 0.000 1242 | 19 | 9.978 2105 | 1594 |
| — 0.130 | 0.000 1223 | — 18 | 9.978 3699 | 1595 |
| — 0.129 | 0.000 1205 | 19 | 9.978 5294 | 1596 |
| — 0.128 | 0.000 1186 | 18 | 9.978 6890 | 1597 |
| — 0.127 | 0.000 1168 | 18 | 9.978 8487 | 1598 |
| — 0.126 | 0.000 1150 | 18 | 9.979 0085 | 1599 |
| — 0.125 | 0.000 1132 | — 18 | 9.979 1684 | 1600 |
| — 0.124 | 0.000 1114 | 17 | 9.979 3284 | 1601 |
| — 0.123 | 0.000 1097 | 18 | 9.979 4885 | 1602 |
| — 0.122 | 0.000 1079 | 17 | 9.979 6487 | 1603 |
| — 0.121 | 0.000 1062 | 17 | 9.979 8090 | 1604 |
| — 0.120 | 0.000 1045 | | 9.979 9694 | |

| A | log B | Diff. | log C | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| — 0.120 | 0.000 1045 | — 18 | 9.979 9694 | 1605 |
| — 0.119 | 0.000 1027 | 17 | 9.980 1299 | 1606 |
| — 0.118 | 0.000 1010 | 16 | 9.980 2905 | 1607 |
| — 0.117 | 0.000 0994 | 17 | 9.980 4512 | 1609 |
| — 0.116 | 0.000 0977 | 17 | 9.980 6121 | 1609 |
| — 0.115 | 0.000 0960 | — 16 | 9.980 7730 | 1610 |
| — 0.114 | 0.000 0944 | 16 | 9.980 9340 | 1611 |
| — 0.113 | 0.000 0928 | 17 | 9.981 0951 | 1612 |
| — 0.112 | 0.000 0911 | 16 | 9.981 2563 | 1614 |
| — 0.111 | 0.000 0895 | 15 | 9.981 4177 | 1614 |
| — 0.110 | 0.000 0880 | — 16 | 9.981 5791 | 1615 |
| — 0.109 | 0.000 0864 | 16 | 9.981 7406 | 1617 |
| — 0.108 | 0.000 0848 | 15 | 9.981 9023 | 1617 |
| — 0.107 | 0.000 0833 | 16 | 9.982 0640 | 1619 |
| — 0.106 | 0.000 0817 | 15 | 9.982 2259 | 1619 |
| — 0.105 | 0.000 0802 | — 15 | 9.982 3878 | 1621 |
| — 0.104 | 0.000 0787 | 15 | 9.982 5499 | 1622 |
| — 0.103 | 0.000 0772 | 14 | 9.982 7121 | 1622 |
| — 0.102 | 0.000 0758 | 15 | 9.982 8743 | 1624 |
| — 0.101 | 0.000 0743 | 15 | 9.983 0367 | 1625 |
| — 0.100 | 0.000 0728 | — 14 | 9.983 1992 | 1626 |
| — 0.099 | 0.000 0714 | 14 | 9.983 3618 | 1627 |
| — 0 098 | 0.000 0700 | 14 | 9.983 5245 | 1628 |
| — 0.097 | 0.000 0686 | 14 | 9.983 6873 | 1629 |
| — 0.096 | 0.000 0672 | 14 | 9.983 8502 | 1630 |
| — 0.095 | 0.000 0658 | — 13 | 9.984 0132 | 1631 |
| — 0.094 | 0.000 0645 | 14 | 9.984 1763 | 1632 |
| — 0.093 | 0.000 0631 | 13 | 9.984 3395 | 1633 |
| — 0.092 | 0.000 0618 | 14 | 9.984 5028 | 1635 |
| — 0.091 | 0.000 0604 | 13 | 9.984 6663 | 1635 |
| — 0.090 | 0.000 0591 | — 13 | 9.984 8298 | 1636 |
| — 0.089 | 0.000 0578 | 12 | 9.984 9934 | 1638 |
| — 0.088 | 0.000 0566 | 13 | 9.985 1572 | 1639 |
| — 0.087 | 0.000 0553 | 13 | 9.985 3211 | 1639 |
| — 0.086 | 0.000 0540 | 12 | 9.985 4850 | 1641 |
| — 0.085 | 0.000 0528 | — 12 | 9.985 6491 | 1642 |
| — 0.084 | 0.000 0516 | 12 | 9.985 8133 | 1643 |
| — 0.083 | 0 000 0504 | 12 | 9.985 9776 | 1644 |
| — 0.082 | 0.000 0492 | 12 | 9.986 1420 | 1645 |
| — 0.081 | 0.000 0480 | 12 | 9.986 3065 | 1646 |
| — 0.080 | 0.000 0468 | — 11 | 9.986 4711 | 1647 |
| — 0.079 | 0.000 0457 | 12 | 9.986 6358 | 1648 |
| — 0.078 | 0.000 0445 | 11 | 9.986 8006 | 1650 |
| — 0.077 | 0.000 0434 | 11 | 9.986 9656 | 1650 |
| — 0.076 | 0.000 0423 | 11 | 9.987 1306 | 1652 |
| — 0.075 | 0.000 0412 | — 11 | 9.987 2958 | 1652 |
| — 0.074 | 0.000 0401 | 11 | 9.987 4610 | 1654 |
| — 0.073 | 0.000 0390 | 10 | 9.987 6264 | 1654 |
| — 0.072 | 0.000 0380 | 10 | 9.987 7918 | 1656 |
| — 0.071 | 0.000 0370 | 11 | 9.987 9574 | 1657 |
| — 0.070 | 0.000 0359 | — 10 | 9.988 1231 | 1658 |
| — 0.069 | 0.000 0349 | 10 | 9.988 2889 | 1659 |
| — 0.068 | 0.000 0339 | 10 | 9.988 4548 | 1660 |
| — 0.067 | 0.000 0329 | 9 | 9.988 6208 | 1661 |
| — 0.066 | 0.000 0320 | 10 | 9.988 7869 | 1663 |
| — 0.065 | 0.000 0310 | — 9 | 9.988 9532 | 1663 |
| — 0.064 | 0.000 0301 | 10 | 9.989 1195 | 1665 |
| — 0.063 | 0.000 0291 | 9 | 9.989 2860 | 1665 |
| — 0.062 | 0.000 0282 | 9 | 9.989 4525 | 1667 |
| — 0.061 | 0.000 0273 | 8 | 9.989 6192 | 1668 |
| — 0.060 | 0.000 0265 | | 9.989 7860 | |

## Tafel VII.

| A | log B | Diff. | log C | Diff. | A | log B | Diff. | log C | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 0.060 | 0.000 0265 | — 9 | 9.989 7860 | 1669 | 0.000 | 0.000 0000 | 0 | 0.000 0000 | 1738 |
| — 0.059 | 0.000 0256 | 9 | 9.989 9529 | 1670 | + 0.001 | 0.000 0000 | 0 | 0.000 1738 | 1739 |
| — 0.058 | 0.000 0247 | 8 | 9.990 1199 | 1671 | + 0.002 | 0.000 0000 | 1 | 0.000 3477 | 1740 |
| — 0.057 | 0.000 0239 | 8 | 9.990 2870 | 1672 | + 0.003 | 0.000 0001 | 0 | 0.000 5217 | 1741 |
| — 0.056 | 0.000 0231 | 8 | 9.990 4542 | 1674 | + 0.004 | 0.000 0001 | 1 | 0.000 6958 | 1743 |
| — 0.055 | 0.000 0223 | — 8 | 9.990 6216 | 1674 | + 0.005 | 0.000 0002 | 1 | 0.000 8701 | 1744 |
| — 0.054 | 0.000 0215 | 8 | 9.990 7890 | 1675 | + 0.006 | 0.000 0003 | 1 | 0.001 0445 | 1745 |
| — 0.053 | 0.000 0207 | 8 | 9.990 9565 | 1677 | + 0.007 | 0.000 0004 | 1 | 0.001 2190 | 1746 |
| — 0.052 | 0.000 0199 | 8 | 9.991 1242 | 1678 | + 0.008 | 0.000 0005 | 1 | 0.001 3936 | 1747 |
| — 0.051 | 0.000 0191 | 7 | 9.991 2920 | 1679 | + 0.009 | 0.000 0006 | 1 | 0.001 5683 | 1748 |
| — 0.050 | 0.000 0184 | — 7 | 9.991 4599 | 1680 | + 0.010 | 0.000 0007 | 2 | 0.001 7431 | 1750 |
| — 0.049 | 0.000 0177 | 7 | 9.991 6279 | 1681 | + 0.011 | 0.000 0009 | 2 | 0.001 9181 | 1751 |
| — 0.048 | 0.000 0170 | 7 | 9.991 7960 | 1682 | + 0.012 | 0.000 0011 | 2 | 0.002 0932 | 1752 |
| — 0.047 | 0.000 0163 | 7 | 9.991 9642 | 1684 | + 0.013 | 0.000 0013 | 2 | 0.002 2684 | 1754 |
| — 0.046 | 0.000 0156 | 7 | 9.992 1326 | 1684 | + 0.014 | 0.000 0015 | 2 | 0.002 4438 | 1755 |
| — 0.045 | 0.000 0149 | — 6 | 9.992 3010 | 1686 | + 0.015 | 0.000 0017 | 2 | 0.002 6193 | 1756 |
| — 0.044 | 0.000 0143 | 7 | 9.992 4696 | 1687 | + 0.016 | 0.000 0019 | 3 | 0.002 7949 | 1756 |
| — 0.043 | 0.000 0136 | 6 | 9.992 6383 | 1688 | + 0.017 | 0.000 0022 | 2 | 0.002 9705 | 1759 |
| — 0.042 | 0.000 0130 | 6 | 9.992 8071 | 1689 | + 0.018 | 0.000 0024 | 3 | 0.003 1464 | 1759 |
| — 0.041 | 0.000 0124 | 6 | 9.992 9760 | 1690 | + 0.019 | 0.000 0027 | 3 | 0.003 3223 | 1761 |
| — 0.040 | 0.000 0118 | — 6 | 9.993 1450 | 1691 | + 0.020 | 0.000 0030 | 3 | 0.003 4984 | 1762 |
| — 0.039 | 0.000 0112 | 5 | 9.993 3141 | 1693 | + 0.021 | 0.000 0033 | 3 | 0.003 6746 | 1763 |
| — 0.038 | 0.000 0107 | 6 | 9.993 4834 | 1693 | + 0.022 | 0.000 0036 | 4 | 0.003 8509 | 1764 |
| — 0.037 | 0.000 0101 | 5 | 9.993 6527 | 1695 | + 0.023 | 0.000 0040 | 3 | 0.004 0273 | 1766 |
| — 0.036 | 0.000 0096 | 5 | 9.993 8222 | 1696 | + 0.024 | 0.000 0043 | 4 | 0.004 2039 | 1767 |
| — 0.035 | 0.000 0091 | — 6 | 9.993 9918 | 1697 | + 0.025 | 0.000 0047 | 4 | 0.004 3806 | 1768 |
| — 0.034 | 0.000 0085 | 5 | 9.994 1615 | 1698 | + 0.026 | 0.000 0051 | 4 | 0.004 5574 | 1769 |
| — 0.033 | 0.000 0080 | 4 | 9.994 3313 | 1699 | + 0.027 | 0.000 0055 | 4 | 0.004 7343 | 1771 |
| — 0.032 | 0.000 0076 | 5 | 9.994 5012 | 1700 | + 0.028 | 0.000 0059 | 4 | 0.004 9114 | 1772 |
| — 0.031 | 0.000 0071 | 4 | 9.994 6712 | 1702 | + 0.029 | 0.000 0063 | 4 | 0.005 0886 | 1772 |
| — 0.030 | 0.000 0067 | — 5 | 9.994 8414 | 1703 | + 0.030 | 0.000 0067 | 5 | 0.005 2658 | 1774 |
| — 0.029 | 0.000 0062 | 4 | 9.995 0117 | 1704 | + 0.031 | 0.000 0072 | 5 | 0.005 4432 | 1776 |
| — 0.028 | 0.000 0058 | 4 | 9.995 1821 | 1705 | + 0.032 | 0.000 0077 | 5 | 0.005 6208 | 1777 |
| — 0.027 | 0.000 0054 | 4 | 9.995 3526 | 1706 | + 0.033 | 0.000 0082 | 5 | 0.005 7985 | 1778 |
| — 0.026 | 0.000 0050 | 4 | 9.995 5232 | 1707 | + 0.034 | 0.000 0087 | 5 | 0.005 9763 | 1779 |
| — 0.025 | 0.000 0046 | — 3 | 9.995 6939 | 1709 | + 0.035 | 0.000 0092 | 5 | 0.006 1542 | 1780 |
| — 0.024 | 0.000 0043 | 4 | 9.995 8648 | 1709 | + 0.036 | 0.000 0097 | 6 | 0.006 3322 | 1782 |
| — 0.023 | 0.000 0039 | 3 | 9.996 0357 | 1711 | + 0.037 | 0.000 0103 | 5 | 0.006 5104 | 1783 |
| — 0.022 | 0.000 0036 | 3 | 9.996 2068 | 1712 | + 0.038 | 0.000 0108 | 6 | 0.006 6887 | 1784 |
| — 0.021 | 0.000 0033 | 3 | 9.996 3780 | 1713 | + 0.039 | 0.000 0114 | 6 | 0.006 8671 | 1786 |
| — 0.020 | 0.000 0030 | — 3 | 9.996 5493 | 1714 | + 0.040 | 0.000 0120 | 6 | 0.007 0457 | 1787 |
| — 0.019 | 0.000 0027 | 3 | 9.996 7207 | 1716 | + 0.041 | 0.000 0126 | 7 | 0.007 2244 | 1788 |
| — 0.018 | 0.000 0024 | 3 | 9.996 8923 | 1716 | + 0.042 | 0.000 0133 | 6 | 0.007 4032 | 1789 |
| — 0.017 | 0.000 0021 | 2 | 9.997 0639 | 1718 | + 0.043 | 0.000 0139 | 7 | 0.007 5821 | 1790 |
| — 0.016 | 0.000 0019 | 2 | 9.997 2357 | 1719 | + 0.044 | 0.000 0146 | 6 | 0.007 7611 | 1792 |
| — 0.015 | 0.000 0017 | — 2 | 9.997 4076 | 1720 | + 0.045 | 0.000 0152 | 7 | 0.007 9403 | 1793 |
| — 0.014 | 0.000 0015 | 2 | 9.997 5796 | 1721 | + 0.046 | 0.000 0159 | 7 | 0.008 1196 | 1794 |
| — 0.013 | 0.000 0013 | 2 | 9.997 7517 | 1723 | + 0.047 | 0.000 0166 | 7 | 0.008 2990 | 1796 |
| — 0.012 | 0.000 0011 | 2 | 9.997 9240 | 1723 | + 0.048 | 0.000 0173 | 8 | 0.008 4786 | 1797 |
| — 0.011 | 0.000 0009 | 2 | 9.998 0963 | 1725 | + 0.049 | 0.000 0181 | 7 | 0.008 6583 | 1798 |
| — 0.010 | 0.000 0007 | — 1 | 9.998 2688 | 1726 | + 0.050 | 0.000 0188 | 8 | 0.008 8381 | 1800 |
| — 0.009 | 0.000 0006 | 1 | 9.998 4414 | 1727 | + 0.051 | 0.000 0196 | 8 | 0.009 0181 | 1800 |
| — 0.008 | 0.000 0005 | 1 | 9.998 6141 | 1728 | + 0.052 | 0.000 0204 | 8 | 0.009 1981 | 1802 |
| — 0.007 | 0.000 0004 | 1 | 9.998 7869 | 1730 | + 0.053 | 0.000 0212 | 8 | 0.009 3783 | 1803 |
| — 0.006 | 0.000 0003 | 1 | 9.998 9599 | 1730 | + 0.054 | 0.000 0220 | 8 | 0.009 5586 | 1805 |
| — 0.005 | 0.000 0002 | — 1 | 9.999 1329 | 1732 | + 0.055 | 0.000 0228 | 8 | 0.009 7391 | 1805 |
| — 0.004 | 0.000 0001 | 0 | 9.999 3061 | 1733 | + 0.056 | 0.000 0236 | 9 | 0.009 9196 | 1807 |
| — 0.003 | 0.000 0001 | — 1 | 9.999 4794 | 1734 | + 0.057 | 0.000 0245 | 9 | 0.010 1003 | 1809 |
| — 0.002 | 0.000 0000 | 0 | 9.999 6528 | 1735 | + 0.058 | 0.000 0254 | 9 | 0.010 2812 | 1809 |
| — 0.001 | 0.000 0000 | 0 | 9.999 8263 | 1737 | + 0.059 | 0.000 0263 | 9 | 0.010 4621 | 1811 |
| 0.000 | 0.000 0000 | | 0.000 0000 | | + 0.060 | 0.000 0272 | | 0.010 6432 | |

# Tafel VII.

| $A$ | $\log B$ | Diff. | $\log C$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| + 0.060 | 0.000 0272 | 9 | 0.010 6432 | 1812 |
| + 0.061 | 0.000 0281 | 9 | 0.010 8244 | 1814 |
| + 0.062 | 0.000 0290 | 10 | 0.011 0058 | 1815 |
| + 0.063 | 0.000 0300 | 9 | 0.011 1873 | 1816 |
| + 0.064 | 0.000 0309 | 10 | 0.011 3689 | 1817 |
| + 0.065 | 0.000 0319 | 10 | 0.011 5506 | 1819 |
| + 0.066 | 0.000 0329 | 10 | 0.011 7325 | 1820 |
| + 0.067 | 0.000 0339 | 11 | 0.011 9145 | 1821 |
| + 0.068 | 0.000 0350 | 10 | 0.012 0966 | 1823 |
| + 0.069 | 0.000 0360 | 11 | 0.012 2789 | 1824 |
| + 0.070 | 0.000 0371 | 10 | 0.012 4613 | 1825 |
| + 0.071 | 0.000 0381 | 11 | 0.012 6438 | 1826 |
| + 0.072 | 0.000 0392 | 11 | 0.012 8264 | 1828 |
| + 0.073 | 0.000 0403 | 12 | 0.013 0092 | 1830 |
| + 0.074 | 0.000 0415 | 11 | 0.013 1922 | 1830 |
| + 0.075 | 0.000 0426 | 11 | 0.013 3752 | 1832 |
| + 0.076 | 0.000 0437 | 12 | 0.013 5584 | 1832 |
| + 0.077 | 0.000 0449 | 12 | 0.013 7416 | 1835 |
| + 0.078 | 0.000 0461 | 12 | 0.013 9251 | 1836 |
| + 0.079 | 0.000 0473 | 12 | 0.014 1087 | 1837 |
| + 0.080 | 0.000 0485 | 13 | 0.014 2924 | 1838 |
| + 0.081 | 0.000 0498 | 12 | 0.014 4762 | 1840 |
| + 0.082 | 0.000 0510 | 13 | 0.014 6602 | 1841 |
| + 0.083 | 0.000 0523 | 12 | 0.014 8443 | 1842 |
| + 0.084 | 0.000 0535 | 13 | 0.015 0285 | 1844 |
| + 0.085 | 0.000 0548 | 13 | 0.015 2129 | 1845 |
| + 0.086 | 0.000 0561 | 14 | 0.015 3974 | 1846 |
| + 0.087 | 0.000 0575 | 13 | 0.015 5820 | 1848 |
| + 0.088 | 0.000 0588 | 14 | 0.015 7668 | 1849 |
| + 0.089 | 0.000 0602 | 13 | 0.015 9517 | 1850 |
| + 0.090 | 0.000 0615 | 14 | 0.016 1367 | 1852 |
| + 0.091 | 0.000 0629 | 14 | 0.016 3219 | 1853 |
| + 0.092 | 0.000 0643 | 15 | 0.016 5072 | 1854 |
| + 0.093 | 0.000 0658 | 14 | 0.016 6926 | 1856 |
| + 0.094 | 0.000 0672 | 15 | 0.016 8782 | 1857 |
| + 0.095 | 0.000 0687 | 14 | 0.017 0639 | 1858 |
| + 0.096 | 0.000 0701 | 15 | 0.017 2497 | 1860 |
| + 0.097 | 0.000 0716 | 15 | 0.017 4357 | 1862 |
| + 0.098 | 0.000 0731 | 15 | 0.017 6219 | 1862 |
| + 0.099 | 0.000 0746 | 16 | 0.017 8081 | 1864 |
| + 0.100 | 0.000 0762 | 15 | 0.017 9945 | 1865 |
| + 0.101 | 0.000 0777 | 16 | 0.018 1810 | 1867 |
| + 0.102 | 0.000 0793 | 16 | 0.018 3677 | 1868 |
| + 0.103 | 0.000 0809 | 16 | 0.018 5545 | 1869 |
| + 0.104 | 0.000 0825 | 16 | 0.018 7414 | 1871 |
| + 0.105 | 0.000 0841 | 16 | 0.018 9285 | 1872 |
| + 0.106 | 0.000 0857 | 16 | 0.019 1157 | 1873 |
| + 0.107 | 0.000 0873 | 17 | 0.019 3030 | 1875 |
| + 0.108 | 0.000 0890 | 17 | 0.019 4905 | 1876 |
| + 0.109 | 0.000 0907 | 17 | 0.019 6781 | 1878 |
| + 0.110 | 0.000 0924 | 17 | 0.019 8659 | 1879 |
| + 0.111 | 0.000 0941 | 17 | 0.020 0538 | 1880 |
| + 0.112 | 0.000 0958 | 17 | 0.020 2418 | 1882 |
| + 0.113 | 0.000 0975 | 18 | 0.020 4300 | 1883 |
| + 0.114 | 0.000 0993 | 18 | 0.020 6183 | 1885 |
| + 0.115 | 0.000 1011 | 18 | 0.020 8068 | 1885 |
| + 0.116 | 0.000 1029 | 18 | 0.020 9953 | 1888 |
| + 0.117 | 0.000 1047 | 18 | 0.021 1841 | 1888 |
| + 0.118 | 0.000 1065 | 18 | 0.021 3729 | 1890 |
| + 0.119 | 0.000 1083 | 19 | 0.021 5619 | 1892 |
| + 0.120 | 0.000 1102 | | 0.021 7511 | |

| $A$ | $\log B$ | Diff. | $\log C$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| + 0.120 | 0.000 1102 | 19 | 0.021 7511 | 1893 |
| + 0.121 | 0.000 1121 | 18 | 0.021 9404 | 1894 |
| + 0.122 | 0.000 1139 | 19 | 0.022 1298 | 1896 |
| + 0.123 | 0.000 1158 | 20 | 0.022 3194 | 1897 |
| + 0.124 | 0.000 1178 | 19 | 0.022 5091 | 1899 |
| + 0.125 | 0.000 1197 | 20 | 0.022 6990 | 1899 |
| + 0.126 | 0.000 1217 | 19 | 0.022 8889 | 1902 |
| + 0.127 | 0.000 1236 | 20 | 0.023 0791 | 1903 |
| + 0.128 | 0.000 1256 | 20 | 0.023 2694 | 1904 |
| + 0.129 | 0.000 1276 | 20 | 0.023 4598 | 1905 |
| + 0.130 | 0.000 1296 | 21 | 0.023 6503 | 1907 |
| + 0.131 | 0.000 1317 | 20 | 0.023 8410 | 1909 |
| + 0.132 | 0.000 1337 | 21 | 0.024 0319 | 1910 |
| + 0.133 | 0.000 1358 | 20 | 0.024 2229 | 1911 |
| + 0.134 | 0.000 1378 | 21 | 0.024 4140 | 1913 |
| + 0.135 | 0.000 1399 | 22 | 0.024 6053 | 1914 |
| + 0.136 | 0.000 1421 | 21 | 0.024 7967 | 1915 |
| + 0.137 | 0.000 1442 | 21 | 0.024 9882 | 1917 |
| + 0.138 | 0.000 1463 | 22 | 0.025 1799 | 1919 |
| + 0.139 | 0.000 1485 | 22 | 0.025 3718 | 1920 |
| + 0.140 | 0.000 1507 | 22 | 0.025 5638 | 1921 |
| + 0.141 | 0.000 1529 | 22 | 0.025 7559 | 1923 |
| + 0.142 | 0.000 1551 | 22 | 0.025 9482 | 1924 |
| + 0.143 | 0.000 1573 | 23 | 0.026 1406 | 1925 |
| + 0.144 | 0.000 1596 | 22 | 0.026 3331 | 1928 |
| + 0.145 | 0.000 1618 | 23 | 0.026 5259 | 1928 |
| + 0.146 | 0.000 1641 | 23 | 0.026 7187 | 1930 |
| + 0.147 | 0.000 1664 | 23 | 0.026 9117 | 1932 |
| + 0.148 | 0.000 1687 | 23 | 0.027 1049 | 1932 |
| + 0.149 | 0.000 1710 | 24 | 0.027 2981 | 1935 |
| + 0.150 | 0.000 1734 | 23 | 0.027 4916 | 1936 |
| + 0.151 | 0.000 1757 | 24 | 0.027 6852 | 1937 |
| + 0.152 | 0.000 1781 | 24 | 0.027 8789 | 1939 |
| + 0.153 | 0.000 1805 | 24 | 0.028 0728 | 1940 |
| + 0.154 | 0.000 1829 | 25 | 0.028 2668 | 1942 |
| + 0.155 | 0.000 1854 | 24 | 0.028 4610 | 1943 |
| + 0.156 | 0.000 1878 | 25 | 0.028 6553 | 1945 |
| + 0.157 | 0.000 1903 | 24 | 0.028 8498 | 1945 |
| + 0.158 | 0.000 1927 | 25 | 0.029 0443 | 1948 |
| + 0.159 | 0.000 1952 | 25 | 0.029 2391 | 1949 |
| + 0.160 | 0.000 1977 | 26 | 0.029 4340 | 1951 |
| + 0.161 | 0.000 2003 | 25 | 0.029 6291 | 1952 |
| + 0.162 | 0.000 2028 | 26 | 0.029 8243 | 1954 |
| + 0.163 | 0.000 2054 | 26 | 0.030 0197 | 1954 |
| + 0.164 | 0.000 2080 | 26 | 0.030 2151 | 1957 |
| + 0.165 | 0.000 2106 | 26 | 0.030 4108 | 1958 |
| + 0.166 | 0.000 2132 | 26 | 0.030 6066 | 1959 |
| + 0.167 | 0.000 2158 | 26 | 0.030 8025 | 1961 |
| + 0.168 | 0.000 2184 | 27 | 0.030 9986 | 1963 |
| + 0.169 | 0.000 2211 | 27 | 0.031 1949 | 1964 |
| + 0.170 | 0.000 2238 | 27 | 0.031 3913 | 1966 |
| + 0.171 | 0.000 2265 | 27 | 0.031 5879 | 1967 |
| + 0.172 | 0.000 2292 | 27 | 0.031 7846 | 1968 |
| + 0.173 | 0.000 2319 | 28 | 0.031 9814 | 1970 |
| + 0.174 | 0.000 2347 | 27 | 0.032 1784 | 1972 |
| + 0.175 | 0.000 2374 | 28 | 0.032 3756 | 1973 |
| + 0.176 | 0.000 2402 | 28 | 0.032 5729 | 1974 |
| + 0.177 | 0.000 2430 | 28 | 0.032 7703 | 1976 |
| + 0.178 | 0.000 2458 | 28 | 0.032 9679 | 1978 |
| + 0.179 | 0.000 2486 | 29 | 0.033 1657 | 1979 |
| + 0.180 | 0.000 2515 | | 0.033 3636 | |

## Tafel VII.

| A | log B | Diff. | log C | Diff. | A | log B | Diff. | log C | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + 0.180 | 0.000 2515 | 28 | 0.033 3636 | 1981 | + 0.240 | 0.000 4537 | 39 | 0.045 5259 | 2076 |
| + 0.181 | 0.000 2543 | 29 | 0.033 5617 | 1982 | + 0.241 | 0.000 4576 | 39 | 0.045 7335 | 2078 |
| + 0.182 | 0.000 2572 | 29 | 0.033 7599 | 1984 | + 0.242 | 0.000 4615 | 39 | 0.045 9413 | 2080 |
| + 0.183 | 0.000 2601 | 29 | 0.033 9583 | 1985 | + 0.243 | 0.000 4654 | 40 | 0.046 1493 | 2082 |
| + 0.184 | 0.000 2630 | 30 | 0.034 1568 | 1987 | + 0.244 | 0.000 4694 | 40 | 0.046 3575 | 2083 |
| + 0.185 | 0.000 2660 | 29 | 0.034 3555 | 1988 | + 0.245 | 0.000 4734 | 40 | 0.046 5658 | 2085 |
| + 0.186 | 0.000 2689 | 30 | 0.034 5543 | 1990 | + 0.246 | 0.000 4774 | 40 | 0.046 7743 | 2086 |
| + 0.187 | 0.000 2719 | 30 | 0.034 7533 | 1991 | + 0.247 | 0.000 4814 | 40 | 0.046 9829 | 2088 |
| + 0.188 | 0.000 2749 | 30 | 0.034 9524 | 1993 | + 0.248 | 0.000 4854 | 40 | 0.047 1917 | 2090 |
| + 0.189 | 0.000 2779 | 30 | 0.035 1517 | 1995 | + 0.249 | 0.000 4894 | 41 | 0.047 4007 | 2092 |
| + 0.190 | 0.000 2809 | 30 | 0.035 3512 | 1995 | + 0.250 | 0.000 4935 | 41 | 0.047 6099 | 2093 |
| + 0.191 | 0.000 2839 | 31 | 0.035 5507 | 1998 | + 0.251 | 0.000 4976 | 41 | 0.047 8192 | 2095 |
| + 0.192 | 0.000 2870 | 30 | 0.035 7505 | 2000 | + 0.252 | 0.000 5017 | 41 | 0.048 0287 | 2097 |
| + 0.193 | 0.000 2900 | 31 | 0.035 9505 | 2000 | + 0.253 | 0.000 5058 | 41 | 0.048 2384 | 2098 |
| + 0.194 | 0.000 2931 | 31 | 0.036 1505 | 2002 | + 0.254 | 0.000 5099 | 42 | 0.048 4482 | 2100 |
| + 0.195 | 0.000 2962 | 31 | 0.036 3507 | 2004 | + 0.255 | 0.000 5141 | 41 | 0.048 6582 | 2102 |
| + 0.196 | 0.000 2993 | 32 | 0.036 5511 | 2006 | + 0.256 | 0.000 5182 | 42 | 0.048 8684 | 2104 |
| + 0.197 | 0.000 3025 | 31 | 0.036 7517 | 2007 | + 0.257 | 0.000 5224 | 42 | 0.049 0788 | 2105 |
| + 0.198 | 0.000 3056 | 32 | 0.036 9524 | 2008 | + 0.258 | 0.000 5266 | 43 | 0.049 2893 | 2107 |
| + 0.199 | 0.000 3088 | 32 | 0.037 1532 | 2010 | + 0.259 | 0.000 5309 | 42 | 0.049 5000 | 2108 |
| + 0.200 | 0.000 3120 | 32 | 0.037 3542 | 2012 | + 0.260 | 0.000 5351 | 43 | 0.049 7108 | 2111 |
| + 0.201 | 0.000 3152 | 32 | 0.037 5554 | 2013 | + 0.261 | 0.000 5394 | 42 | 0.049 9219 | 2112 |
| + 0.202 | 0.000 3184 | 32 | 0.037 7567 | 2015 | + 0.262 | 0.000 5436 | 43 | 0.050 1331 | 2114 |
| + 0.203 | 0.000 3216 | 33 | 0.037 9582 | 2016 | + 0.263 | 0.000 5479 | 43 | 0.050 3445 | 2115 |
| + 0.204 | 0.000 3249 | 33 | 0.038 1598 | 2018 | + 0.264 | 0.000 5522 | 44 | 0.050 5560 | 2117 |
| + 0.205 | 0.000 3282 | 33 | 0.038 3616 | 2020 | + 0.265 | 0.000 5566 | 43 | 0.050 7677 | 2119 |
| + 0.206 | 0.000 3315 | 33 | 0.038 5636 | 2021 | + 0.266 | 0.000 5609 | 44 | 0.050 9796 | 2121 |
| + 0.207 | 0.000 3348 | 33 | 0.038 7657 | 2022 | + 0.267 | 0.000 5653 | 44 | 0.051 1917 | 2123 |
| + 0.208 | 0.000 3381 | 33 | 0.038 9679 | 2025 | + 0.268 | 0.000 5697 | 44 | 0.051 4040 | 2124 |
| + 0.209 | 0.000 3414 | 34 | 0.039 1704 | 2026 | + 0.269 | 0.000 5741 | 44 | 0.051 6164 | 2126 |
| + 0.210 | 0.000 3448 | 34 | 0.039 3730 | 2027 | + 0.270 | 0.000 5785 | 44 | 0.051 8290 | 2128 |
| + 0.211 | 0.000 3482 | 34 | 0.039 5757 | 2029 | + 0.271 | 0.000 5829 | 45 | 0.052 0418 | 2129 |
| + 0.212 | 0.000 3516 | 34 | 0.039 7786 | 2031 | + 0.272 | 0.000 5874 | 45 | 0.052 2547 | 2131 |
| + 0.213 | 0.000 3550 | 34 | 0.039 9817 | 2032 | + 0.273 | 0.000 5919 | 45 | 0.052 4678 | 2133 |
| + 0.214 | 0.000 3584 | 34 | 0.040 1849 | 2034 | + 0.274 | 0.000 5964 | 45 | 0.052 6811 | 2135 |
| + 0.215 | 0.000 3618 | 35 | 0.040 3883 | 2036 | + 0.275 | 0.000 6009 | 45 | 0.052 8946 | 2136 |
| + 0.216 | 0.000 3653 | 35 | 0.040 5919 | 2037 | + 0.276 | 0.000 6054 | 46 | 0.053 1082 | 2139 |
| + 0.217 | 0.000 3688 | 35 | 0.040 7956 | 2038 | + 0.277 | 0.000 6100 | 45 | 0.053 3221 | 2139 |
| + 0.218 | 0.000 3723 | 35 | 0.040 9994 | 2041 | + 0.278 | 0.000 6145 | 46 | 0.053 5360 | 2142 |
| + 0.219 | 0.000 3758 | 35 | 0.041 2035 | 2042 | + 0.279 | 0.000 6191 | 46 | 0.053 7502 | 2144 |
| + 0.220 | 0.000 3793 | 36 | 0.041 4077 | 2043 | + 0.280 | 0.000 6237 | 46 | 0.053 9646 | 2145 |
| + 0.221 | 0.000 3829 | 36 | 0.041 6120 | 2046 | + 0.281 | 0.000 6283 | 47 | 0.054 1791 | 2147 |
| + 0.222 | 0.000 3865 | 35 | 0.041 8166 | 2046 | + 0.282 | 0.000 6330 | 46 | 0.054 3938 | 2149 |
| + 0.223 | 0.000 3900 | 36 | 0.042 0212 | 2049 | + 0.283 | 0.000 6376 | 47 | 0.054 6087 | 2151 |
| + 0.224 | 0.000 3936 | 37 | 0.042 2261 | 2050 | + 0.284 | 0.000 6423 | 47 | 0.054 8238 | 2152 |
| + 0.225 | 0.000 3973 | 36 | 0.042 4311 | 2051 | + 0.285 | 0.000 6470 | 47 | 0.055 0390 | 2154 |
| + 0.226 | 0.000 4009 | 37 | 0.042 6362 | 2054 | + 0.286 | 0.000 6517 | 47 | 0.055 2544 | 2156 |
| + 0.227 | 0.000 4046 | 36 | 0.042 8416 | 2055 | + 0.287 | 0.000 6564 | 48 | 0.055 4700 | 2158 |
| + 0.228 | 0.000 4082 | 37 | 0.043 0471 | 2056 | + 0.288 | 0.000 6612 | 48 | 0.055 6858 | 2160 |
| + 0.229 | 0.000 4119 | 37 | 0.043 2527 | 2058 | + 0.289 | 0.000 6660 | 48 | 0.055 9018 | 2161 |
| + 0.230 | 0.000 4156 | 38 | 0.043 4585 | 2061 | + 0.290 | 0.000 6708 | 48 | 0.056 1179 | 2163 |
| + 0.231 | 0.000 4194 | 37 | 0.043 6646 | 2061 | + 0.291 | 0.000 6756 | 48 | 0.056 3342 | 2166 |
| + 0.232 | 0.000 4231 | 38 | 0.043 8707 | 2063 | + 0.292 | 0.000 6804 | 48 | 0.056 5508 | 2166 |
| + 0.233 | 0.000 4269 | 37 | 0.044 0770 | 2065 | + 0.293 | 0.000 6852 | 49 | 0.056 7674 | 2169 |
| + 0.234 | 0.000 4306 | 38 | 0.044 2835 | 2067 | + 0.294 | 0.000 6901 | 49 | 0.056 9843 | 2170 |
| + 0.235 | 0.000 4344 | 38 | 0.044 4902 | 2068 | + 0.295 | 0.000 6950 | 49 | 0.057 2013 | 2173 |
| + 0.236 | 0.000 4382 | 39 | 0.044 6970 | 2070 | + 0.296 | 0.000 6999 | 49 | 0.057 4186 | 2173 |
| + 0.237 | 0.000 4421 | 38 | 0.044 9040 | 2071 | + 0.297 | 0.000 7048 | 49 | 0.057 6359 | 2176 |
| + 0.238 | 0.000 4459 | 39 | 0.045 1111 | 2073 | + 0.298 | 0.000 7097 | 50 | 0.057 8535 | 2178 |
| + 0.239 | 0.000 4498 | 39 | 0.045 3184 | 2075 | + 0.299 | 0.000 7147 | 49 | 0.058 0713 | 2180 |
| + 0.240 | 0.000 4537 | | 0.045 5259 | | + 0.300 | 0.000 7196 | | 0.058 2893 | |

## Tafel VIII (vergl. pag. 103).

| $\eta$ | $\log\mu$ | Diff. | $\eta$ | $\log\mu$ | Diff. | $\eta$ | $\log\mu$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 0.000 0000 | 0 | 0.060 | 0.000 0652 | 22 | 0.120 | 0.000 2617 | 44 |
| 001 | 000 0000 | 1 | 061 | 000 0674 | 23 | 121 | 000 2661 | 44 |
| 002 | 000 0001 | 1 | 062 | 000 0697 | 22 | 122 | 000 2705 | 45 |
| 003 | 000 0002 | 1 | 063 | 000 0719 | 23 | 123 | 000 2750 | 45 |
| 004 | 000 0003 | 1 | 064 | 000 0742 | 24 | 124 | 000 2795 | 46 |
| 0.005 | 0.000 0004 | 2 | 0.065 | 0.000 0766 | 24 | 0.125 | 0.000 2841 | 45 |
| 006 | 000 0006 | 3 | 066 | 000 0790 | 24 | 126 | 000 2886 | 47 |
| 007 | 000 0009 | 3 | 067 | 000 0814 | 24 | 127 | 000 2933 | 46 |
| 008 | 000 0012 | 3 | 068 | 000 0838 | 25 | 128 | 000 2979 | 47 |
| 009 | 000 0015 | 3 | 069 | 000 0863 | 25 | 129 | 000 3026 | 48 |
| 0.010 | 0.000 0018 | 4 | 0.070 | 0.000 0888 | 26 | 0.130 | 0.000 3074 | 47 |
| 011 | 000 0022 | 4 | 071 | 000 0914 | 26 | 131 | 000 3121 | 48 |
| 012 | 000 0026 | 5 | 072 | 000 0940 | 26 | 132 | 000 3169 | 49 |
| 013 | 000 0031 | 4 | 073 | 000 0966 | 27 | 133 | 000 3218 | 49 |
| 014 | 000 0035 | 6 | 074 | 000 0993 | 27 | 134 | 000 3267 | 49 |
| 0.015 | 0.000 0041 | 5 | 0.075 | 0.000 1020 | 27 | 0.135 | 0.000 3316 | 49 |
| 016 | 000 0046 | 6 | 076 | 000 1047 | 28 | 136 | 000 3365 | 50 |
| 017 | 000 0052 | 7 | 077 | 000 1075 | 28 | 137 | 000 3415 | 51 |
| 018 | 000 0059 | 6 | 078 | 000 1103 | 29 | 138 | 000 3466 | 50 |
| 019 | 000 0065 | 7 | 079 | 000 1132 | 29 | 139 | 000 3516 | 51 |
| 0.020 | 0.000 0072 | 8 | 0.080 | 0.000 1161 | 29 | 0.140 | 0.000 3567 | 52 |
| 021 | 000 0080 | 8 | 081 | 000 1190 | 29 | 141 | 000 3619 | 52 |
| 022 | 000 0088 | 8 | 082 | 000 1219 | 30 | 142 | 000 3671 | 52 |
| 023 | 000 0096 | 8 | 083 | 000 1249 | 31 | 143 | 000 3723 | 52 |
| 024 | 000 0104 | 9 | 084 | 000 1280 | 31 | 144 | 000 3775 | 53 |
| 0.025 | 0.000 0113 | 9 | 0.085 | 0.000 1311 | 31 | 0.145 | 0.000 3828 | 54 |
| 026 | 000 0122 | 10 | 086 | 000 1342 | 31 | 146 | 000 3882 | 53 |
| 027 | 000 0132 | 10 | 087 | 000 1373 | 32 | 147 | 000 3935 | 54 |
| 028 | 000 0142 | 10 | 088 | 000 1405 | 32 | 148 | 000 3989 | 55 |
| 029 | 000 0152 | 11 | 089 | 000 1437 | 33 | 149 | 000 4044 | 55 |
| 0.030 | 0.000 0163 | 11 | 0.090 | 0.000 1470 | 32 | 0.150 | 0.000 4099 | 55 |
| 031 | 000 0174 | 11 | 091 | 000 1502 | 34 | 151 | 000 4154 | 55 |
| 032 | 000 0185 | 12 | 092 | 000 1536 | 33 | 152 | 000 4209 | 56 |
| 033 | 000 0197 | 12 | 093 | 000 1569 | 34 | 153 | 000 4265 | 57 |
| 034 | 000 0209 | 13 | 094 | 000 1603 | 35 | 154 | 000 4322 | 56 |
| 0.035 | 0.000 0222 | 13 | 0.095 | 0.000 1638 | 35 | 0.155 | 0.000 4378 | 57 |
| 036 | 000 0235 | 13 | 096 | 000 1673 | 35 | 156 | 000 4435 | 58 |
| 037 | 000 0248 | 14 | 097 | 000 1708 | 35 | 157 | 000 4493 | 58 |
| 038 | 000 0262 | 13 | 098 | 000 1743 | 36 | 158 | 000 4551 | 58 |
| 039 | 000 0275 | 15 | 099 | 000 1779 | 36 | 159 | 000 4609 | 59 |
| 0.040 | 0.000 0290 | 14 | 0.100 | 0.000 1815 | 37 | 0.160 | 0.000 4668 | 58 |
| 041 | 000 0304 | 16 | 101 | 000 1852 | 37 | 161 | 000 4726 | 60 |
| 042 | 000 0320 | 15 | 102 | 000 1889 | 37 | 162 | 000 4786 | 60 |
| 043 | 000 0335 | 16 | 103 | 000 1926 | 38 | 163 | 000 4846 | 60 |
| 044 | 000 0351 | 16 | 104 | 000 1964 | 38 | 164 | 000 4906 | 60 |
| 0.045 | 0.000 0367 | 16 | 0.105 | 0.000 2002 | 38 | 0.165 | 0.000 4966 | 61 |
| 046 | 000 0383 | 17 | 106 | 000 2040 | 39 | 166 | 000 5027 | 61 |
| 047 | 000 0400 | 17 | 107 | 000 2079 | 39 | 167 | 000 5088 | 62 |
| 048 | 000 0417 | 18 | 108 | 000 2118 | 40 | 168 | 000 5150 | 62 |
| 049 | 000 0435 | 18 | 109 | 000 2158 | 40 | 169 | 000 5212 | 62 |
| 0.050 | 0.000 0453 | 18 | 0.110 | 0.000 2198 | 40 | 0.170 | 0.000 5274 | 63 |
| 051 | 000 0471 | 19 | 111 | 000 2238 | 41 | 171 | 000 5337 | 63 |
| 052 | 000 0490 | 19 | 112 | 000 2279 | 41 | 172 | 000 5400 | 64 |
| 053 | 000 0509 | 19 | 113 | 000 2320 | 41 | 173 | 000 5464 | 64 |
| 054 | 000 0528 | 20 | 114 | 000 2361 | 42 | 174 | 000 5528 | 64 |
| 0.055 | 0.000 0548 | 20 | 0.115 | 0.000 2403 | 42 | 0.175 | 0.000 5592 | 65 |
| 056 | 000 0568 | 21 | 116 | 000 2445 | 42 | 176 | 000 5657 | 65 |
| 057 | 000 0589 | 21 | 117 | 000 2487 | 43 | 177 | 000 5722 | 65 |
| 058 | 000 0610 | 21 | 118 | 000 2530 | 43 | 178 | 000 5787 | 66 |
| 059 | 000 0631 | 21 | 119 | 000 2573 | 44 | 179 | 000 5853 | 66 |
| 0.060 | 0.000 0652 | | 0.120 | 0.000 2617 | | 0.180 | 0.000 5919 | |

# Tafel VIII.

| $\eta$ | $\log \mu$ | Diff. | $\eta$ | $\log \mu$ | Diff. | $\eta$ | $\log \mu$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.180 | 0.000 5919 | 67 | 0.240 | 0.001 0603 | 90 | 0.300 | 0.001 6733 | 115 |
| 181 | 000 5986 | 67 | 241 | 001 0693 | 91 | 301 | 001 6848 | 115 |
| 182 | 000 6053 | 67 | 242 | 001 0784 | 91 | 302 | 001 6963 | 116 |
| 183 | 000 6120 | 68 | 243 | 001 0875 | 91 | 303 | 001 7079 | 116 |
| 184 | 000 6188 | 68 | 244 | 001 0966 | 92 | 304 | 001 7195 | 117 |
| 0.185 | 0.000 6256 | 69 | 0.245 | 0.001 1058 | 92 | 0.305 | 0.001 7312 | 117 |
| 186 | 000 6325 | 68 | 246 | 001 1150 | 92 | 306 | 001 7429 | 117 |
| 187 | 000 6393 | 70 | 247 | 001 1242 | 93 | 307 | 001 7546 | 118 |
| 188 | 000 6463 | 69 | 248 | 001 1335 | 94 | 308 | 001 7664 | 119 |
| 189 | 000 6532 | 70 | 249 | 001 1429 | 93 | 309 | 001 7783 | 118 |
| 0.190 | 0.000 6602 | 71 | 0.250 | 0.001 1522 | 95 | 0.310 | 0.001 7901 | 119 |
| 191 | 000 6673 | 71 | 251 | 001 1617 | 94 | 311 | 001 8020 | 120 |
| 192 | 000 6744 | 71 | 252 | 001 1711 | 95 | 312 | 001 8140 | 120 |
| 193 | 000 6815 | 72 | 253 | 001 1806 | 95 | 313 | 001 8260 | 121 |
| 194 | 000 6887 | 72 | 254 | 001 1901 | 96 | 314 | 001 8381 | 121 |
| 0.195 | 0.000 6959 | 72 | 0.255 | 0.001 1997 | 96 | 0.315 | 0.001 8502 | 121 |
| 196 | 000 7031 | 73 | 256 | 001 2093 | 97 | 316 | 001 8623 | 122 |
| 197 | 000 7104 | 73 | 257 | 001 2190 | 97 | 317 | 001 8745 | 122 |
| 198 | 000 7177 | 73 | 258 | 001 2287 | 97 | 318 | 001 8867 | 122 |
| 199 | 000 7250 | 74 | 259 | 001 2384 | 98 | 319 | 001 8989 | 124 |
| 0.200 | 0.000 7324 | 75 | 0.260 | 0.001 2482 | 98 | 0.320 | 0.001 9113 | 123 |
| 201 | 000 7399 | 74 | 261 | 001 2580 | 99 | 321 | 001 9236 | 124 |
| 202 | 000 7473 | 75 | 262 | 001 2679 | 99 | 322 | 001 9360 | 124 |
| 203 | 000 7548 | 76 | 263 | 001 2778 | 99 | 323 | 001 9484 | 125 |
| 204 | 000 7624 | 76 | 264 | 001 2877 | 100 | 324 | 001 9609 | 125 |
| 0.205 | 0.000 7700 | 76 | 0.265 | 0.001 2977 | 100 | 0.325 | 0.001 9734 | 126 |
| 206 | 000 7776 | 77 | 266 | 001 3077 | 101 | 326 | 001 9860 | 126 |
| 207 | 000 7853 | 77 | 267 | 001 3178 | 101 | 327 | 001 9986 | 127 |
| 208 | 000 7930 | 77 | 268 | 001 3279 | 102 | 328 | 002 0113 | 127 |
| 209 | 000 8007 | 78 | 269 | 001 3381 | 101 | 329 | 002 0240 | 127 |
| 0.210 | 0.000 8085 | 78 | 0.270 | 0.001 3482 | 103 | 0.330 | 0.002 0367 | 128 |
| 211 | 000 8163 | 79 | 271 | 001 3585 | 103 | 331 | 002 0495 | 129 |
| 212 | 000 8242 | 79 | 272 | 001 3688 | 103 | 332 | 002 0624 | 128 |
| 213 | 000 8321 | 79 | 273 | 001 3791 | 103 | 333 | 002 0752 | 130 |
| 214 | 000 8400 | 80 | 274 | 001 3894 | 104 | 334 | 002 0882 | 129 |
| 0.215 | 0.000 8480 | 80 | 0.275 | 0.001 3998 | 105 | 0.335 | 0.002 1011 | 130 |
| 216 | 000 8560 | 81 | 276 | 001 4103 | 104 | 336 | 002 1141 | 131 |
| 217 | 000 8641 | 81 | 277 | 001 4207 | 106 | 337 | 002 1272 | 131 |
| 218 | 000 8722 | 81 | 278 | 001 4313 | 105 | 338 | 002 1403 | 131 |
| 219 | 000 8803 | 82 | 279 | 001 4418 | 106 | 339 | 002 1534 | 132 |
| 0.220 | 0.000 8885 | 82 | 0.280 | 0.001 4524 | 107 | 0.340 | 0.002 1666 | 133 |
| 221 | 000 8967 | 83 | 281 | 001 4631 | 107 | 341 | 002 1799 | 132 |
| 222 | 000 9050 | 82 | 282 | 001 4738 | 107 | 342 | 002 1931 | 134 |
| 223 | 000 9132 | 84 | 283 | 001 4845 | 108 | 343 | 002 2065 | 133 |
| 224 | 000 9216 | 84 | 284 | 001 4953 | 108 | 344 | 002 2198 | 135 |
| 0.225 | 0.000 9300 | 84 | 0.285 | 0.001 5061 | 108 | 0.345 | 0.002 2333 | 134 |
| 226 | 000 9384 | 84 | 286 | 001 5169 | 109 | 346 | 002 2467 | 135 |
| 227 | 000 9468 | 85 | 287 | 001 5278 | 110 | 347 | 002 2602 | 136 |
| 228 | 000 9553 | 85 | 288 | 001 5388 | 109 | 348 | 002 2738 | 136 |
| 229 | 000 9638 | 86 | 289 | 001 5497 | 111 | 349 | 002 2874 | 136 |
| 0.230 | 0.000 9724 | 86 | 0.290 | 0.001 5608 | 110 | 0.350 | 0.002 3010 | 137 |
| 231 | 000 9810 | 87 | 291 | 001 5718 | 111 | 351 | 002 3147 | 137 |
| 232 | 000 9897 | 87 | 292 | 001 5829 | 112 | 352 | 002 3284 | 138 |
| 233 | 000 9984 | 87 | 293 | 001 5941 | 112 | 353 | 002 3422 | 138 |
| 234 | 001 0071 | 88 | 294 | 001 6053 | 112 | 354 | 002 3560 | 139 |
| 0.235 | 0.001 0159 | 88 | 0.295 | 0.001 6165 | 113 | 0.355 | 0.002 3699 | 139 |
| 236 | 001 0247 | 88 | 296 | 001 6278 | 113 | 356 | 002 3838 | 139 |
| 237 | 001 0335 | 89 | 297 | 001 6391 | 114 | 357 | 002 3977 | 140 |
| 238 | 001 0424 | 89 | 298 | 001 6505 | 114 | 358 | 002 4117 | 141 |
| 239 | 001 0513 | 90 | 299 | 001 6619 | 114 | 359 | 002 4258 | 141 |
| 0.240 | 0.001 0603 | | 0.300 | 0.001 6733 | | 0.360 | 0.002 4399 | |

# Tafel VIII.

| η | log μ | Diff. | η | log μ | Diff. | η | log μ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.360 | 0.002 4399 | 141 | 0.420 | 0.003 3720 | 170 | 0.480 | 0.004 4858 | 203 |
| 361 | 002 4540 | 142 | 421 | 003 3890 | 171 | 481 | 004 5061 | 202 |
| 362 | 002 4682 | 142 | 422 | 003 4061 | 171 | 482 | 004 5263 | 204 |
| 363 | 002 4824 | 143 | 423 | 003 4232 | 172 | 483 | 004 5467 | 203 |
| 364 | 002 4967 | 143 | 424 | 003 4404 | 172 | 484 | 004 5670 | 205 |
| 0.365 | 0.002 5110 | 144 | 0.425 | 0.003 4576 | 173 | 0.485 | 0.004 5875 | 205 |
| 366 | 002 5254 | 144 | 426 | 003 4749 | 174 | 486 | 004 6080 | 205 |
| 367 | 002 5398 | 145 | 427 | 003 4923 | 173 | 487 | 004 6285 | 207 |
| 368 | 002 5543 | 145 | 428 | 003 5096 | 175 | 488 | 004 6492 | 206 |
| 369 | 002 5688 | 146 | 429 | 003 5271 | 174 | 489 | 004 6698 | 208 |
| 0.370 | 0.002 5834 | 146 | 0.430 | 0.003 5445 | 176 | 0.490 | 0.004 6906 | 207 |
| 371 | 002 5980 | 146 | 431 | 003 5621 | 176 | 491 | 004 7113 | 209 |
| 372 | 002 6126 | 147 | 432 | 003 5797 | 176 | 492 | 004 7322 | 209 |
| 373 | 002 6273 | 148 | 433 | 003 5973 | 177 | 493 | 004 7531 | 209 |
| 374 | 002 6421 | 147 | 434 | 003 6150 | 177 | 494 | 004 7740 | 211 |
| 0.375 | 0.002 6568 | 149 | 0.435 | 0.003 6327 | 178 | 0.495 | 0.004 7951 | 210 |
| 376 | 002 6717 | 149 | 436 | 003 6505 | 178 | 496 | 004 8161 | 212 |
| 377 | 002 6866 | 149 | 437 | 003 6683 | 179 | 497 | 004 8373 | 212 |
| 378 | 002 7015 | 150 | 438 | 003 6862 | 180 | 498 | 004 8585 | 212 |
| 379 | 002 7165 | 150 | 439 | 003 7042 | 180 | 499 | 004 8797 | 213 |
| 0.380 | 0.002 7315 | 151 | 0.440 | 0.003 7222 | 180 | 0.500 | 0.004 9010 | 213 |
| 381 | 002 7466 | 151 | 441 | 003 7402 | 181 | 501 | 004 9223 | 215 |
| 382 | 002 7617 | 152 | 442 | 003 7583 | 182 | 502 | 004 9438 | 215 |
| 383 | 002 7769 | 152 | 443 | 003 7765 | 182 | 503 | 004 9653 | 215 |
| 384 | 002 7921 | 152 | 444 | 003 7947 | 183 | 504 | 004 9868 | 216 |
| 0.385 | 0.002 8073 | 153 | 0.445 | 0.003 8130 | 183 | 0.505 | 0.005 0084 | 217 |
| 386 | 002 8226 | 154 | 446 | 003 8313 | 183 | 506 | 005 0301 | 217 |
| 387 | 002 8380 | 154 | 447 | 003 8496 | 184 | 507 | 005 0518 | 218 |
| 388 | 002 8534 | 155 | 448 | 003 8680 | 185 | 508 | 005 0736 | 218 |
| 389 | 002 8689 | 155 | 449 | 003 8865 | 185 | 509 | 005 0954 | 219 |
| 0.390 | 0.002 8844 | 155 | 0.450 | 0.003 9050 | 186 | 0.510 | 0.005 1173 | 220 |
| 391 | 002 8999 | 156 | 451 | 003 9236 | 186 | 511 | 005 1393 | 220 |
| 392 | 002 9155 | 156 | 452 | 003 9422 | 187 | 512 | 005 1613 | 221 |
| 393 | 002 9311 | 157 | 453 | 003 9609 | 188 | 513 | 005 1834 | 221 |
| 394 | 002 9468 | 158 | 454 | 003 9797 | 187 | 514 | 005 2055 | 222 |
| 0.395 | 0.002 9626 | 158 | 0.455 | 0.003 9984 | 189 | 0.515 | 0.005 2277 | 223 |
| 396 | 002 9784 | 158 | 456 | 004 0173 | 189 | 516 | 005 2500 | 223 |
| 397 | 002 9942 | 159 | 457 | 004 0362 | 189 | 517 | 005 2723 | 224 |
| 398 | 003 0101 | 159 | 458 | 004 0551 | 190 | 518 | 005 2947 | 225 |
| 399 | 003 0260 | 160 | 459 | 004 0741 | 191 | 519 | 005 3172 | 225 |
| 0.400 | 0.003 0420 | 160 | 0.460 | 0.004 0932 | 191 | 0.520 | 0.005 3397 | 226 |
| 401 | 003 0580 | 161 | 461 | 004 1123 | 192 | 521 | 005 3623 | 226 |
| 402 | 003 0741 | 162 | 462 | 004 1315 | 192 | 522 | 005 3849 | 227 |
| 403 | 003 0903 | 161 | 463 | 004 1507 | 193 | 523 | 005 4076 | 227 |
| 404 | 003 1064 | 163 | 464 | 004 1700 | 193 | 524 | 005 4303 | 228 |
| 0.405 | 0.003 1227 | 162 | 0.465 | 0.004 1893 | 194 | 0.525 | 0.005 4531 | 229 |
| 406 | 003 1389 | 164 | 466 | 004 2087 | 194 | 526 | 005 4760 | 229 |
| 407 | 003 1553 | 163 | 467 | 004 2281 | 195 | 527 | 005 4989 | 230 |
| 408 | 003 1716 | 165 | 468 | 004 2476 | 196 | 528 | 005 5219 | 231 |
| 409 | 003 1881 | 164 | 469 | 004 2672 | 196 | 529 | 005 5450 | 231 |
| 0.410 | 0.003 2045 | 166 | 0.470 | 0.004 2868 | 196 | 0.530 | 0.005 5681 | 232 |
| 411 | 003 2211 | 165 | 471 | 004 3064 | 197 | 531 | 005 5913 | 232 |
| 412 | 003 2376 | 167 | 472 | 004 3261 | 198 | 532 | 005 6145 | 234 |
| 413 | 003 2543 | 166 | 473 | 004 3459 | 198 | 533 | 005 6379 | 234 |
| 414 | 003 2709 | 168 | 474 | 004 3657 | 199 | 534 | 005 6613 | 234 |
| 0.415 | 0.003 2877 | 167 | 0.475 | 0.004 3856 | 199 | 0.535 | 0.005 6847 | 235 |
| 416 | 003 3044 | 169 | 476 | 004 4055 | 200 | 536 | 005 7082 | 236 |
| 417 | 003 3213 | 168 | 477 | 004 4255 | 201 | 537 | 005 7318 | 236 |
| 418 | 003 3381 | 169 | 478 | 004 4456 | 201 | 538 | 005 7554 | 237 |
| 419 | 003 3550 | 170 | 479 | 004 4657 | 201 | 539 | 005 7791 | 238 |
| 0.420 | 0.003 3720 | | 0.480 | 0.004 4858 | | 0.540 | 0.005 8029 | |

## Tafel IX (pag. 193).

| $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. | $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. | $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0000 | 0.000 0000 | 965 | 0.0060 | 0.005 7298 | 945 | 0.0120 | 0.011 3417 | 926 |
| 0001 | 000 0965 | 965 | 0061 | 005 8243 | 944 | 0121 | 011 4343 | 925 |
| 0002 | 000 1930 | 964 | 0062 | 005 9187 | 944 | 0122 | 011 5268 | 925 |
| 0003 | 000 2894 | 964 | 0063 | 006 0131 | 944 | 0123 | 011 6193 | 925 |
| 0004 | 000 3858 | 963 | 0064 | 006 1075 | 944 | 0124 | 011 7118 | 925 |
| 0.0005 | 0.000 4821 | 963 | 0.0065 | 0.006 2019 | 943 | 0.0125 | 0.011 8043 | 924 |
| 0006 | 000 5784 | 963 | 0066 | 006 2962 | 943 | 0126 | 011 8967 | 923 |
| 0007 | 000 6747 | 963 | 0067 | 006 3905 | 942 | 0127 | 011 9890 | 924 |
| 0008 | 000 7710 | 962 | 0068 | 006 4847 | 943 | 0128 | 012 0814 | 923 |
| 0009 | 000 8672 | 962 | 0069 | 006 5790 | 942 | 0129 | 012 1737 | 923 |
| 0.0010 | 0.000 9634 | 961 | 0.0070 | 0.006 6732 | 941 | 0.0130 | 0.012 2660 | 922 |
| 0011 | 001 0595 | 962 | 0071 | 006 7673 | 941 | 0131 | 012 3582 | 923 |
| 0012 | 001 1557 | 960 | 0072 | 006 8614 | 941 | 0132 | 012 4505 | 922 |
| 0013 | 001 2517 | 961 | 0073 | 006 9555 | 941 | 0133 | 012 5427 | 921 |
| 0014 | 001 3478 | 960 | 0074 | 007 0496 | 940 | 0134 | 012 6348 | 921 |
| 0.0015 | 0.001 4438 | 960 | 0.0075 | 0.007 1436 | 940 | 0.0135 | 0.012 7269 | 921 |
| 0016 | 001 5398 | 959 | 0076 | 007 2376 | 940 | 0136 | 012 8190 | 921 |
| 0017 | 001 6357 | 959 | 0077 | 007 3316 | 939 | 0137 | 012 9111 | 921 |
| 0018 | 001 7316 | 959 | 0078 | 007 4255 | 939 | 0138 | 013 0032 | 920 |
| 0019 | 001 8275 | 959 | 0079 | 007 5194 | 939 | 0139 | 013 0952 | 919 |
| 0.0020 | 0.001 9234 | 958 | 0.0080 | 0.007 6133 | 938 | 0.0140 | 0.013 1871 | 920 |
| 0021 | 002 0192 | 958 | 0081 | 007 7071 | 938 | 0141 | 013 2791 | 919 |
| 0022 | 002 1150 | 957 | 0082 | 007 8009 | 938 | 0142 | 013 3710 | 919 |
| 0023 | 002 2107 | 957 | 0083 | 007 8947 | 937 | 0143 | 013 4629 | 918 |
| 0024 | 002 3064 | 957 | 0084 | 007 9884 | 937 | 0144 | 013 5547 | 918 |
| 0.0025 | 0.002 4021 | 956 | 0.0085 | 0.008 0821 | 937 | 0.0145 | 0.013 6465 | 918 |
| 0026 | 002 4977 | 956 | 0086 | 008 1758 | 936 | 0146 | 013 7383 | 918 |
| 0027 | 002 5933 | 956 | 0087 | 008 2694 | 936 | 0147 | 013 8301 | 917 |
| 0028 | 002 6889 | 956 | 0088 | 008 3630 | 936 | 0148 | 013 9218 | 917 |
| 0029 | 002 7845 | 955 | 0089 | 008 4566 | 936 | 0149 | 014 0135 | 917 |
| 0.0030 | 0.002 8800 | 955 | 0.0090 | 0.008 5502 | 935 | 0.0150 | 0.014 1052 | 916 |
| 0031 | 002 9755 | 954 | 0091 | 008 6437 | 935 | 0151 | 014 1968 | 916 |
| 0032 | 003 0709 | 954 | 0092 | 008 7372 | 934 | 0152 | 014 2884 | 916 |
| 0033 | 003 1663 | 954 | 0093 | 008 8306 | 934 | 0153 | 014 3800 | 916 |
| 0034 | 003 2617 | 953 | 0094 | 008 9240 | 934 | 0154 | 014 4716 | 915 |
| 0.0035 | 0.003 3570 | 953 | 0.0095 | 0.009 0174 | 934 | 0.0155 | 0.014 5631 | 915 |
| 0036 | 003 4523 | 953 | 0096 | 009 1108 | 933 | 0156 | 014 6546 | 914 |
| 0037 | 003 5476 | 952 | 0097 | 009 2041 | 933 | 0157 | 014 7460 | 914 |
| 0038 | 003 6428 | 953 | 0098 | 009 2974 | 932 | 0158 | 014 8374 | 914 |
| 0039 | 003 7381 | 951 | 0099 | 009 3906 | 932 | 0159 | 014 9288 | 914 |
| 0.0040 | 0.003 8332 | 952 | 0.0100 | 0.009 4838 | 932 | 0.0160 | 0.015 0202 | 913 |
| 0041 | 003 9284 | 951 | 0101 | 009 5770 | 932 | 0161 | 015 1115 | 913 |
| 0042 | 004 0235 | 951 | 0102 | 009 6702 | 931 | 0162 | 015 2028 | 913 |
| 0043 | 004 1186 | 950 | 0103 | 009 7633 | 931 | 0163 | 015 2941 | 913 |
| 0044 | 004 2136 | 950 | 0104 | 009 8564 | 931 | 0164 | 015 3854 | 912 |
| 0.0045 | 0.004 3086 | 950 | 0.0105 | 0.009 9495 | 930 | 0.0165 | 0.015 4766 | 912 |
| 0046 | 004 4036 | 949 | 0106 | 010 0425 | 931 | 0166 | 015 5678 | 911 |
| 0047 | 004 4985 | 949 | 0107 | 010 1356 | 929 | 0167 | 015 6589 | 911 |
| 0048 | 004 5934 | 949 | 0108 | 010 2285 | 930 | 0168 | 015 7500 | 911 |
| 0049 | 004 6883 | 949 | 0109 | 010 3215 | 929 | 0169 | 015 8411 | 911 |
| 0.0050 | 0.004 7832 | 948 | 0.0110 | 0.010 4144 | 929 | 0.0170 | 0.015 9322 | 910 |
| 0051 | 004 8780 | 948 | 0111 | 010 5073 | 928 | 0171 | 016 0232 | 910 |
| 0052 | 004 9728 | 947 | 0112 | 010 6001 | 928 | 0172 | 016 1142 | 910 |
| 0053 | 005 0675 | 947 | 0113 | 010 6929 | 928 | 0173 | 016 2052 | 909 |
| 0054 | 005 1622 | 947 | 0114 | 010 7857 | 928 | 0174 | 016 2961 | 909 |
| 0.0055 | 0.005 2569 | 946 | 0.0115 | 0.010 8785 | 927 | 0.0175 | 0.016 3870 | 909 |
| 0056 | 005 3515 | 947 | 0116 | 010 9712 | 927 | 0176 | 016 4779 | 909 |
| 0057 | 005 4462 | 945 | 0117 | 011 0639 | 926 | 0177 | 016 5688 | 908 |
| 0058 | 005 5407 | 946 | 0118 | 011 1565 | 926 | 0178 | 016 6596 | 908 |
| 0059 | 005 6353 | 945 | 0119 | 011 2491 | 926 | 0179 | 016 7504 | 908 |
| 0.0060 | 0.005 7298 | | 0.0120 | 0.011 3417 | | 0.0180 | 0.016 8412 | |

## Tafel IX.

| h | log ηη | Diff. | h | log ηη | Diff. | h | log ηη | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0180 | 0.016 8412 | 907 | 0.0240 | 0.022 2330 | 890 | 0.0300 | 0.027 5218 | 873 |
| 0181 | 016 9319 | 907 | 0241 | 022 3220 | 889 | 0301 | 027 6091 | 873 |
| 0182 | 017 0226 | 907 | 0242 | 022 4109 | 889 | 0302 | 027 6964 | 872 |
| 0183 | 017 1133 | 906 | 0243 | 022 4998 | 889 | 0303 | 027 7836 | 872 |
| 0184 | 017 2039 | 906 | 0244 | 022 5887 | 889 | 0304 | 027 8708 | 872 |
| 0.0185 | 0.017 2945 | 906 | 0.0245 | 0.022 6776 | 888 | 0.0305 | 0.027 9580 | 872 |
| 0186 | 017 3851 | 906 | 0246 | 022 7664 | 888 | 0306 | 028 0452 | 871 |
| 0187 | 017 4757 | 905 | 0247 | 022 8552 | 888 | 0307 | 028 1323 | 871 |
| 0188 | 017 5662 | 905 | 0248 | 022 9440 | 888 | 0308 | 028 2194 | 871 |
| 0189 | 017 6567 | 904 | 0249 | 023 0328 | 887 | 0309 | 028 3065 | 871 |
| 0.0190 | 0.017 7471 | 905 | 0.0250 | 0.023 1215 | 887 | 0.0310 | 0.028 3936 | 870 |
| 0191 | 017 8376 | 904 | 0251 | 023 2102 | 886 | 0311 | 028 4806 | 870 |
| 0192 | 017 9280 | 903 | 0252 | 023 2988 | 887 | 0312 | 028 5676 | 870 |
| 0193 | 018 0183 | 904 | 0253 | 023 3875 | 886 | 0313 | 028 6546 | 869 |
| 0194 | 018 1087 | 903 | 0254 | 023 4761 | 886 | 0314 | 028 7415 | 869 |
| 0.0195 | 0.018 1990 | 903 | 0.0255 | 0.023 5647 | 885 | 0.0315 | 0.028 8284 | 869 |
| 0196 | 018 2893 | 903 | 0256 | 023 6532 | 885 | 0316 | 028 9153 | 869 |
| 0197 | 018 3796 | 902 | 0257 | 023 7417 | 885 | 0317 | 029 0022 | 868 |
| 0198 | 018 4698 | 902 | 0258 | 023 8302 | 885 | 0318 | 029 0890 | 868 |
| 0199 | 018 5600 | 901 | 0259 | 023 9187 | 884 | 0319 | 029 1758 | 868 |
| 0.0200 | 0.018 6501 | 902 | 0.0260 | 0.024 0071 | 885 | 0.0320 | 0.029 2626 | 868 |
| 0201 | 018 7403 | 901 | 0261 | 024 0956 | 883 | 0321 | 029 3494 | 867 |
| 0202 | 018 8304 | 901 | 0262 | 024 1839 | 884 | 0322 | 029 4361 | 867 |
| 0203 | 018 9205 | 900 | 0263 | 024 2723 | 883 | 0323 | 029 5228 | 867 |
| 0204 | 019 0105 | 900 | 0264 | 024 3606 | 883 | 0324 | 029 6095 | 866 |
| 0.0205 | 0.019 1005 | 900 | 0.0265 | 0.024 4489 | 883 | 0.0325 | 0.029 6961 | 866 |
| 0206 | 019 1905 | 900 | 0266 | 024 5372 | 882 | 0326 | 029 7827 | 866 |
| 0207 | 019 2805 | 899 | 0267 | 024 6254 | 882 | 0327 | 029 8693 | 866 |
| 0208 | 019 3704 | 899 | 0268 | 024 7136 | 882 | 0328 | 029 9559 | 865 |
| 0209 | 019 4603 | 899 | 0269 | 024 8018 | 882 | 0329 | 030 0424 | 866 |
| 0.0210 | 0.019 5502 | 899 | 0.0270 | 0.024 8900 | 881 | 0.0330 | 0.030 1290 | 864 |
| 0211 | 019 6401 | 898 | 0271 | 024 9781 | 881 | 0331 | 030 2154 | 865 |
| 0212 | 019 7299 | 898 | 0272 | 025 0662 | 881 | 0332 | 030 3019 | 864 |
| 0213 | 019 8197 | 897 | 0273 | 025 1543 | 880 | 0333 | 030 3883 | 864 |
| 0214 | 019 9094 | 898 | 0274 | 025 2423 | 881 | 0334 | 030 4747 | 864 |
| 0.0215 | 0.019 9992 | 897 | 0.0275 | 0.025 3304 | 879 | 0.0335 | 0.030 5611 | 864 |
| 0216 | 020 0889 | 896 | 0276 | 025 4183 | 880 | 0336 | 030 6475 | 863 |
| 0217 | 020 1785 | 897 | 0277 | 025 5063 | 879 | 0337 | 030 7338 | 863 |
| 0218 | 020 2682 | 896 | 0278 | 025 5942 | 880 | 0338 | 030 8201 | 863 |
| 0219 | 020 3578 | 896 | 0279 | 025 6822 | 878 | 0339 | 030 9064 | 862 |
| 0.0220 | 0.020 4474 | 895 | 0.0280 | 0.025 7700 | 879 | 0.0340 | 0.030 9926 | 862 |
| 0221 | 020 5369 | 895 | 0281 | 025 8579 | 878 | 0341 | 031 0788 | 862 |
| 0222 | 020 6264 | 895 | 0282 | 025 9457 | 878 | 0342 | 031 1650 | 862 |
| 0223 | 020 7159 | 895 | 0283 | 026 0335 | 878 | 0343 | 031 2512 | 861 |
| 0224 | 020 8054 | 894 | 0284 | 026 1213 | 877 | 0344 | 031 3373 | 861 |
| 0.0225 | 0.020 8948 | 894 | 0.0285 | 0.026 2090 | 877 | 0.0345 | 0.031 4234 | 861 |
| 0226 | 020 9842 | 894 | 0286 | 026 2967 | 877 | 0346 | 031 5095 | 861 |
| 0227 | 021 0736 | 894 | 0287 | 026 3844 | 877 | 0347 | 031 5956 | 860 |
| 0228 | 021 1630 | 893 | 0288 | 026 4721 | 876 | 0348 | 031 6816 | 860 |
| 0229 | 021 2523 | 893 | 0289 | 026 5597 | 876 | 0349 | 031 7676 | 860 |
| 0.0230 | 0.021 3416 | 893 | 0.0290 | 0.026 6473 | 876 | 0.0350 | 0.031 8536 | 860 |
| 0231 | 021 4309 | 892 | 0291 | 026 7349 | 875 | 0351 | 031 9396 | 859 |
| 0232 | 021 5201 | 892 | 0292 | 026 8224 | 875 | 0352 | 032 0255 | 859 |
| 0233 | 021 6093 | 892 | 0293 | 026 9099 | 875 | 0353 | 032 1114 | 859 |
| 0234 | 021 6985 | 891 | 0294 | 026 9974 | 875 | 0354 | 032 1973 | 858 |
| 0.0235 | 0.021 7876 | 892 | 0.0295 | 0.027 0849 | 874 | 0.0355 | 0.032 2831 | 858 |
| 0236 | 021 8768 | 891 | 0296 | 027 1723 | 874 | 0356 | 032 3689 | 858 |
| 0237 | 021 9659 | 890 | 0297 | 027 2597 | 874 | 0357 | 032 4547 | 858 |
| 0238 | 022 0549 | 891 | 0298 | 027 3471 | 874 | 0358 | 032 5405 | 85- |
| 0239 | 022 1440 | 890 | 0299 | 027 4345 | 873 | 0359 | 032 6262 | 858 |
| 0.0240 | 0.022 2330 | | 0.0300 | 0.027 5218 | | 0.0360 | 0.032 7120 | |

## Tafel IX.

| $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. | $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. | $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.036 | 0.032 7120 | 8557 | 0.096 | 0.079 9617 | 7251 | 0.156 | 0.120 5735 | 6318 |
| 037 | 033 5677 | 8531 | 097 | 080 6868 | 7233 | 157 | 121 2053 | 6304 |
| 038 | 034 4208 | 8505 | 098 | 081 4101 | 7215 | 158 | 121 8357 | 6292 |
| 039 | 035 2713 | 8479 | 099 | 082 1316 | 7197 | 159 | 122 4649 | 6278 |
| 040 | 036 1192 | 8454 | 100 | 082 8513 | 7180 | 160 | 123 0927 | 6265 |
| 0.041 | 0.036 9646 | 8429 | 0.101 | 0.083 5693 | 7161 | 0.161 | 0.123 7192 | 6252 |
| 042 | 037 8075 | 8403 | 102 | 084 2854 | 7145 | 162 | 124 3444 | 6238 |
| 043 | 038 6478 | 8378 | 103 | 084 9999 | 7126 | 163 | 124 9682 | 6226 |
| 044 | 039 4856 | 8353 | 104 | 085 7125 | 7110 | 164 | 125 5908 | 6213 |
| 045 | 040 3209 | 8328 | 105 | 086 4235 | 7092 | 165 | 126 2121 | 6200 |
| 0.046 | 0.041 1537 | 8304 | 0.106 | 0.087 1327 | 7074 | 0.166 | 0.126 8321 | 6187 |
| 047 | 041 9841 | 8280 | 107 | 087 8401 | 7058 | 167 | 127 4508 | 6175 |
| 048 | 042 8121 | 8255 | 108 | 088 5459 | 7041 | 168 | 128 0683 | 6162 |
| 049 | 043 6376 | 8231 | 109 | 089 2500 | 7023 | 169 | 128 6845 | 6149 |
| 050 | 044 4607 | 8207 | 110 | 089 9523 | 7007 | 170 | 129 2994 | 6137 |
| 0.051 | 0.045 2814 | 8184 | 0.111 | 0.090 6530 | 6990 | 0.171 | 0.129 9131 | 6124 |
| 052 | 046 0998 | 8159 | 112 | 091 3520 | 6974 | 172 | 130 5255 | 6112 |
| 053 | 046 9157 | 8137 | 113 | 092 0494 | 6957 | 173 | 131 1367 | 6099 |
| 054 | 047 7294 | 8113 | 114 | 092 7451 | 6940 | 174 | 131 7466 | 6087 |
| 055 | 048 5407 | 8089 | 115 | 093 4391 | 6924 | 175 | 132 3553 | 6075 |
| 0.056 | 0.049 3496 | 8067 | 0.116 | 0.094 1315 | 6908 | 0.176 | 0.132 9628 | 6062 |
| 057 | 050 1563 | 8044 | 117 | 094 8223 | 6891 | 177 | 133 5690 | 6050 |
| 058 | 050 9607 | 8021 | 118 | 095 5114 | 6876 | 178 | 134 1740 | 6038 |
| 059 | 051 7628 | 7998 | 119 | 096 1990 | 6859 | 179 | 134 7778 | 6026 |
| 060 | 052 5626 | 7976 | 120 | 096 8849 | 6843 | 180 | 135 3804 | 6014 |
| 0.061 | 0.053 3602 | 7954 | 0.121 | 0.097 5692 | 6828 | 0.181 | 0.135 9818 | 6003 |
| 062 | 054 1556 | 7932 | 122 | 098 2520 | 6811 | 182 | 136 5821 | 5990 |
| 063 | 054 9488 | 7909 | 123 | 098 9331 | 6796 | 183 | 137 1811 | 5978 |
| 064 | 055 7397 | 7888 | 124 | 099 6127 | 6780 | 184 | 137 7789 | 5966 |
| 065 | 056 5285 | 7865 | 125 | 100 2907 | 6765 | 185 | 138 3755 | 5955 |
| 0.066 | 0.057 3150 | 7844 | 0.126 | 0.100 9672 | 6749 | 0.186 | 0.138 9710 | 5943 |
| 067 | 058 0994 | 7823 | 127 | 101 6421 | 6733 | 187 | 139 5653 | 5932 |
| 068 | 058 8817 | 7801 | 128 | 102 3154 | 6719 | 188 | 140 1585 | 5919 |
| 069 | 059 6618 | 7780 | 129 | 102 9873 | 6703 | 189 | 140 7504 | 5908 |
| 070 | 060 4398 | 7759 | 130 | 103 6576 | 6688 | 190 | 141 3412 | 5897 |
| 0.071 | 0.061 2157 | 7738 | 0.131 | 0.104 3264 | 6672 | 0.191 | 0.141 9309 | 5885 |
| 072 | 061 9895 | 7717 | 132 | 104 9936 | 6658 | 192 | 142 5194 | 5874 |
| 073 | 062 7612 | 7696 | 133 | 105 6594 | 6643 | 193 | 143 1068 | 5863 |
| 074 | 063 5308 | 7676 | 134 | 106 3237 | 6628 | 194 | 143 6931 | 5851 |
| 075 | 064 2984 | 7655 | 135 | 106 9865 | 6613 | 195 | 144 2782 | 5840 |
| 0.076 | 0.065 0639 | 7635 | 0.136 | 0.107 6478 | 6598 | 0.196 | 0.144 8622 | 5828 |
| 077 | 065 8274 | 7614 | 137 | 108 3076 | 6584 | 197 | 145 4450 | 5818 |
| 078 | 066 5888 | 7595 | 138 | 108 9660 | 6569 | 198 | 146 0268 | 5806 |
| 079 | 067 3483 | 7574 | 139 | 109 6229 | 6554 | 199 | 146 6074 | 5795 |
| 080 | 068 1057 | 7555 | 140 | 110 2783 | 6540 | 200 | 147 1869 | 5784 |
| 0.081 | 0.068 8612 | 7534 | 0.141 | 0.110 9323 | 6526 | 0.201 | 0.147 7653 | 5774 |
| 082 | 069 6146 | 7515 | 142 | 111 5849 | 6511 | 202 | 148 3427 | 5762 |
| 083 | 070 3661 | 7496 | 143 | 112 2360 | 6497 | 203 | 148 9189 | 5751 |
| 084 | 071 1157 | 7476 | 144 | 112 8857 | 6483 | 204 | 149 4940 | 5741 |
| 085 | 071 8633 | 7457 | 145 | 113 5340 | 6469 | 205 | 150 0681 | 5730 |
| 0.086 | 0.072 6090 | 7437 | 0.146 | 0.114 1809 | 6455 | 0.206 | 0.150 6411 | 5719 |
| 087 | 073 3527 | 7418 | 147 | 114 8264 | 6440 | 207 | 151 2130 | 5708 |
| 088 | 074 0945 | 7400 | 148 | 115 4704 | 6427 | 208 | 151 7838 | 5697 |
| 089 | 074 8345 | 7380 | 149 | 116 1131 | 6413 | 209 | 152 3535 | 5687 |
| 090 | 075 5725 | 7362 | 150 | 116 7544 | 6399 | 210 | 152 9222 | 5677 |
| 0.091 | 0.076 3087 | 7343 | 0.151 | 0.117 3943 | 6386 | 0.211 | 0.153 4899 | 5665 |
| 092 | 077 0430 | 7324 | 152 | 118 0329 | 6372 | 212 | 154 0564 | 5656 |
| 093 | 077 7754 | 7306 | 153 | 118 6701 | 6358 | 213 | 154 6220 | 5645 |
| 094 | 078 5060 | 7288 | 154 | 119 3059 | 6345 | 214 | 155 1865 | 5634 |
| 095 | 079 2348 | 7269 | 155 | 119 9404 | 6331 | 215 | 155 7499 | 5624 |
| 0.096 | 0.079 9617 |  | 0.156 | 0.120 5735 |  | 0.216 | 0.156 3123 |  |

# Tafel IX.

| $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. | $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. | $h$ | $\log \eta\eta$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.216 | 0.156 3123 | 5614 | 0.276 | 0.188 3024 | 5061 | 0.336 | 0.217 3085 | 4615 |
| 217 | 156 8737 | 5603 | 277 | 188 8085 | 5053 | 337 | 217 7700 | 4608 |
| 218 | 157 4340 | 5593 | 278 | 189 3138 | 5045 | 338 | 218 2308 | 4602 |
| 219 | 157 9933 | 5583 | 279 | 189 8183 | 5037 | 339 | 218 6910 | 4595 |
| 220 | 158 5516 | 5573 | 280 | 190 3220 | 5029 | 340 | 219 1505 | 4588 |
| 0.221 | 0.159 1089 | 5563 | 0.281 | 0.190 8249 | 5020 | 0.341 | 0.219 6093 | 4582 |
| 222 | 159 6652 | 5552 | 282 | 191 3269 | 5012 | 342 | 220 0675 | 4575 |
| 223 | 160 2204 | 5543 | 283 | 191 8281 | 5005 | 343 | 220 5250 | 4568 |
| 224 | 160 7747 | 5532 | 284 | 192 3286 | 4996 | 344 | 220 9818 | 4562 |
| 225 | 161 3279 | 5523 | 285 | 192 8282 | 4989 | 345 | 221 4380 | 4555 |
| 0.226 | 0.161 8802 | 5513 | 0.286 | 0.193 3271 | 4980 | 0.346 | 0.221 8935 | 4548 |
| 227 | 162 4315 | 5502 | 287 | 193 8251 | 4973 | 347 | 222 3483 | 4543 |
| 228 | 162 9817 | 5493 | 288 | 194 3224 | 4964 | 348 | 222 8026 | 4535 |
| 229 | 163 5310 | 5483 | 289 | 194 8188 | 4957 | 349 | 223 2561 | 4530 |
| 230 | 164 0793 | 5474 | 290 | 195 3145 | 4949 | 350 | 223 7091 | 4522 |
| 0.231 | 0.164 6267 | 5463 | 0.291 | 0.195 8094 | 4941 | 0.351 | 0.224 1613 | 4517 |
| 232 | 165 1730 | 5454 | 292 | 196 3035 | 4933 | 352 | 224 6130 | 4510 |
| 233 | 165 7184 | 5444 | 293 | 196 7968 | 4926 | 353 | 225 0640 | 4503 |
| 234 | 166 2628 | 5435 | 294 | 197 2894 | 4917 | 354 | 225 5143 | 4497 |
| 235 | 166 8063 | 5425 | 295 | 197 7811 | 4910 | 355 | 225 9640 | 4491 |
| 0.236 | 0.167 3488 | 5415 | 0.296 | 0.198 2721 | 4903 | 0.356 | 0.226 4131 | 4484 |
| 237 | 167 8903 | 5406 | 297 | 198 7624 | 4894 | 357 | 226 8615 | 4478 |
| 238 | 168 4309 | 5396 | 298 | 199 2518 | 4888 | 358 | 227 3093 | 4472 |
| 239 | 168 9705 | 5387 | 299 | 199 7406 | 4879 | 359 | 227 7565 | 4466 |
| 240 | 169 5092 | 5378 | 300 | 200 2285 | 4872 | 360 | 228 2031 | 4459 |
| 0.241 | 0.170 0470 | 5368 | 0.301 | 0.200 7157 | 4864 | 0.361 | 0.228 6490 | 4453 |
| 242 | 170 5838 | 5359 | 302 | 201 2021 | 4857 | 362 | 229 0943 | 4447 |
| 243 | 171 1197 | 5350 | 303 | 201 6878 | 4849 | 363 | 229 5390 | 4441 |
| 244 | 171 6547 | 5340 | 304 | 202 1727 | 4842 | 364 | 229 9831 | 4434 |
| 245 | 172 1887 | 5331 | 305 | 202 6569 | 4834 | 365 | 230 4265 | 4429 |
| 0.246 | 0.172 7218 | 5322 | 0.306 | 0.203 1403 | 4827 | 0.366 | 0.230 8694 | 4422 |
| 247 | 173 2540 | 5313 | 307 | 203 6230 | 4820 | 367 | 231 3116 | 4416 |
| 248 | 173 7853 | 5303 | 308 | 204 1050 | 4812 | 368 | 231 7532 | 4410 |
| 249 | 174 3156 | 5295 | 309 | 204 5862 | 4805 | 369 | 232 1942 | 4404 |
| 250 | 174 8451 | 5285 | 310 | 205 0667 | 4797 | 370 | 232 6346 | 4397 |
| 0.251 | 0.175 3736 | 5277 | 0.311 | 0.205 5464 | 4790 | 0.371 | 0.233 0743 | 4392 |
| 252 | 175 9013 | 5267 | 312 | 206 0254 | 4783 | 372 | 233 5135 | 4386 |
| 253 | 176 4280 | 5258 | 313 | 206 5037 | 4776 | 373 | 233 9521 | 4379 |
| 254 | 176 9538 | 5250 | 314 | 206 9813 | 4768 | 374 | 234 3900 | 4374 |
| 255 | 177 4788 | 5241 | 315 | 207 4581 | 4761 | 375 | 234 8274 | 4368 |
| 0.256 | 0.178 0029 | 5232 | 0.316 | 0.207 9342 | 4754 | 0.376 | 0.235 2642 | 4361 |
| 257 | 178 5261 | 5223 | 317 | 208 4096 | 4747 | 377 | 235 7003 | 4356 |
| 258 | 179 0484 | 5214 | 318 | 208 8843 | 4739 | 378 | 236 1359 | 4350 |
| 259 | 179 5698 | 5205 | 319 | 209 3582 | 4733 | 379 | 236 5709 | 4344 |
| 260 | 180 0903 | 5197 | 320 | 209 8315 | 4725 | 380 | 237 0053 | 4338 |
| 0.261 | 0.180 6100 | 5188 | 0.321 | 0.210 3040 | 4719 | 0.381 | 0.237 4391 | 4332 |
| 262 | 181 1288 | 5179 | 322 | 210 7759 | 4711 | 382 | 237 8723 | 4327 |
| 263 | 181 6467 | 5171 | 323 | 211 2470 | 4704 | 383 | 238 3050 | 4320 |
| 264 | 182 1638 | 5162 | 324 | 211 7174 | 4697 | 384 | 238 7370 | 4315 |
| 265 | 182 6800 | 5153 | 325 | 212 1871 | 4691 | 385 | 239 1685 | 4308 |
| 0.266 | 0.183 1953 | 5145 | 0.326 | 0.212 6562 | 4683 | 0.386 | 0.239 5993 | 4303 |
| 267 | 183 7098 | 5137 | 327 | 213 1245 | 4676 | 387 | 240 0296 | 4298 |
| 268 | 184 2235 | 5128 | 328 | 213 5921 | 4670 | 388 | 240 4594 | 4291 |
| 269 | 184 7363 | 5120 | 329 | 214 0591 | 4662 | 389 | 240 8885 | 4286 |
| 270 | 185 2483 | 5111 | 330 | 214 5253 | 4656 | 390 | 241 3171 | 4280 |
| 0.271 | 0.185 7594 | 5102 | 0.331 | 0.214 9909 | 4649 | 0.391 | 0.241 7451 | 4274 |
| 272 | 186 2696 | 5095 | 332 | 215 4558 | 4642 | 392 | 242 1725 | 4269 |
| 273 | 186 7791 | 5086 | 333 | 215 9200 | 4635 | 393 | 242 5994 | 4263 |
| 274 | 187 2877 | 5078 | 334 | 216 3835 | 4629 | 394 | 243 0257 | 4257 |
| 275 | 187 7955 | 5069 | 335 | 216 8464 | 4621 | 395 | 243 4514 | 4252 |
| 0.276 | 0.188 3024 | | 0.336 | 0.217 3085 | | 0.396 | 0.243 8766 | |

# Tafel IX.

| h | log ηη | Diff. | h | log ηη | Diff. | h | log ηη | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.396 | 0.243 8766 | 4246 | 0.456 | 0.268 4111 | 3935 | 0.516 | 0.291 2209 | 3670 |
| 397 | 244 3012 | 4240 | 457 | 268 8046 | 3931 | 517 | 291 5879 | 3666 |
| 398 | 244 7252 | 4235 | 458 | 269 1977 | 3926 | 518 | 291 9545 | 3662 |
| 399 | 245 1487 | 4229 | 459 | 269 5903 | 3921 | 519 | 292 3207 | 3657 |
| 400 | 245 5716 | 4224 | 460 | 269 9824 | 3917 | 520 | 292 6864 | 3654 |
| 0.401 | 0.245 9940 | 4218 | 0.461 | 0.270 3741 | 3911 | 0.521 | 0.293 0518 | 3650 |
| 402 | 246 4158 | 4213 | 462 | 270 7652 | 3907 | 522 | 293 4168 | 3645 |
| 403 | 246 8371 | 4207 | 463 | 271 1559 | 3903 | 523 | 293 7813 | 3642 |
| 404 | 247 2578 | 4201 | 464 | 271 5462 | 3898 | 524 | 294 1455 | 3637 |
| 405 | 247 6779 | 4196 | 465 | 271 9360 | 3893 | 525 | 294 5092 | 3634 |
| 0.406 | 0.248 0975 | 4191 | 0.466 | 0.272 3253 | 3888 | 0.526 | 0.294 8726 | 3629 |
| 407 | 248 5166 | 4185 | 467 | 272 7141 | 3884 | 527 | 295 2355 | 3626 |
| 408 | 248 9351 | 4180 | 468 | 273 1025 | 3879 | 528 | 295 5981 | 3621 |
| 409 | 249 3531 | 4174 | 469 | 273 4904 | 3874 | 529 | 295 9602 | 3618 |
| 410 | 249 7705 | 4169 | 470 | 273 8778 | 3870 | 530 | 296 3220 | 3613 |
| 0.411 | 0.250 1874 | 4164 | 0.471 | 0.274 2648 | 3865 | 0.531 | 0.296 6833 | 3610 |
| 412 | 250 6038 | 4158 | 472 | 274 6513 | 3861 | 532 | 297 0443 | 3606 |
| 413 | 251 0196 | 4153 | 473 | 275 0374 | 3856 | 533 | 297 4049 | 3601 |
| 414 | 251 4349 | 4147 | 474 | 275 4230 | 3852 | 534 | 297 7650 | 3598 |
| 415 | 251 8496 | 4142 | 475 | 275 8082 | 3847 | 535 | 298 1248 | 3594 |
| 0.416 | 0.252 2638 | 4137 | 0.476 | 0.276 1929 | 3842 | 0.536 | 0.298 4842 | 3590 |
| 417 | 252 6775 | 4131 | 477 | 276 5771 | 3838 | 537 | 298 8432 | 3586 |
| 418 | 253 0906 | 4126 | 478 | 276 9609 | 3834 | 538 | 299 2018 | 3582 |
| 419 | 253 5032 | 4121 | 479 | 277 3443 | 3829 | 539 | 299 5600 | 3578 |
| 420 | 253 9153 | 4116 | 480 | 277 7272 | 3824 | 540 | 299 9178 | 3574 |
| 0.421 | 0.254 3269 | 4110 | 0.481 | 0.278 1096 | 3820 | 0.541 | 0.300 2752 | 3571 |
| 422 | 254 7379 | 4106 | 482 | 278 4916 | 3816 | 542 | 300 6323 | 3566 |
| 423 | 255 1485 | 4099 | 483 | 278 8732 | 3811 | 543 | 300 9889 | 3563 |
| 424 | 255 5584 | 4095 | 484 | 279 2543 | 3806 | 544 | 301 3452 | 3559 |
| 425 | 255 9679 | 4090 | 485 | 279 6349 | 3803 | 545 | 301 7011 | 3555 |
| 0.426 | 0.256 3769 | 4084 | 0.486 | 0.280 0152 | 3797 | 0.546 | 0.302 0566 | 3551 |
| 427 | 256 7853 | 4079 | 487 | 280 3949 | 3794 | 547 | 302 4117 | 3547 |
| 428 | 257 1932 | 4074 | 488 | 280 7743 | 3789 | 548 | 302 7664 | 3544 |
| 429 | 257 6006 | 4069 | 489 | 281 1532 | 3784 | 549 | 303 1208 | 3540 |
| 430 | 258 0075 | 4064 | 490 | 281 5316 | 3780 | 550 | 303 4748 | 3536 |
| 0.431 | 0.258 4139 | 4059 | 0.491 | 0.281 9096 | 3776 | 0.551 | 0.303 8284 | 3532 |
| 432 | 258 8198 | 4054 | 492 | 282 2872 | 3772 | 552 | 304 1816 | 3528 |
| 433 | 259 2252 | 4048 | 493 | 282 6644 | 3767 | 553 | 304 5344 | 3525 |
| 434 | 259 6300 | 4044 | 494 | 283 0411 | 3762 | 554 | 304 8869 | 3521 |
| 435 | 260 0344 | 4038 | 495 | 283 4173 | 3759 | 555 | 305 2390 | 3517 |
| 0.436 | 0.260 4382 | 4033 | 0.496 | 0.283 7932 | 3754 | 0.556 | 0.305 5907 | 3513 |
| 437 | 260 8415 | 4029 | 497 | 284 1686 | 3750 | 557 | 305 9420 | 3510 |
| 438 | 261 2444 | 4023 | 498 | 284 5436 | 3745 | 558 | 306 2930 | 3506 |
| 439 | 261 6467 | 4019 | 499 | 284 9181 | 3742 | 559 | 306 6436 | 3502 |
| 440 | 262 0486 | 4013 | 500 | 285 2923 | 3737 | 560 | 306 9938 | 3499 |
| 0.441 | 0.262 4499 | 4008 | 0.501 | 0.285 6660 | 3732 | 0.561 | 0.307 3437 | 3494 |
| 442 | 262 8507 | 4004 | 502 | 286 0392 | 3729 | 562 | 307 6931 | 3491 |
| 443 | 263 2511 | 3998 | 503 | 286 4121 | 3724 | 563 | 308 0422 | 3488 |
| 444 | 263 6509 | 3994 | 504 | 286 7845 | 3720 | 564 | 308 3910 | 3484 |
| 445 | 264 0503 | 3989 | 505 | 287 1565 | 3716 | 565 | 308 7394 | 3480 |
| 0.446 | 0.264 4492 | 3983 | 0.506 | 0.287 5281 | 3711 | 0.566 | 0.309 0874 | 3476 |
| 447 | 264 8475 | 3979 | 507 | 287 8992 | 3708 | 567 | 309 4350 | 3473 |
| 448 | 265 2454 | 3974 | 508 | 288 2700 | 3703 | 568 | 309 7823 | 3469 |
| 449 | 265 6428 | 3969 | 509 | 288 6403 | 3699 | 569 | 310 1292 | 3466 |
| 450 | 266 0397 | 3965 | 510 | 289 0102 | 3695 | 570 | 310 4758 | 3462 |
| 0.451 | 0.266 4362 | 3959 | 0.511 | 0.289 3797 | 3690 | 0.571 | 0.310 8220 | 3458 |
| 452 | 266 8321 | 3955 | 512 | 289 7487 | 3687 | 572 | 311 1678 | 3455 |
| 453 | 267 2276 | 3950 | 513 | 290 1174 | 3682 | 573 | 311 5133 | 3451 |
| 454 | 267 6226 | 3945 | 514 | 290 4856 | 3679 | 574 | 311 8584 | 3447 |
| 455 | 268 0171 | 3940 | 515 | 290 8535 | 3674 | 575 | 312 2031 | 3444 |
| 0.456 | 0.268 4111 | | 0.516 | 0.291 2209 | | 0.576 | 0.312 5475 | |

## Tafel X (vergl. pag. 195).

| $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 0.300 | 43906 | — 0.240 | 28939 | — 0.180 | 16782 | — 0.120 | 7698 | — 0.060 | 1988 |
| — 0.299 | 43635 | — 0.239 | 28713 | — 0.179 | 16604 | — 0.119 | 7574 | — 0.059 | 1924 |
| — 0.298 | 43364 | — 0.238 | 28487 | — 0.178 | 16428 | — 0.118 | 7451 | — 0.058 | 1860 |
| — 0.297 | 43095 | — 0.237 | 28263 | — 0.177 | 16252 | — 0.117 | 7329 | — 0.057 | 1798 |
| — 0.296 | 42826 | — 0.236 | 28039 | — 0.176 | 16077 | — 0.116 | 7208 | — 0.056 | 1736 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.295 | 42557 | — 0.235 | 27816 | — 0.175 | 15903 | — 0.115 | 7088 | — 0.055 | 1675 |
| — 0.294 | 42290 | — 0.234 | 27593 | — 0.174 | 15730 | — 0.114 | 6969 | — 0.054 | 1616 |
| — 0.293 | 42023 | — 0.233 | 27371 | — 0.173 | 15558 | — 0.113 | 6851 | — 0.053 | 1558 |
| — 0.292 | 41757 | — 0.232 | 27151 | — 0.172 | 15387 | — 0.112 | 6734 | — 0.052 | 1500 |
| — 0.291 | 41491 | — 0.231 | 26931 | — 0.171 | 15216 | — 0.111 | 6618 | — 0.051 | 1444 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.290 | 41227 | — 0.230 | 26711 | — 0.170 | 15047 | — 0.110 | 6503 | — 0.050 | 1389 |
| — 0.289 | 40963 | — 0.229 | 26493 | — 0.169 | 14878 | — 0.109 | 6389 | — 0.049 | 1334 |
| — 0.288 | 40700 | — 0.228 | 26275 | — 0.168 | 14710 | — 0.108 | 6275 | — 0.048 | 1281 |
| — 0.287 | 40437 | — 0.227 | 26058 | — 0.167 | 14543 | — 0.107 | 6163 | — 0.047 | 1229 |
| — 0.286 | 40175 | — 0.226 | 25842 | — 0.166 | 14377 | — 0.106 | 6052 | — 0.046 | 1178 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.285 | 39914 | — 0.225 | 25627 | — 0.165 | 14211 | — 0.105 | 5941 | — 0.045 | 1128 |
| — 0.284 | 39654 | — 0.224 | 25412 | — 0.164 | 14047 | — 0.104 | 5832 | — 0.044 | 1079 |
| — 0.283 | 39394 | — 0.223 | 25199 | — 0.163 | 13883 | — 0.103 | 5723 | — 0.043 | 1031 |
| — 0.282 | 39135 | — 0.222 | 24986 | — 0.162 | 13721 | — 0.102 | 5616 | — 0.042 | 984 |
| — 0.281 | 38877 | — 0.221 | 24774 | — 0.161 | 13559 | — 0.101 | 5509 | — 0.041 | 938 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.280 | 38620 | — 0.220 | 24562 | — 0.160 | 13398 | — 0.100 | 5403 | — 0.040 | 894 |
| — 0.279 | 38363 | — 0.219 | 24352 | — 0.159 | 13238 | — 0.099 | 5299 | — 0.039 | 850 |
| — 0.278 | 38107 | — 0.218 | 24142 | — 0.158 | 13079 | — 0.098 | 5195 | — 0.038 | 807 |
| — 0.277 | 37852 | — 0.217 | 23932 | — 0.157 | 12921 | — 0.097 | 5092 | — 0.037 | 766 |
| — 0.276 | 37598 | — 0.216 | 23725 | — 0.156 | 12763 | — 0.096 | 4991 | — 0.036 | 726 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.275 | 37344 | — 0.215 | 23518 | — 0.155 | 12607 | — 0.095 | 4890 | — 0.035 | 686 |
| — 0.274 | 37091 | — 0.214 | 23311 | — 0.154 | 12451 | — 0.094 | 4790 | — 0.034 | 648 |
| — 0.273 | 36839 | — 0.213 | 23106 | — 0.153 | 12296 | — 0.093 | 4691 | — 0.033 | 611 |
| — 0.272 | 36587 | — 0.212 | 22901 | — 0.152 | 12143 | — 0.092 | 4593 | — 0.032 | 575 |
| — 0.271 | 36337 | — 0.211 | 22697 | — 0.151 | 11990 | — 0.091 | 4496 | — 0.031 | 539 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.270 | 36087 | — 0.210 | 22494 | — 0.150 | 11838 | — 0.090 | 4401 | — 0.030 | 506 |
| — 0.269 | 35838 | — 0.209 | 22291 | — 0.149 | 11686 | — 0.089 | 4306 | — 0.029 | 473 |
| — 0.268 | 35589 | — 0.208 | 22090 | — 0.148 | 11536 | — 0.088 | 4212 | — 0.028 | 441 |
| — 0.267 | 35341 | — 0.207 | 21889 | — 0.147 | 11387 | — 0.087 | 4119 | — 0.027 | 410 |
| — 0.266 | 35094 | — 0.206 | 21689 | — 0.146 | 11238 | — 0.086 | 4027 | — 0.026 | 381 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.265 | 34848 | — 0.205 | 21490 | — 0.145 | 11091 | — 0.085 | 3936 | — 0.025 | 352 |
| — 0.264 | 34603 | — 0.204 | 21292 | — 0.144 | 10944 | — 0.084 | 3846 | — 0.024 | 325 |
| — 0.263 | 34358 | — 0.203 | 21094 | — 0.143 | 10798 | — 0.083 | 3757 | — 0.023 | 298 |
| — 0.262 | 34114 | — 0.202 | 20897 | — 0.142 | 10653 | — 0.082 | 3669 | — 0.022 | 273 |
| — 0.261 | 33871 | — 0.201 | 20702 | — 0.141 | 10509 | — 0.081 | 3582 | — 0.021 | 249 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.260 | 33628 | — 0.200 | 20507 | — 0.140 | 10366 | — 0.080 | 3496 | — 0.020 | 226 |
| — 0.259 | 33387 | — 0.199 | 20312 | — 0.139 | 10224 | — 0.079 | 3411 | — 0.019 | 204 |
| — 0.258 | 33146 | — 0.198 | 20119 | — 0.138 | 10083 | — 0.078 | 3327 | — 0.018 | 183 |
| — 0.257 | 32905 | — 0.197 | 19926 | — 0.137 | 9943 | — 0.077 | 3244 | — 0.017 | 164 |
| — 0.256 | 32666 | — 0.196 | 19735 | — 0.136 | 9803 | — 0.076 | 3162 | — 0.016 | 145 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.255 | 32427 | — 0.195 | 19544 | — 0.135 | 9665 | — 0.075 | 3081 | — 0.015 | 127 |
| — 0.254 | 32189 | — 0.194 | 19354 | — 0.134 | 9527 | — 0.074 | 3001 | — 0.014 | 111 |
| — 0.253 | 31952 | — 0.193 | 19165 | — 0.133 | 9390 | — 0.073 | 2922 | — 0.013 | 96 |
| — 0.252 | 31716 | — 0.192 | 18976 | — 0.132 | 9255 | — 0.072 | 2844 | — 0.012 | 82 |
| — 0.251 | 31480 | — 0.191 | 18789 | — 0.131 | 9120 | — 0.071 | 2767 | — 0.011 | 69 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.250 | 31245 | — 0.190 | 18602 | — 0.130 | 8986 | — 0.070 | 2691 | — 0.010 | 57 |
| — 0.249 | 31001 | — 0.189 | 18416 | — 0.129 | 8853 | — 0.069 | 2617 | — 0.009 | 46 |
| — 0.248 | 30778 | — 0.188 | 18231 | — 0.128 | 8721 | — 0.068 | 2543 | — 0.008 | 36 |
| — 0.247 | 30545 | — 0.187 | 18047 | — 0.127 | 8590 | — 0.067 | 2470 | — 0.007 | 28 |
| — 0.246 | 30314 | — 0.186 | 17864 | — 0.126 | 8459 | — 0.066 | 2398 | — 0.006 | 20 |
| | | | | | | | | | |
| — 0.245 | 30083 | — 0.185 | 17681 | — 0.125 | 8330 | — 0.065 | 2327 | — 0.005 | 14 |
| — 0.244 | 29852 | — 0.184 | 17500 | — 0.124 | 8202 | — 0.064 | 2257 | — 0.004 | 9 |
| — 0.243 | 29623 | — 0.183 | 17319 | — 0.123 | 8074 | — 0.063 | 2189 | — 0.003 | 5 |
| — 0.242 | 29394 | — 0.182 | 17139 | — 0.122 | 7948 | — 0.062 | 2121 | — 0.002 | 2 |
| — 0.241 | 29166 | — 0.181 | 16960 | — 0.121 | 7822 | — 0.061 | 2054 | — 0.001 | 1 |
| — 0.240 | 28939 | — 0.180 | 16782 | — 0.120 | 7698 | — 0.060 | 1988 | — 0.000 | 0 |

## Tafel X.

| $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ | $x$ | $10^7.\xi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 0 | + 0.060 | 2131 | + 0.120 | 8845 | + 0.180 | 20685 | + 0.240 | 38289 |
| + 0.001 | 1 | + 0.061 | 2204 | + 0.121 | 8999 | + 0.181 | 20929 | + 0.241 | 38635 |
| + 0.002 | 2 | + 0.062 | 2278 | + 0.122 | 9154 | + 0.182 | 21175 | + 0.242 | 38983 |
| + 0.003 | 5 | + 0.063 | 2354 | + 0.123 | 9311 | + 0.183 | 21422 | + 0.243 | 39333 |
| + 0.004 | 9 | + 0.064 | 2431 | + 0.124 | 9469 | + 0.184 | 21671 | + 0.244 | 39685 |
| + 0.005 | 14 | + 0.065 | 2509 | + 0.125 | 9628 | + 0.185 | 21922 | + 0.245 | 40039 |
| + 0.006 | 21 | + 0.066 | 2588 | + 0.126 | 9789 | + 0.186 | 22174 | + 0.246 | 40394 |
| + 0.007 | 28 | + 0.067 | 2669 | + 0.127 | 9951 | + 0.187 | 22428 | + 0.247 | 40752 |
| + 0.008 | 37 | + 0.068 | 2751 | + 0.128 | 10115 | + 0.188 | 22683 | + 0.248 | 41111 |
| + 0.009 | 47 | + 0.069 | 2834 | + 0.129 | 10280 | + 0.189 | 22941 | + 0.249 | 41472 |
| + 0.010 | 57 | + 0.070 | 2918 | + 0.130 | 10447 | + 0.190 | 23199 | + 0.250 | 41835 |
| + 0.011 | 70 | + 0.071 | 3004 | + 0.131 | 10615 | + 0.191 | 23460 | + 0.251 | 42199 |
| + 0.012 | 83 | + 0.072 | 3091 | + 0.132 | 10784 | + 0.192 | 23722 | + 0.252 | 42566 |
| + 0.013 | 97 | + 0.073 | 3180 | + 0.133 | 10955 | + 0.193 | 23985 | + 0.253 | 42934 |
| + 0.014 | 113 | + 0.074 | 3269 | + 0.134 | 11128 | + 0.194 | 24251 | + 0.254 | 43305 |
| + 0.015 | 130 | + 0.075 | 3360 | + 0.135 | 11301 | + 0.195 | 24518 | + 0.255 | 43677 |
| + 0.016 | 148 | + 0.076 | 3453 | + 0.136 | 11477 | + 0.196 | 24786 | + 0.256 | 44051 |
| + 0.017 | 167 | + 0.077 | 3546 | + 0.137 | 11654 | + 0.197 | 25056 | + 0.257 | 44427 |
| + 0.018 | 187 | + 0.078 | 3641 | + 0.138 | 11832 | + 0.198 | 25328 | + 0.258 | 44804 |
| + 0.019 | 209 | + 0.079 | 3738 | + 0.139 | 12012 | + 0.199 | 25602 | + 0.259 | 45184 |
| + 0.020 | 231 | + 0.080 | 3835 | + 0.140 | 12193 | + 0.200 | 25877 | + 0.260 | 45566 |
| + 0.021 | 255 | + 0.081 | 3934 | + 0.141 | 12376 | + 0.201 | 26154 | + 0.261 | 45949 |
| + 0.022 | 280 | + 0.082 | 4034 | + 0.142 | 12560 | + 0.202 | 26433 | + 0.262 | 46334 |
| + 0.023 | 306 | + 0.083 | 4136 | + 0.143 | 12745 | + 0.203 | 26713 | + 0.263 | 46721 |
| + 0.024 | 334 | + 0.084 | 4239 | + 0.144 | 12933 | + 0.204 | 26995 | + 0.264 | 47111 |
| + 0.025 | 362 | + 0.085 | 4343 | + 0.145 | 13121 | + 0.205 | 27278 | + 0.265 | 47502 |
| + 0.026 | 392 | + 0.086 | 4448 | + 0.146 | 13311 | + 0.206 | 27564 | + 0.266 | 47894 |
| + 0.027 | 423 | + 0.087 | 4555 | + 0.147 | 13503 | + 0.207 | 27851 | + 0.267 | 48289 |
| + 0.028 | 455 | + 0.088 | 4663 | + 0.148 | 13696 | + 0.208 | 28139 | + 0.268 | 48686 |
| + 0.029 | 489 | + 0.089 | 4773 | + 0.149 | 13891 | + 0.209 | 28429 | + 0.269 | 49085 |
| + 0.030 | 523 | + 0.090 | 4884 | + 0.150 | 14087 | + 0.210 | 28722 | + 0.270 | 49485 |
| + 0.031 | 559 | + 0.091 | 4996 | + 0.151 | 14285 | + 0.211 | 29015 | + 0.271 | 49888 |
| + 0.032 | 596 | + 0.092 | 5109 | + 0.152 | 14484 | + 0.212 | 29311 | + 0.272 | 50292 |
| + 0.033 | 634 | + 0.093 | 5224 | + 0.153 | 14684 | + 0.213 | 29608 | + 0.273 | 50699 |
| + 0.034 | 674 | + 0.094 | 5341 | + 0.154 | 14886 | + 0.214 | 29907 | + 0.274 | 51107 |
| + 0.035 | 714 | + 0.095 | 5458 | + 0.155 | 15090 | + 0.215 | 30207 | + 0.275 | 51517 |
| + 0.036 | 756 | + 0.096 | 5577 | + 0.156 | 15295 | + 0.216 | 30509 | + 0.276 | 51930 |
| + 0.037 | 799 | + 0.097 | 5697 | + 0.157 | 15502 | + 0.217 | 30814 | + 0.277 | 52344 |
| + 0.038 | 844 | + 0.098 | 5819 | + 0.158 | 15710 | + 0.218 | 31119 | + 0.278 | 52760 |
| + 0.039 | 889 | + 0.099 | 5942 | + 0.159 | 15920 | + 0.219 | 31427 | + 0.279 | 53178 |
| + 0.040 | 936 | + 0.100 | 6066 | + 0.160 | 16131 | + 0.220 | 31736 | + 0.280 | 53598 |
| + 0.041 | 984 | + 0.101 | 6192 | + 0.161 | 16344 | + 0.221 | 32047 | + 0.281 | 54020 |
| + 0.042 | 1033 | + 0.102 | 6319 | + 0.162 | 16559 | + 0.222 | 32359 | + 0.282 | 54444 |
| + 0.043 | 1084 | + 0.103 | 6448 | + 0.163 | 16775 | + 0.223 | 32674 | + 0.283 | 54870 |
| + 0.044 | 1135 | + 0.104 | 6578 | + 0.164 | 16992 | + 0.224 | 32990 | + 0.284 | 55298 |
| + 0.045 | 1188 | + 0.105 | 6709 | + 0.165 | 17211 | + 0.225 | 33308 | + 0.285 | 55728 |
| + 0.046 | 1242 | + 0.106 | 6842 | + 0.166 | 17432 | + 0.226 | 33627 | + 0.286 | 56160 |
| + 0.047 | 1298 | + 0.107 | 6976 | + 0.167 | 17654 | + 0.227 | 33949 | + 0.287 | 56594 |
| + 0.048 | 1354 | + 0.108 | 7111 | + 0.168 | 17878 | + 0.228 | 34272 | + 0.288 | 57030 |
| + 0.049 | 1412 | + 0.109 | 7248 | + 0.169 | 18103 | + 0.229 | 34597 | + 0.289 | 57468 |
| + 0.050 | 1471 | + 0.110 | 7386 | + 0.170 | 18330 | + 0.230 | 34924 | + 0.290 | 57908 |
| + 0.051 | 1532 | + 0.111 | 7526 | + 0.171 | 18558 | + 0.231 | 35252 | + 0.291 | 58350 |
| + 0.052 | 1593 | + 0.112 | 7667 | + 0.172 | 18788 | + 0.232 | 35582 | + 0.292 | 58795 |
| + 0.053 | 1656 | + 0.113 | 7809 | + 0.173 | 19020 | + 0.233 | 35914 | + 0.293 | 59241 |
| + 0.054 | 1720 | + 0.114 | 7953 | + 0.174 | 19253 | + 0.234 | 36248 | + 0.294 | 59689 |
| + 0.055 | 1785 | + 0.115 | 8098 | + 0.175 | 19487 | + 0.235 | 36584 | + 0.295 | 60139 |
| + 0.056 | 1852 | + 0.116 | 8245 | + 0.176 | 19724 | + 0.236 | 36921 | + 0.296 | 60591 |
| + 0.057 | 1920 | + 0.117 | 8393 | + 0.177 | 19961 | + 0.237 | 37260 | + 0.297 | 61045 |
| + 0.058 | 1989 | + 0.118 | 8542 | + 0.178 | 20201 | + 0.238 | 37601 | + 0.298 | 61502 |
| + 0.059 | 2060 | + 0.119 | 8693 | + 0.179 | 20442 | + 0.239 | 37944 | + 0.299 | 61960 |
| + 0.060 | 2131 | + 0.120 | 8845 | + 0.180 | 20685 | + 0.240 | 38289 | + 0.300 | 62421 |

# Tafel XI (vergl. pag. 144).

| $i$ | $\Omega$ | $\pi$ | $\log q$ | $e$ | $T$ | No. | $i$ | $\Omega$ | $\pi$ | $\log q$ | $e$ | $T$ | No. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° | 133° | 357° | 9.83 | 0.79 | 1770 Aug. 14 | 81 | 47° | 111° | 89° | 0.17 | 0.99 | 1846 Jan. 22 | 170 |
| 2 | 69 | 94 | 9.92 | 1.00 | 1743 Jan. 11 | 65 | 47 | 337 | 91 | 9.96 | 1.00 | 1845 Jan. 8 | 167 |
| 3 | 64 | 343 | 0.07 | 0.62 | period. Comet | 45,164 | 48 | 9 | 50 | 0.12 | 1.00 | 1860 März 6 | 217 |
| 4 | 191 | 141 | 9.81 | 1.00 | 1702 März 14 | 55 | 49 | 22 | 276 | 8.63 | 1.00 | 1847 März 30 | 177 |
| 4 | 314 | 336 | 9.96 | 1.00 | 568 Aug. 29 | 4 | 49 | 203 | 322 | 9.89 | 1.00 | 1864 Dec. 22 | (235) |
| 6 | 22 | 143 | 9.98 | 1.00 | 1231 Jan. 30 | 12 | 50 | 5 | 99 | 9.92 | 0.99 | 1846 Oct. 30 | 176 |
| 6 | 41 | 13 | 0.04 | 1.00 | 1585 Oct. 8 | 32 | 51 | 196 | 160 | 9.60 | 1.00 | 1786 Juli 9 | 97 |
| 6 | 101 | 236 | 0.19 | 0.51 | 1867 Mai 24 | (240) | 52 | 3 | 73 | 0.17 | 0.97 | 1793 Nov. 20 | 107 |
| 6 | 212 | 66 | 9.98 | 1.00 | 1366 Oct. 13 | $18_a$ | 52 | 294 | 64 | 9.87 | 1.00 | 1490 Dec. 24 | 24 |
| 6 | 226 | 277 | 9.71 | 1.00 | 1834 April 3 | 154 | 53 | 120 | 192 | 9.79 | 1.00 | 1840 Jan. 4 | 156 |
| 6 | 336 | 141 | 9.98 | 1.00 | 1746 Febr. 15 | ... | 53 | 157 | 282 | 0.21 | 1.00 | 1843 Mai 6 | 162 |
| 7 | 323 | 223 | 9.66 | 1.00 | 1833 Sept. 10 | 153 | 54 | 269 | 116 | 0.01 | 0.82 | period. Comet | 102 |
| 8 | 75 | 252 | 9.60 | 0.86 | 1766 April 27 | 79 | 55 | 15 | 75 | 9.63 | 1.00 | 1706 Jan. 30 | 56 |
| 9 | 78 | 68 | 9.95 | 0.69 | 1819 Nov. 20 | 132 | 55 | 280 | 5 | 0.02 | 1.00 | 1824 Sept. 29 | 139 |
| 10 | 75*) | 332 | 9.53 | 1.00 | 539 Oct. 21 | 2 | 56 | 177 | 149 | 0.03 | 1.00 | 1804 Febr. 14 | 116 |
| 11 | 29 | 105 | 9.96 | 1.01 | 1771 April 19 | 83 | 56 | 347 | 193 | 0.10 | 1.00 | 1845 April 21 | 168 |
| 11 | 113 | 276 | 9.89 | 0.76 | period. Comet | 131 | 57 | 311 | 333 | 0.04 | 1.00 | 1802 Sept. 10 | 115 |
| 11 | 209 | 50 | 0.23 | 0.56 | period. Comet | 163 | 58 | 249 | 23 | 0.17 | 0.97 | 1840 Nov. 14 | 159 |
| 13 | 216 | 124 | 9.53 | 1.00 | 1757 Oct. 21 | 71 | 61 | 123 | 76 | 0.05 | 1.00 | 1773 Sept. 6 | 85 |
| 13 | 246 | 109 | 9.93 | 0.76 | period. Comet | 84 | 61 | 275 | 265 | 7.79 | 1.00 | 1680 Dec. 18 | 46 |
| 13 | 334 | 158 | 9.53 | 0.85 | period. Comet | 96 | 62 | 140 | 311 | 9.49 | 1.00 | 1853 Sept. 2 | 196 |
| 14 | 148 | 323 | 0.07 | 0.66 | period. Comet | 189 | 63 | 267 | 272 | 9.81 | 1.00 | 1807 Sept. 19 | 118 |
| 14 | 238 | 165 | 0.13 | 0.99 | 1854 Dec. 16 | 202 | 63 | 309 | 64 | 9.99 | 1.00 | 1810 Oct. 6 | 121 |
| 16 | 149 | 309 | 9.92 | 1.00 | 1264 Juli 20 | 13 | 64 | 305 | 60 | 9.89 | 1.00 | 1863 Dec. 28 | 230 |
| 18 | 78 | 76 | 0.20 | 0.85 | 1867 Jan. 30 | (239) | 65 | 23 | 112 | 9.78 | 1.00 | 1580 Nov. 28 | 30 |
| 18 | 228 | 327 | 9.35 | 1.00 | 1737 Jan. 30 | 61 | 65 | 353 | 24 | 9.88 | 1.00 | 1788 Nov. 20 | 100 |
| 19 | 310 | 79 | 9.69 | 0.97 | 1847 Sept. 10 | 181 | 66 | 271 | 241 | 9.98 | 1.00 | 1684 Juni 8 | 48 |
| 20 | 251 | 96 | 9.87 | 1.00 | 1818 Febr. 7 | ... | 67 | 31 | 267 | 9.95 | 1.00 | 1849 Juni 8 | 186 |
| 20 | 262 | 98 | 0.32 | 1.00 | 1457 Sept. 4 | ... | 67 | 34 | 280 | 9.80 | 1.00 | 1748 Juni 19 | 70 |
| 21 | 207 | 212 | 9.96 | 1.00 | 1830 April 9 | 150 | 67 | 203 | 236 | 0.06 | 1.00 | 1849 Mai 26 | 185 |
| 21 | 297 | 322 | 9.71 | 1.00 | 1618 Aug. 17 | 36 | 68 | 93 | 273 | 0.03 | 1.00 | 1850 Juli 24 | 187 |
| 22 | 218 | 62 | 9.93 | 1.00 | 1695 Nov. 10 | 51 | 68 | 232 | 269 | 9.33 | 1.00 | 1758 Juni 11 | 72 |
| 23 | 171 | 197 | 0.08 | 1.00 | 1858 Mai 3 | 211 | 70 | 165 | 315 | 9.90 | 1.00 | —69 Juli | $1_b$ |
| 26 | 44 | 58 | 9.93 | 1.00 | 1826 Oct. 9 | 145 | 70 | 265 | 111 | 0.06 | 1.00 | 1785 Jan. 27 | 94 |
| 27 | 196 | 43 | 9.40 | 1.00 | 1668 Febr. 25 | 42 | 73 | 218 | 343 | 9.87 | 1.00 | 1097 Sept. 22 | 11 |
| 28 | 304 | 222 | 9.51 | 1.00 | 1533 Juni 15 | 27 | 73 | 358 | 86 | 9.70 | 1.00 | 1763 Nov. 2 | 76 |
| 29 | 136 | 167 | 9.97 | 1.00 | 1092 Febr. 15 | ... | 74 | 44 | 339 | 9.15 | 1.00 | 1851 Oct. 1 | 191 |
| 30 | 102 | 116 | 9.79 | 0.80 | period. Comet | 171 | 74 | 254 | 93 | 9.89 | 0.95 | 1812 Sept. 15 | 124 |
| 30 | 261 | 240 | 0.18 | 0.72 | 1846 Juni 1 | 174 | 77 | 312 | 322 | 0.61 | 1.00 | 1729 Juni 13 | 60 |
| 31 | 94 | 48 | 0.20 | 0.98 | 1811 Nov. 11 | 123 | 78 | 97 | 95 | 9.85 | 1.00 | 1863 Nov. 9 | 229 |
| 31 | 353 | 79 | 9.51 | 1.00 | 1686 Sept. 17 | 49 | 79 | 85 | 161 | 9.47 | 1.00 | 1860 Juni 16 | 218 |
| 32 | 179 | 280 | 9.69 | 1.00 | 1556 April 22 | [13] | 79 | 91 | 31 | 9.93 | 1.00 | 1652 Nov. 13 | 38 |
| 33 | 26 | 88 | 9.85 | 1.00 | 1779 Jan. 4 | 87 | 79 | 141 | 55 | 9.90 | 1.00 | 1759 Nov. 27 | 73 |
| 33 | 84 | 118 | 9.65 | 1.00 | 1661 Jan. 27 | 39 | 80 | 30 | 243 | 9.96 | 0.98 | 1861 Juni 3 | 220 |
| 33 | 92 | 116 | 9.71 | 1.00 | 1532 Oct. 18 | 26 | 80 | 186 | 324 | 9.87 | 1.00 | 1840 April 3 | 158 |
| 33 | 201 | 22 | 9.87 | 0.98 | 1857 Aug. 24 | 208 | 80 | 324 | 174 | 0.08 | 1.00 | 1860 Febr. 17 | 216 |
| 34 | 47 | 354 | 9.81 | 1.00 | 1860 Sept. 21 | 219 | 81 | 275 | 288 | 9.53 | 1.00 | 1819 Juni 28 | 130 |
| 37 | 79 | 6 | 9.59 | 1.00 | 1618 Nov. 8 | 37 | 82 | 84 | 241 | 9.89 | 1.00 | 1781 Juli 7 | 90 |
| 38 | 224 | 311 | 9.99 | 1.00 | 1851 Aug. 26 | 190 | 83 | 105 | 183 | 0.12 | 1.00 | 1863 Dec. 29 | 231 |
| 39 | 125 | 264 | 9.94 | 1.00 | 1737 Juni 8 | 62 | 83 | 181 | 318 | 0.15 | 1.00 | 1774 Aug. 15 | 86 |
| 40 | 198 | 117 | 0.30 | 1.00 | 1826 April 22 | 143 | 83 | 300 | 49 | 9.84 | 1.00 | 1672 März 1 | 43 |
| 40 | 206 | 89 | 9.75 | 1.00 | 1850 Oct. 19 | 188 | 85 | 78 | 91 | 9.82 | 0.96 | 1846 März 5 | 172 |
| 41 | 176 | 145 | 9.09 | 1.00 | 1769 Oct. 8 | 80 | 85 | 117 | 191 | 9.90 | 1.00 | 1863 Febr. 3 | 236 |
| 41 | 324 | 94 | 9.90 | 0.99 | 1854 Oct. 28 | 201 | 85 | 215 | 63 | 9.98 | 1.00 | 1849 Jan. 19 | 184 |
| 41 | 346 | 43 | 0.10 | 0.92 | 1852 Oct. 13 | 193 | 85 | 250 | 306 | 9.80 | 1.00 | 1863 April 21 | 228 |
| 43 | 324 | 268 | 8.69 | 1.00 | 1816 März 1 | ... | 85 | 279 | 249 | 9.92 | 0.99 | 1861 Juni 12 | 221 |
| 44 | 84 | 150 | 0.08 | 0.93 | 1815 April 26 | 127 | 86 | 350 | 105 | 0.00 | 1.00 | 1762 Mai 28 | 75 |
| 44 | 123 | 106 | 9.69 | 1.00 | 1798 April 5 | 110 | 88 | 168 | 180 | 8.95 | 1.00 | 1593 Juli 19 | 34 |
| 44 | 202 | 293 | 9.57 | 1.00 | 240 Nov. 10 | $1_d$ | 88 | 313 | 75 | 9.89 | 1.00 | 1857 März 21 | 206 |
| 45 | 57 | 51 | 0.16 | 0.55 | 1783 Nov. 20 | 92 | 89 | 55 | 82 | 9.93 | 1.00 | 1707 Dec. 12 | 57 |
| 46 | 118 | 296 | 9.40 | 1.00 | 1844 Dec. 14 | 166 | 90 | 71 | 183 | 0.08 | 1.00 | 1818 Febr. 26 | 128 |
| 46 | 146 | 161 | 9.98 | 1.00 | 574 April 7 | 5 | 90 | 193 | 11 | 9.95 | 1.00 | 1825 Aug. 19 | 141 |
| 47 | 47 | 199 | 9.35 | 1.00 | 1744 März 1 | 67 | 91 | 235 | 155 | 8.43 | 1.00 | 1826 Nov. 18 | 146 |

*) oder 255°.

# Tafel XI.

| $i$ | ☊ | $\pi$ | $\log q$ | $e$ | $T$ | No. | $i$ | ☊ | $\pi$ | $\log q$ | $e$ | $T$ | No. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 92° | 65° | 193° | 9.63 | 1.00 | 1785 April 8 | 95 | 129° | 190° | 153° | 0.34 | 0.97 | 1855 Febr. 5 | 203 |
| 92 | 253 | 5 | 8.42 | 1.00 | 1865 Jan. 14 | (237) | 129 | 330 | 250 | 9.72 | 1.00 | 1797 Juli 9 | 109 |
| 95 | 234 | 252 | 9.92 | 1.00 | 1748 April 29 | 69 | 130 | 16 | 347 | 0.00 | 1.00 | 1723 Sept. 28 | 59 |
| 95 | 357 | 279 | 9.30 | 1.00 | 1859 Mai 29 | 215 | 131 | 32 | 243 | 9.93 | 1.00 | 1844 Oct. 17 | 165 |
| 96 | 65 | 213 | 9.52 | 1.00 | 1867 Nov. 7 | (241) | 131 | 284 | 71 | 9.99 | 1.00 | 1792 Dec. 27 | 105 |
| 96 | 176 | 262 | 9.74 | 0.98 | 1683 Juli 13 | 47 | 131 | 317 | 356 | 9.96 | 1.05 | 1852 April 21 | 192 |
| 96 | 212 | 113 | 9.51 | 1.00 | 1848 Sept. 8 | 183 | 131 | 338 | 54 | 9.60 | 0.99 | 1845 Juni 6 | 169 |
| 97 | 315 | 57 | 9.44 | 1.00 | 1854 März 24 | 199 | 132 | 54 | 179 | 9.76 | 1.00 | 1868 Juni 26 *) | (242) |
| 97 | 338 | 70 | 0.25 | 1.00 | 1847 Aug. 9 | 179 | 132 | 108 | 207 | 9.54 | 1.00 | 1787 Mai 11 | 98 |
| 99 | 43 | 248 | 0.08 | 1.00 | 1813 Mai 20 | 126 | 134 | 8 | 127 | 9.72 | 1.00 | 1743 Sept. 21 | 66 |
| 100 | 174 | 206 | 0.33 | 1.00 | 1847 Juni 5 | 178 | 134 | 324 | 217 | 9.59 | 1.00 | 1808 Mai 13 | 119 |
| 100 | 325 | 64 | 9.74 | 1.00 | 1858 Juni 5 | 212 | 135 | 138 | 20 | 9.59 | 1.00 | 1506 Sept. 4 | 25 |
| 101 | 3 | 86 | 9.74 | 1.00 | 961 Dec. 30 | 8 | 135 | 175 | 161 | 9.80 | 1.00 | 1864 Juli 28 | (232) |
| 101 | 140 | 352 | 9.53 | 1.00 | 1433 Nov. 4 | 21 | 135 | 338 | 5 | 9.10 | 1.00 | 1830 Dec. 28 | 151 |
| 101 | 149 | 19 | 0.34 | 1.00 | 1747 März 3 | 68 | 136 | 67 | 132 | 9.93 | 1.00 | 1468 Oct. 7 | 22 |
| 101 | 239 | 338 | 9.45 | 1.00 | 1677 Mai 6 | 44 | 136 | 318 | 339 | 9.91 | 1.00 | 1827 Juni 8 | 148 |
| 102 | 185 | 336 | 9.70 | 1.00 | 1827 Febr. 5 | 147 | 137 | 73 | 277 | 0.07 | 1.00 | 1832 Sept. 26 | 152 |
| 103 | 328 | 104 | 9.80 | 1.00 | 1799 Dec. 26 | 113 | 138 | 145 | 117 | 9.92 | 1.00 | 1861 Dec. 7 | 222 |
| 104 | 231 | 27 | 9.03 | 1.00 | 1665 April 24 | 41 | 138 | 250 | 105 | 9.89 | 1.00 | 1798 Dec. 32 | 111 |
| 104 | 303 | 332 | 9.36 | 1.00 | 1823 Dec. 9 | 137 | 138 | 301 | 106 | 9.77 | 1.00 | 1701 Oct. 17 | 54 |
| 105 | 29 | 285 | 9.25 | 1.00 | 1577 Oct. 27 | 29 | 138 | 356 | 226 | 9.90 | 1.00 | 1862 Dec. 28 | 225 |
| 105 | 268 | 63 | 9.88 | 1.00 | 1491 Jan. 5 | $24_a$ | 139 | 245 | 346 | 9.70 | 1.00 | 1766 Febr. 17 | 78 |
| 106 | 49 | 218 | 8.96 | 1.00 | 1821 März 22 | 133 | 140 | 100 | 191 | 9.92 | 1.00 | 1337 Juni 15 | 16 |
| 106 | 208 | 88 | 9.70 | 1.00 | 1842 Dec. 16 | 160 | 140 | 192 | 346 | 0.11 | 1.00 | 1792 Jan. 14 | 104 |
| 107 | 141 | 206 | 0.02 | 1.00 | 1811 Sept. 12 | 122 | 141 | 25 | 156 | 9.78 | 1.00 | 1808 Juli 12 | 120 |
| 108 | 142 | 36 | 9.71 | 1.00 | 1780 Nov. 29 | 89 | 142 | 98 | 336 | 9.93 | 1.00 | 1822 Juli 16 | 135 |
| 108 | 191 | 107 | 9.52 | 1.00 | 1847 Nov. 14 | 182 | 142 | 139 | 234 | 0.00 | 1.00 | 1857 Nov. 19 | 210 |
| 109 | 348 | 62 | 9.81 | 1.00 | 1854 Juni 22 | 200 | 144 | 1 | 84 | 7.74 | 1.00 | 1843 Febr. 27 | 161 |
| 110 | 32 | 264 | 9.97 | 1.00 | 1864 Oct. 11 | 234 | 145 | 323 | 188 | 0.03 | 1.01 | 1806 Dec. 29 | 117 |
| 111 | 115 | 219 | 9.50 | 1.00 | 1299 März 31 | 14 | 146 | 216 | 113 | 0.09 | 1.00 | 1825 Dec. 11 | 142 |
| 111 | 324 | 73 | 9.87 | 1.00 | 1699 Jan. 13 | 53 | 147 | 77 | 132 | 0.17 | 1.00 | 1847 Aug. 9 | 180 |
| 111 | 339 | 99 | 9.45 | 1.00 | 1558 Sept. 13 | 28 | 149 | 110 | 10 | 9.72 | 1.00 | 1770 Nov. 22 | 82 |
| 112 | 187 | 155 | 9.89 | 1.00 | 1742 Febr. 9 | 64 | 149 | 130 | 136 | 0.01 | 1.00 | 1718 Jan. 15 | 58 |
| 113 | 251 | 255 | 0.03 | 1.00 | 1863 April 5 | 227 | <150 | 300 | 90 | klein | 1.00 | —372 Winter | 1 |
| 114 | 137 | 290 | 9.98 | 0.96 | 1862 Aug. 23 | 224 | 150 | 169 | 117 | 9.75 | 1.00 | 1590 Febr. 8 | 33 |
| 114 | 227 | 38 | 0.31 | 1.00 | 1854 Jan. 4 | 198 | 150 | 174 | 288 | 9.87 | 1.00 | 1790 Jan. 17 | 101 |
| 115 | 18 | 202 | 0.20 | 1.00 | 1796 April 3 | 108 | 151 | 262 | 2 | 9.80 | 0.99 | 1846 Juni 5 | 175 |
| 116 | 34 | 153 | 9.90 | 1.00 | 1790 Mai 21 | 103 | 153 | 78 | 140 | 9.98 | 1.00 | 1781 Nov. 30 | 91 |
| 117 | 90 | 79 | 9.93 | 1.01 | 1818 Dec. 5 | 129 | 157 | 260 | 283 | 9.75 | 1.00 | 1855 Mai 30 | 204 |
| 117 | 165 | 294 | 9.76 | 1.00 | 1858 Sept. 30 | 213 | 158 | 250 | 270 | 9.66 | 1.00 | 1362 März 7 | 18 |
| 119 | 220 | 138 | 9.24 | 1.00 | 1853 Oct. 17 | 197 | 159 | 45 | 266 | 9.42 | 1.00 | 1801 Aug. 9 | 114 |
| 119 | 233 | 206 | 9.23 | 1.00 | 1582 Mai 6 | 31 | 159 | 61 | 52 | 9.84 | 1.00 | 1813 März 5 | 125 |
| 120 | 104 | 191 | 9.78 | 1.00 | 770 Juni 7 | 6 | 159 | 84 | 35 | 0.01 | 1.00 | 1664 Dec. 4 | 40 |
| 120 | 109 | 349 | 9.61 | 1.00 | 1793 Nov. 5 | 106 | 159 | 160 | 315 | 0.15 | 1.00 | 1858 Oct. 13 | 214 |
| 120 | 177 | 250 | 9.89 | 1.00 | 565 Juli 11 | 3 | 160 | 70 | 345 | 0.04 | 1.00 | 1853 Febr. 24 | 194 |
| 121 | 24 | 158 | 9.57 | 1.00 | 1857 Juli 18 | 207 | 160 | 220 | 210 | 0.00 | 1.00 | —137 April 29 | $1_a$ |
| 121 | 93 | 273 | 8.28 | 1.00 | 1689 Nov. 29 | 50 | 162 | 50 | 144 | 9.77 | 1.00 | 1006 März 22 | ... |
| 121 | 237 | 33 | 0.09 | 1.00 | 1840 März 13 | 157 | 162 | 55 | 166 | 9.77 | 0.97 | period. Comet | 19 |
| 122 | 41 | 240 | 9.96 | 0.99 | 1853 Mai 10 | 195 | 163 | 231 | 42 | 9.99 | 0.91 | 1866 Jan. 11 | (238) |
| 122 | 161 | 240 | 0.14 | 1.00 | 1846 Mai 28 | 173 | 163 | 341 | 159 | 0.05 | 1.00 | 1864 Dec. 28 | (236 |
| 123 | 20 | 127 | 9.95 | 1.00 | 1825 Mai 31 | 140 | 168 | 158 | 216 | 0.03 | 1.00 | 1788 Nov. 10 | 99 |
| 124 | 15 | 140 | 9.75 | 1.00 | 1857 Sept. 31 | 209 | 168 | 270 | 267 | 9.84 | 1.00 | 1698 Oct. 19 | 52 |
| 124 | 209 | 314 | 9.83 | 1.00 | 1739 Juni 17 | 63 | 169 | 220 | 137 | 9.76 | 1.00 | 837 März 1 | 7 |
| 125 | 235 | 209 | 9.77 | 1.00 | 1824 Juli 12 | 138 | 170 | 51 | 17 | 0.09 | 1.00 | 1855 Nov. 25 | 205 |
| 126 | 125 | 3 | 9.00 | 1.00 | 1780 Oct. 1 | 88 | 170 | 55 | 164 | 9.77 | 1.00 | —12 Oct. 9 | $1_c$ |
| 126 | 150 | 49 | 9.14 | 1.00 | 1827 Sept. 12 | 149 | 171 | 59 | 269 | 0.31 | 1.00 | 1835 März 28 | 155 |
| 126 | 178 | 163 | 9.70 | 1.00 | 1822 Mai 6 | 134 | 172 | 326 | 354 | 9.99 | 1.00 | 1862 Juni 22 | 223 |
| 127 | 93 | 274 | 0.06 | 1.00 | 1822 Oct. 24 | 136 | 175 | 41 | 46 | 9.27 | 1.00 | 1826 April 29 | 144 |
| 127 | 121 | 226 | 9.74 | 1.00 | 1764 Febr. 13 | 77 | 175 | 81 | 23 | 9.98 | 1.00 | 1759 Dec. 17 | 74 |
| 128 | 275 | 82 | 9.89 | 1.00 | 1385 Oct. 16 | 20 | 178 | 95 | 246 | 9.96 | 1.00 | 1864 Aug. 16 | (233) |
| 128 | 334 | 33 | 9.75 | 1.00 | 1596 Juli 25 | 35 | 178 | 212 | 10 | 9.75 | 1.00 | 1472 Febr. 28 | 23 |
| 129 | 58 | 34 | 9.85 | 1.00 | 1784 Jan. 21 | 93 | | | | | | | |
| 129 | 100 | 196 | 9.92 | 1.00 | 1799 Sept. 7 | 112 | | | | | | | |

*) Der letzte in dieser Zusammenstellung aufgenommene Komet.

## Formeln zur Berechnung einer Kometenbahn
nach Olbers' Methode (pag. 121 ff).

| | Beobachtungszeit | Beob.-Länge | Beob.-Breite | Sonnenlänge | Entfg. ⊙ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Beobachtg. | $T_,$ | $\lambda_,$ | $\beta_,$ | $L_,$ | $R_,$ |
| 2. » | $T_{,,}$ | $\lambda_{,,}$ | $\beta_{,,}$ | $L_{,,}$ | $R_{,,}$ |
| 3. » | $T_{,,,}$ | $\lambda_{,,,}$ | $\beta_{,,,}$ | $L_{,,,}$ | $R_{,,,}$ |

Olbers' Methode ist mit Vortheil anwendbar, wenn ist:

$$\sin(i - i_0) < \pm \tfrac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} i = -\frac{\beta_{,,,} - \beta_,}{\lambda_{,,,} - \lambda_,} \sec\beta_{,,} \qquad \operatorname{tg} i_0 = \operatorname{tg}(\lambda_{,,} - L_{,,}) \operatorname{cosec}\beta_{,,}$$

$i$ und $i_0$ sind stets kleiner als 180°. Ist Olbers' Methode nicht anwendbar, so hat man das auf pag. 133 ff angegebene Verfahren zu befolgen.

I.

$$\operatorname{cotg} J = \frac{\sin(\lambda_{,,} - L_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,}} \qquad M = \frac{T_{,,,} - T_{,,}}{T_{,,} - T_,} \cdot \frac{\sin\beta_, \operatorname{cotg} J - \sin(\lambda_, - L_{,,}) \cos\beta_,}{\sin(\lambda_{,,,} - L_{,,}) \cos\beta_{,,,} - \sin\beta_{,,,} \operatorname{cotg} J}$$

II.

$$R_{,,,} \cos(L_{,,,} - L_,) - R_, = g \cos(G - L_,) \qquad \cos(\lambda_, - L_,) \cos\beta_, = \cos\psi_,$$

$$R_{,,,} \sin(L_{,,,} - L_,) = g \sin(G - L_,) \qquad \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \cos\beta_{,,,} = \cos\psi_{,,,}$$

$g$ stets positiv.

Nach $\cos\psi_,$ und $\cos\psi_{,,,}$ kann $\sin\psi_,$ und $\sin\psi_{,,,}$ bestimmt werden, welche Sinus stets positiv anzunehmen sind; ist die Bestimmung aus $\cos\psi$ sehr unsicher, so ist auch:

$$\sin\psi_,^2 = \cos\beta_,^2 \sin(\lambda_, - L_,)^2 + \sin\beta_,^2 \qquad \sin\psi_{,,,}^2 = \cos\beta_{,,,}^2 \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,})^2 + \sin\beta_{,,,}^2$$

$$R_, \cos\psi_, = f_,;\; R_, \sin\psi_, = B_,;\; \frac{R_{,,,}\cos\psi_{,,,}}{M} = f_{,,,};\; \frac{R_{,,,}\sin\psi_{,,,}}{M} = B_{,,,}$$

III.

$$M \cos\beta_{,,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_,) \cos\beta_, = h \cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,}) \qquad \cos\zeta \cos(G - H) = \cos\varphi$$

$$\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_,) \cos\beta_, = h \cos\zeta \sin(H - \lambda_{,,,}) \qquad \frac{g}{h}\cos\varphi = \gamma$$

$$M \sin\beta_{,,,} - \sin\beta_, = h \sin\zeta \qquad \frac{g}{h}\sin\varphi = A$$

$h$ stets positiv.

Ist die Bestimmung von $\sin\varphi$ (stets positiv) aus $\cos\varphi$ unsicher, so kann man rechnen:

$$\sin\varphi^2 = \cos\zeta^2 \sin(G - H)^2 + \sin\zeta^2$$

IV.

Zu der folgenden Auflösung muss die Tafel VIII benutzt werden, die $\log\mu$ mit dem Argumente $\eta$ finden lässt. Es muss $\varrho_,$ so bestimmt werden, dass $s_1 = s_2$ wird (vergl. pag. 125 ff).

$$2k(T_{,,,} - T_{,}) = \tau \qquad \log 2k = 8.536\,611$$

$$\frac{\varrho_{,} - f_{,}}{B_{,}} = \operatorname{tg}\theta_{,} \qquad r_{,} = R_{,} \sin\psi_{,} \sec\theta_{,}$$

$$\frac{\varrho_{,} - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} \qquad r_{,,,} = R_{,,,} \sin\psi_{,,,} \sec\theta_{,,,}$$

$$\frac{\varrho_{,} - \gamma}{A} = \operatorname{tg}\vartheta \qquad s_1 = g \sin\varphi \sec\vartheta$$

$$\eta = \frac{\tau}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}} \qquad s_2 = \frac{\tau\mu}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varrho_{,,,} = M\varrho_{,}$$

## V.

$$\varrho_{,}\cos(\lambda_{,}-L_{,})\cos\beta_{,}-R_{,} = r_{,}\cos b_{,}\cos(l_{,}-L_{,}) \qquad \varrho_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-L_{,,,})\cos\beta_{,,,}-R_{,,,} = r_{,,,}\cos b_{,,,}\cos(l_{,,,}-L_{,,,})$$

$$\varrho_{,}\sin(\lambda_{,}-L_{,})\cos\beta_{,} = r_{,}\cos b_{,}\sin(l_{,}-L_{,}) \qquad \varrho_{,,,}\sin(\lambda_{,,,}-L_{,,,})\cos\beta_{,,,} = r_{,,,}\cos b_{,,,}\sin(l_{,,,}-L_{,,,})$$

$$\varrho_{,}\sin\beta_{,} = r_{,}\sin b_{,} \qquad \varrho_{,,,}\sin\beta_{,,,} = r_{,,,}\sin b_{,,,}$$

$r_{,}$ und $r_{,,,}$ muss wie in IV gefunden werden.

## VI.

$(l_{,,,} - l_{,})$ positiv, so ist tg $i$ positiv, also: $i < 90^\circ$

$(l_{,,,} - l_{,})$ negativ » » » negativ, » $i > 90^\circ$

$$\operatorname{tg} b_{,} = \operatorname{tg} i \sin(l_{,} - \Omega)$$

$$\frac{\operatorname{tg} b_{,,,} - \operatorname{tg} b_{,} \cos(l_{,,,} - l_{,})}{\sin(l_{,,,} - l_{,})} = \operatorname{tg} i \cos(l_{,} - \Omega)$$

## VII.

tg $i < \pm 1$ — tg $i > \pm 1$

$$\operatorname{tg} u_{,} = \frac{\operatorname{tg}(l_{,} - \Omega)}{\cos i} \quad \operatorname{tg} u_{,,,} = \frac{\operatorname{tg}(l_{,,,} - \Omega)}{\cos i}; \qquad \operatorname{tg} u_{,} = \frac{\operatorname{tg} b_{,}}{\cos(l_{,} - \Omega)\sin i} \quad \operatorname{tg} u_{,,,} = \frac{\operatorname{tg} b_{,,,}}{\cos(l_{,,,} - \Omega)\sin i}$$

$u$ wird in dem Quadranten gewählt, der einerseits durch das Zeichen von tg $u$ bestimmt ist, andererseits muss sin $u$ mit sin $b$ gleich bezeichnet sein. Als Probe:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(r_{,} + r_{,,,} + s) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,}) = \sqrt{\frac{(\Sigma - r_{,})(\Sigma - r_{,,,})}{\Sigma(\Sigma - s)}}$$

## VIII.

$$\frac{1}{\sqrt{r_{,}}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\cos^2\tfrac{1}{2}v_{,} \qquad v_{,,,} = v_{,} + (u_{,,,} - u_{,}) \qquad \omega = u_{,,,} - v_{,,,}$$

$$\frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,})}{\sqrt{r_{,}}} - \frac{\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(u_{,,,} - u_{,})}{\sqrt{r_{,,,}}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\sin\tfrac{1}{2}v_{,} \qquad \omega = u_{,} - v_{,} \qquad \pi = \omega + \Omega$$

## IX.

$M$ wird mit dem Argument $v$ aus der Tafel V entnommen.

$$T = T_{,} - M_{,}q^{\frac{3}{2}} \qquad T = T_{,,,} - M_{,,,}q^{\frac{3}{2}}$$

Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von $T$ muss eine vollständige sein.

# Formeln zur Berechnung einer Planetenbahn

aus drei Orten (pag. 238 ff).

| | Beobachtungszeit | Beob.-Länge | Beob.-Breite | Sonnenlänge | Entfg. ⊙ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Beobachtg. | $T_{,}$ | $\lambda_{,}$ | $\beta_{,}$ | $L_{,}$ | $R_{,}$ |
| 2. » | $T_{,,}$ | $\lambda_{,,}$ | $\beta_{,,}$ | $L_{,,}$ | $R_{,,}$ |
| 3. » | $T_{,,,}$ | $\lambda_{,,,}$ | $\beta_{,,,}$ | $L_{,,,}$ | $R_{,,,}$ |

## I.

$$\begin{aligned}
\cos\psi_{,} &= \cos\beta_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,}) \\
\sin\psi_{,} \cos P_{,} &= \cos\beta_{,} \sin(\lambda_{,} - L_{,}) \\
\sin\psi_{,} \sin P_{,} &= \sin\beta_{,} \\
f_{,} &= R_{,} \cos\psi_{,} \\
B_{,} &= R_{,} \sin\psi_{,} \\
R_s{}' &= R_{,} \sin(\lambda_{,} - L_{,}) \\
R_c{}' &= - R_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\psi_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\sin\psi_{,,,} \cos P_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\sin\psi_{,,,} \sin P_{,,,} &= \sin\beta_{,,,} \\
f_{,,,} &= R_{,,,} \cos\psi_{,,,} \\
B_{,,,} &= R_{,,,} \sin\psi_{,,,} \\
R_s{}''' &= R_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
R_c{}''' &= - R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,})
\end{aligned}$$

## II.

$$\begin{aligned}
\cos(\lambda_{,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,} \sin\beta_{,,} - \sin\beta_{,} \cos\beta_{,,} &= \sin\varDelta_{,} \cos w_{,} \\
\sin(\lambda_{,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,} &= \sin\varDelta_{,} \sin w_{,} \\
\cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} \sin\beta_{,,} - \sin\beta_{,,,} \cos\beta_{,,} &= \sin\varDelta_{,,,} \cos w_{,,,} \\
\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} &= \sin\varDelta_{,,,} \sin w_{,,,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\beta_{,,} \sin w_{,,,} &= g_{,} \sin G_{,} \\
- \cos w_{,,,} &= g_{,} \cos G_{,} \\
G_{,} - \lambda_{,,} &= F_{,} \\
\frac{g_{,}}{\sin\varDelta_{,} \sin(w_{,,,} - w_{,})} &= q_{,} \\
q_{,} R_{,} \sin(L_{,} + F_{,}) &= A' \\
- q_{,} R_{,,} \sin(L_{,,} + F_{,}) &= B' \\
q_{,} R_{,,,} \sin(L_{,,,} + F_{,}) &= C'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\beta_{,,} \sin w_{,} &= g_{,,,} \sin G_{,,,} \\
- \cos w_{,} &= g_{,,,} \cos G_{,,,} \\
G_{,,,} - \lambda_{,,} &= F_{,,,} \\
\frac{g_{,,,}}{\sin\varDelta_{,,,} \sin(w_{,} - w_{,,,})} &= q_{,,,} \\
q_{,,,} R_{,,,} \sin(L_{,,,} + F_{,,,}) &= A''' \\
- q_{,,,} R_{,,} \sin(L_{,,} + F_{,,,}) &= B''' \\
q_{,,,} R_{,} \sin(L_{,} + F_{,,,}) &= C'''
\end{aligned}$$

## III.

$$\begin{aligned}
(T'' - T')\, k &= \tau''' & \frac{\tau'^2 \tau'''}{\tau''} &= \nu_0 & A' + (1)_{,} + (2)_{,} &= (I)_{,} \\
(T''' - T')\, k &= \tau'' & \tau' \tau''' &= \nu_1 & - \{(1)_{,} \mu_0 + (2)_{,} \mu_1\} &= (II)_{,} \\
(T''' - T'')\, k &= \tau' & \frac{\tau' \tau'''^2}{\tau''} &= \nu_2 & - \{(1)_{,} \nu_0 + (2)_{,} \nu_1\} &= (III)_{,} \\
\log k &= 8.235\,581 & B' \frac{\tau''}{\tau'} &= (1)_{,} & & \\
\tfrac{1}{3} (\tau''^2 - \tau'^2) &= \mu_0 & C' \frac{\tau'''}{\tau'} &= (2)_{,} & A''' + (1)_{,,,} + (2)_{,,,} &= (I)_{,,,}
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{3}(\tau'''^2 - \tau'^2) = \mu_1 \qquad B''' \frac{\tau''}{\tau'''} = (1)_{\prime\prime\prime} \qquad \{(2)_{\prime\prime\prime}\,\mu_1 - (1)_{\prime\prime\prime}\,\mu_2\} = (II)_{\prime\prime\prime}$$

$$\tfrac{1}{3}(\tau''^2 - \tau'''^2) = \mu_2 \qquad C''' \frac{\tau'}{\tau'''} = (2)_{\prime\prime\prime} \qquad \{(2)_{\prime\prime\prime}\,\nu_1 + (1)_{\prime\prime\prime}\,\nu_2\} = (III)_{\prime\prime\prime}$$

## IV.

$$\varrho_{\prime} = (I)_{\prime} + (II)_{\prime}\,x + (III)_{\prime}\,xy \qquad \varrho_{\prime\prime\prime} = (I)_{\prime\prime\prime} + (II)_{\prime\prime\prime}\,x + (III)_{\prime\prime\prime}\,xy$$

$$\frac{\varrho_{\prime} - f_{\prime}}{B_{\prime}} = \operatorname{tg}\theta_{\prime} \qquad \frac{\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime}}{B_{\prime\prime\prime}} = \operatorname{tg}\theta_{\prime\prime\prime}$$

$$r_{\prime} = (\varrho_{\prime} - f_{\prime})\operatorname{cosec}\theta_{\prime} \qquad r_{\prime\prime\prime} = (\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime})\operatorname{cosec}\theta_{\prime\prime\prime}$$

$$x = \frac{4}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^3} \qquad d\log x_{\prime} = \frac{\log x_2 - \log x_1}{1 + \frac{12}{(r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime})^4}\{(II)_{\prime}\sin\theta_{\prime} + (II)_{\prime\prime\prime}\sin\theta_{\prime\prime\prime}\}\frac{x_1}{x_2}} \quad \text{(vgl. pag. 234).}$$

$$y = \frac{r_{\prime\prime\prime} - r_{\prime}}{r_{\prime} + r_{\prime\prime\prime}}$$

## V.

$$r_{\prime}\cos(l_{\prime} - \lambda_{\prime})\cos b_{\prime} = \varrho_{\prime}\cos\beta_{\prime} + R'_c \qquad r_{\prime\prime\prime}\cos(l_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime\prime})\cos b_{\prime\prime\prime} = \varrho_{\prime\prime\prime}\cos\beta_{\prime\prime\prime} + R'''_c$$

$$r_{\prime}\sin(l_{\prime} - \lambda_{\prime})\cos b_{\prime} = R'_s \qquad r_{\prime\prime\prime}\sin(l_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime\prime})\cos b_{\prime\prime\prime} = R'''_s$$

$$r_{\prime}\sin b_{\prime} = \varrho_{\prime}\sin\beta_{\prime} \qquad r_{\prime\prime\prime}\sin b_{\prime\prime\prime} = \varrho_{\prime\prime\prime}\sin\beta_{\prime\prime\prime}$$

$$\sin^2 f'' = \sin^2\tfrac{1}{2}(l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime})\cos b_{\prime}\cos b_{\prime\prime\prime} + \sin^2\tfrac{1}{2}(b_{\prime\prime\prime} - b_{\prime})$$

$$m_{\prime\prime} = \frac{\tau''^2}{(2\cos f''\sqrt{r_{\prime}\,r_{\prime\prime\prime}})^3} \qquad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r_{\prime\prime\prime}}{r_{\prime}}}$$

$$l_{\prime\prime} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}f'' + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f''} \qquad h_{\prime\prime} = \frac{m_{\prime\prime}}{\frac{5}{6} + l_{\prime\prime}}$$

$$\eta_{\prime\prime} = 1 + \tfrac{10}{11}\cdot\cfrac{\frac{11}{9}h_{\prime\prime}}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_{\prime\prime}}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_{\prime\prime}}{1 + \text{etc.}}}} \qquad \begin{aligned}\log\tfrac{5}{6} &= 9.920\ 819\\ \log\tfrac{11}{9} &= 0.087\ 150\\ \log\tfrac{10}{11} &= 9.958\ 607\end{aligned}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}g = \frac{m_{\prime\prime}}{\eta_{\prime\prime}^2} - l_{\prime\prime}$$

## VI.

$$\cos\tfrac{1}{2}(f'' + g)\operatorname{tg}2\omega = \sin\tfrac{1}{2}(F - G)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,(\gamma)^2; \quad \cos\tfrac{1}{2}(f'' - g)\operatorname{tg}2\omega = \sin\tfrac{1}{2}(F + G)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(\gamma)^2$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(f'' + g)\sec 2\omega = \cos\tfrac{1}{2}(F - G)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,(\gamma)^2; \quad \sin\tfrac{1}{2}(f'' - g)\sec 2\omega = \cos\tfrac{1}{2}(F + G)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(\gamma)^2$$

$$\text{Probe: } (\gamma)^2 = \frac{\sqrt{2\,m_{\prime\prime}\cos f''}}{\eta_{\prime\prime}}$$

$$v_{\prime\prime\prime} = F + f'' \qquad E_{\prime\prime\prime} = G + g$$

$$v_{\prime} = F - f'' \qquad E_{\prime} = G - g$$

## VII.

$$p = \left(\frac{\eta_{\prime\prime}\,r_{\prime}\,r_{\prime\prime\prime}\sin 2f''}{\tau''}\right)^2 \qquad e'' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}$$

$$a = p\sec^2\varphi \qquad M_{\prime} = E_{\prime} - e''\sin E_{\prime}$$

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad M_{\prime\prime\prime} = E_{\prime\prime\prime} - e''\sin E_{\prime\prime\prime}$$

$$\log k'' = 3.550\ 007 \qquad \mu = \frac{M_{\prime\prime\prime} - M_{\prime}}{T_{\prime\prime\prime} - T_{\prime}}$$

## VIII.

$$\operatorname{tg} b_{,} = \operatorname{tg} i \sin (l_{,} - \Omega) \qquad \operatorname{tg} u_{,} = \operatorname{tg} (l_{,} - \Omega) \sec i$$

$$\frac{\operatorname{tg} b_{,,,} - \operatorname{tg} b_{,} \cos (l_{,,,} - l_{,})}{\sin (l_{,,,} - l_{,})} = \operatorname{tg} i \cos (l_{,} - \Omega) \qquad \operatorname{tg} u_{,,,} = \operatorname{tg} (l_{,,,} - \Omega) \sec i$$

$u$ ist in demselben Quadranten anzunehmen in dem $(l - \Omega)$ liegt.

Probe: $u_{,,,} - u_{,} = 2f''$

$$\pi = u_{,} + \Omega - v_{,} \qquad \pi = u_{,,,} + \Omega - v_{,,,}$$

## IX.

Darstellung der zweiten Beobachtung:

$$M_{,,} = M_{,} + (T'' - T')\,\mu = M_{,,,} - (T''' - T'')\,\mu$$

$$E_{,,} = M_{,,} + e'' \sin E_{,,}$$

$$r_{,,} \cos v_{,,} = a \cos E_{,,} - a \sin \varphi$$

$$r_{,,} \sin v_{,,} = a \cos \varphi \sin E_{,,}$$

$$u_{,,} = v_{,,} + (\pi - \Omega)$$

$$\varrho_{,,} \cos \beta_{,,} \cos (l_{,,} - \Omega) = r_{,,} \cos u_{,,} + R_{,,} \cos (L_{,,} - \Omega)$$

$$\varrho_{,,} \cos \beta_{,,} \sin (l_{,,} - \Omega) = r_{,,} \sin u_{,,} \cos i + R_{,,} \sin (L_{,,} - \Omega)$$

$$\varrho_{,,} \sin \beta_{,,} = r_{,,} \sin u_{,,} \sin i$$

# Formeln zur Berechnung einer Planetenbahn

aus vier Orten (pag. 265 ff).

| | Beobachtungszeit | Beob.-Länge | Beob.-Breite | Sonnenlänge | Entfg. ⊙ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Beobachtg. | $T'$ | $\lambda'$ | $\beta'$ | $L'$ | $R'$ |
| 2. » | $T''$ | $\lambda''$ | $(\beta'')$ | $L''$ | $R''$ |
| 3. » | $T_0''$ | $\lambda_0''$ | $(\beta_0'')$ | $L_0''$ | $R_0''$ |
| 4. » | $T'''$ | $\lambda'''$ | $\beta'''$ | $L'''$ | $R'''$ |

## I.

$$\delta' = \sin(\lambda'' - \lambda')\cos\beta' \qquad \delta_0' = \sin(\lambda_0'' - \lambda')\cos\beta'$$
$$\delta''' = \sin(\lambda''' - \lambda'')\cos\beta''' \qquad \delta_0''' = \sin(\lambda''' - \lambda_0'')\cos\beta'''$$
$$A = R'\sin(L' - \lambda'') : \delta''' \qquad A_0 = R'\sin(L' - \lambda_0'') : \delta_0'''$$
$$B = R''\sin(L'' - \lambda'') : \delta''' \qquad B_0 = R_0''\sin(L_0'' - \lambda_0'') : \delta_0'''$$
$$C = R'''\sin(L''' - \lambda'') : \delta''' \qquad C_0 = R'''\sin(L''' - \lambda_0'') : \delta_0'''$$
$$D = \delta' : \delta''' \qquad D_0 = \delta_0' : \delta_0'''$$
$$\cos\psi_{\prime} = \cos\beta'\cos(\lambda' - L') \qquad \cos\psi_{\prime\prime\prime} = \cos\beta'''\cos(\lambda''' - L''')$$
$$\sin\psi_{\prime}\cos P_{\prime} = \cos\beta'\sin(\lambda' - L') \qquad \sin\psi_{\prime\prime\prime}\cos P_{\prime\prime\prime} = \cos\beta'''\sin(\lambda''' - L''')$$
$$\sin\psi_{\prime}\sin P_{\prime} = \sin\beta' \qquad \sin\psi_{\prime\prime\prime}\sin P_{\prime\prime\prime} = \sin\beta'''$$
$$f_{\prime} = R'\cos\psi_{\prime} \qquad f_{\prime\prime\prime} = R'''\cos\psi_{\prime\prime\prime}$$
$$B_{\prime} = R'\sin\psi_{\prime} \qquad B_{\prime\prime\prime} = R'''\sin\psi_{\prime\prime\prime}$$
$$R_s' = R'\sin(\lambda' - L') \qquad R_s''' = R'''\sin(\lambda''' - L''')$$
$$R_c' = -R'\cos(\lambda' - L') \qquad R_c''' = -R'''\cos(\lambda''' - L''')$$

## II.

$$\tau' = k(T''' - T'') \qquad \tau_0' = k(T''' - T_0'')$$
$$\tau''' = k(T'' - T') \qquad \tau_0''' = k(T_0'' - T')$$
$$\tau'' = k(T''' - T') \qquad \log k = 8.235\,5814$$
$$\frac{\tau'}{\tau'''}A = (1) \qquad \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}A_0 = (1)_0$$
$$-\frac{\tau''}{\tau'''}B = (2) \qquad -\frac{\tau''}{\tau_0'''}B_0 = (2)_0$$
$$\frac{\tau'}{\tau'''}D = (3) \qquad \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}D_0 = (3)_0$$
$$a = (1) + (2) + C \qquad a_0 = (1)_0 + (2)_0 + C_0$$
$$I = a_0 - a \qquad II = (3) - (3)_0$$
$$V = \tfrac{1}{2}(a_0 + a) \qquad VI = \tfrac{1}{2}\{(3) + (3)_0\}$$

## III.

$$b = (1)\,Y'' + (2)\,Y' \qquad b_0 = (1)_0\,Y_0'' + (2)_0\,Y_0'$$
$$III = b - b_0 \qquad IV = (3)_0\,Y_0'' - (3)\,Y''$$
$$VII = \tfrac{1}{2}(b + b_0) \qquad VIII = \tfrac{1}{2}\{(3)_0\,Y_0'' + (3)\,Y''\}$$

In der ersten Hypothese wird man setzen wenn sonst keine Näherungswerthe bekannt sind:

$$Y'' = \tfrac{1}{3}(\tau'^2 - \tau'''^2) \qquad Y_0'' = \tfrac{1}{3}(\tau_0'^2 - \tau_0'''^2)$$

$$Y' = \tfrac{1}{3}(\tau''^2 - \tau'''^2) \qquad Y_0' = \tfrac{1}{3}(\tau''^2 - \tau_0'''^2)$$

Sind genäherte Elemente bekannt, so werden sofort genauere Werthe für $Y$ durch die Anwendung der Formeln VIII erlangt.

IV.

$$\varrho' = \frac{I + III\,x}{II + IV\,x} \qquad \varrho''' = V - VII\,x + \{VI - VIII\,x\}\,\varrho'$$

$$\frac{\varrho' - f_{,}}{B_{,}} = \operatorname{tg}\theta_{,} \qquad r' = (\varrho' - f_{,})\operatorname{cosec}\theta_{,}$$

$$\frac{\varrho''' - f_{,,,}}{B_{,,,}} = \operatorname{tg}\theta_{,,,} \qquad r''' = (\varrho''' - f_{,,,})\operatorname{cosec}\theta_{,,,}$$

$$x = \frac{4}{(r' + r''')^3}$$

V.

$$r'\cos(l' - \lambda')\cos b' = \varrho'\cos\beta' + R_c' \qquad r'''\cos(l''' - \lambda''')\cos b''' = \varrho'''\cos\beta''' + R_c'''$$

$$r'\sin(l' - \lambda')\cos b' = R_s' \qquad r'''\sin(l''' - \lambda''')\cos b''' = R_s'''$$

$$r'\sin b' = \varrho'\sin\beta' \qquad r'''\sin\beta''' = \varrho'''\sin\beta'''$$

$$\sin^2 f'' = \sin^2\tfrac{1}{2}(l''' - l')\cos b'\cos b''' + \sin^2\tfrac{1}{2}(b''' - b')$$

Ist die Annäherung hinreichend weit getrieben, so bricht die Rechnung hier ab und setzt mit IX fort.

VI.

$$\frac{n}{n''} = \frac{\tau'}{\tau'''}(1 - xY'') \qquad \frac{n_0}{n_0''} = \frac{\tau_0'}{\tau_0'''}(1 - xY_0'')$$

$$\frac{1}{n''} = \frac{\tau''}{\tau'''}(1 - xY') \qquad \frac{\tau_0''}{\tau_0'''} = \frac{\tau''}{\tau_0'''}(1 - xY_0')$$

$$r''\sin 2f''' = r'''n''\sin 2f'' \qquad r_0''\sin 2f_0''' = r'''n_0''\sin 2f''$$

$$r''\cos 2f''' = r'n + r'''n''\cos 2f'' \qquad r_0''\cos 2f_0''' = r'n_0 + r'''n_0''\cos 2f''$$

zur Prüfung:

$$r''\sin 2f' = r'n\sin 2f'' \qquad r_0''\sin 2f_0' = r'n_0\sin 2f''$$

$$r''\cos 2f' = r'''n'' + r'n\cos 2f'' \qquad r_0''\cos 2f_0' = r'''n_0'' + r'n_0\cos 2f''$$

VII.

| statt: | $\eta$ | $\eta'$ | $\eta'''$ | $\eta_0'$ | $\eta_0'''$ | $\eta''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| » | $\tau$ | $\tau'$ | $\tau'''$ | $\tau_0'$ | $\tau_0'''$ | $\tau''$ |
| » | $f$ | $f'$ | $f'''$ | $f_0'$ | $f_0'''$ | $f''$ |
| » | $r$ | $r''$ | $r'$ | $r_0''$ | $r'$ | $r$ |
| » | $r_{,}$ | $r'''$ | $r''$ | $r'''$ | $r_0''$ | $r'''$ |

$$m = \frac{\tau^2}{(2\cos f\sqrt{r\,r_{,}})^3} \qquad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r_{,}}{r}} \qquad l = \frac{\sin^2\frac{1}{2}f + \operatorname{tg}^2 2\omega}{\cos f}$$

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \qquad (\eta - 1) = \frac{h}{\eta^2}(\eta + \tfrac{1}{9}) \qquad \log\tfrac{1}{9} = 9.045\,7575$$

Tafel IX gibt mit dem Argumente: $h$ den Werth $\log \eta^2$

» X » » » » $\frac{m}{\eta^2} - l = x$ » » $\xi$

Als Annäherung kann man im ersten Versuche setzen:

$$x \div \sin^2 \tfrac{1}{2} f$$

## VIII.

$$Y'' = \frac{(\eta' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta' x} \qquad Y_0'' = \frac{(\eta_0' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta_0' x}$$

$$Y' = \frac{(\eta'' - 1) - (\eta''' - 1)}{\eta'' x} \qquad Y_0' = \frac{(\eta'' - 1) - (\eta_0''' - 1)}{\eta'' x}$$

Diese Werthe werden bei einer Wiederholung der Rechnung in III substituirt.

## IX.

$$m_{\prime\prime} = \frac{\tau''^2}{(2 \cos f'' \sqrt{r' r'''})^3} \qquad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega'') = \sqrt[4]{\frac{r'''}{r'}} \qquad l_{\prime\prime} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f'' + \operatorname{tg}^2 2\omega''}{\cos f''}$$

$$h_{\prime\prime} = \frac{m_{\prime\prime}}{\frac{5}{6} + l_{\prime\prime} + \xi} \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} g = \frac{m_{\prime\prime}}{\eta_{\prime\prime}^2} - l_{\prime\prime}$$

## X.

$$\cos \tfrac{1}{2}(f'' + g) \operatorname{tg} 2\omega'' = \sin \tfrac{1}{2}(F - G) \cos \tfrac{1}{2} \varphi (\gamma)^2; \quad \cos \tfrac{1}{2}(f'' - g) \operatorname{tg} 2\omega'' = \sin \tfrac{1}{2}(F + G) \sin \tfrac{1}{2} \varphi (\gamma)^2$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(f'' + g) \sec 2\omega'' = \cos \tfrac{1}{2}(F - G) \cos \tfrac{1}{2} \varphi (\gamma)^2; \quad \sin \tfrac{1}{2}(f'' - g) \sec 2\omega'' = \cos \tfrac{1}{2}(F + G) \sin \tfrac{1}{2} \varphi (\gamma)^2$$

Probe: $(\gamma)^2 = \frac{\sqrt{2 m_{\prime\prime} \cos f''}}{\eta_{\prime\prime}}$

$$v_{\prime\prime\prime} = F + f'' \qquad E_{\prime\prime\prime} = G + g$$

$$v_{\prime} = F - f'' \qquad E_{\prime} = G - g$$

## XI.

$$p = \left(\frac{\eta_{\prime\prime} r' r''' \sin 2f''}{\tau''}\right)^2 \qquad e'' = \sin \varphi : \sin 1''$$

$$a = p \sec^2 \varphi \qquad M_{\prime} = E_{\prime} - e'' \sin E_{\prime}$$

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad M_{\prime\prime\prime} = E_{\prime\prime\prime} - e'' \sin E_{\prime\prime\prime}$$

$$\log k'' = 3.550\,0066 \qquad \mu = \frac{M_{\prime\prime\prime} - M_{\prime}}{T''' - T'}$$

## XII.

$$\operatorname{tg} b_{\prime} = \operatorname{tg} i \sin (l' - \Omega) \qquad \operatorname{tg} u_{\prime} = \operatorname{tg}(l' - \Omega) \sec i$$

$$\frac{\operatorname{tg} b_{\prime\prime\prime} - \operatorname{tg} b_{\prime} \cos (l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime})}{\sin (l_{\prime\prime\prime} - l_{\prime})} = \operatorname{tg} i \cos (l' - \Omega) \qquad \operatorname{tg} u_{\prime\prime\prime} = \operatorname{tg}(l''' - \Omega) \sec i$$

$u$ ist in demselben Quadranten anzunehmen in dem $(l - \Omega)$ liegt.

Probe: $u_{\prime\prime\prime} - u_{\prime} = 2f''$

$$\pi = u_{\prime} + \Omega - v_{\prime} \qquad \pi = u_{\prime\prime\prime} + \Omega - v_{\prime\prime\prime}$$

---

# Berichtigungen.

Seite 17 Zeile 21 von unten statt $B_b + \omega'$ lies: $B_a + \omega'$
» 18 » 17 » » » $\cos \varepsilon$ » $\cos N$
» 29 » 7 » » » $\cos^4 \varphi$ » $\cos 4 \varphi$
» 45 » 1 » » » dass » das
» 49 » 7 » » » $313^\circ\, 0'\, 5''20$ lies: $213^\circ\, 0'\, 5''20$
» 49 » 1 » » » $312^\circ\, 59'\, 38''06$ » $212^\circ\, 59'\, 38''06$
» 61 » 12 » oben » $A\frac{1}{2}$ lies: $A^{1/2}$
» 62 » 12 » unten » $\frac{2}{135} A^2$ » $\frac{2}{135} A^3$
» 63 » 6 » » » $\sqrt{\frac{1+9e}{109^3}}$ lies: $\sqrt{\frac{1+9e}{10\, q^3}}$
» 65 » 20 » » » $68\; 22'\, 37''22$ » $68^\circ\, 22'\, 37''22$
» 79 » 5 » » » $\operatorname{cotg} i_0\, \pi \sin(\Omega - \Pi)$ lies: $\operatorname{cotg} i_0\, \pi \sin(\Omega_0 - \Pi)$
» 106 » 17 » » » $\frac{\varrho_{\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime}}{B_{\prime\prime\prime}}$ lies: $\frac{\varrho_{\prime} - f_{\prime\prime\prime}}{B_{\prime\prime\prime}}$
» 110 » 16 » oben » $\tau'\, \tau_{\prime\prime\prime}$ » $\tau_{\prime},\, \tau_{\prime\prime\prime}$
» 128 » 15 » » » $\operatorname{tg} \vartheta$ » $\operatorname{tg} \delta$
» 130 » 7 » unten » $\log(\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime})$ lies: $\log(\varrho_{\prime} - f_{\prime\prime\prime})$
» 132 » 7 » oben » $\log(\varrho_{\prime\prime\prime} - f_{\prime\prime\prime})$ » $\log(\varrho_{\prime} - f_{\prime\prime\prime})$
» 132 » 9 » unten » würde » wurde
» 160 » 16 » » » $\sqrt{}2q$ » $\sqrt{2q}$
» 160 » 4 » » » $\sqrt{}2q$ » $\sqrt{2q}$
» 160 » 2 » » » $r \cos \frac{1}{2} r^2$ » $R \cos \frac{1}{2} r^2$
» 221 » 10 » oben » $\operatorname{tg}^2 2\omega_{\prime\prime}$ » $\operatorname{tg}^2 2\omega''$
» 221 » 11 » » ist vor dem Gleichheitszeichen der Buchstabe $h$ herausgefallen.
» 237 » 13 » » » $-\mu x_1$ lies: $-\mu_1 x$
» 238 » 1 » unten » $B''' \frac{\tau'''}{\tau''}$ » $B''' \frac{\tau''}{\tau'''}$
» 250 » 16 » oben » auf » aus
» 271 » 7 » » » $\log r''' = 9.3318^n$ » $\log r''' = 0.3318^n$
» 277 » 20 » unten » $\log - VII''$ » $\log - VIII$,
» 296 » 1 » » Columne $4^{te}$, log Diff 1''
statt 1.50305 lies: 1.50304.



